

BIBLIOTEKA MECHANIKI STOSOWANEJ

Jan Rychlewski

„CEIINOSSSTTV”

Matematyczna struktura
ciał sprężystych

Tłumaczenie i rozszerzony komentarz
Andrzej Ziółkowski



Instytut Podstawowych Problemów Techniki
Polskiej Akademii Nauk

**„CEIIN OSSSTUV”
MATEMATYCZNA STRUKTURA
CIAŁ SPRĘŻYSTYCH**

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
P O L S K I E J A K A D E M I I N A U K

**BIBLIOTEKA
MECHANIKI
STOSOWANEJ**

KOMITET REDAKCYJNY

Zenon Mróz – Przewodniczący

Tadeusz Burczyński, Tomasz Kowalewski

Zbigniew Kowalewski, Henryk Petryk

Ryszard Pęcherski, Jerzy Rojek

Wydawnictwo Instytutu Podstawowych Problemów Techniki
Polskiej Akademii Nauk

WARSZAWA

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
P O L S K I E J A K A D E M I I N A U K

Jan Rychlewski

„CEIINOSSTUV”
Matematyczna struktura
ciał sprężystych

Tłumaczenie i rozszerzony komentarz
Andrzej Ziółkowski

WARSZAWA 2023

Polskie tłumaczenie Raportu Jana Rychlewskiego
Математическая структура упругих тел, Препринт № 217,
АН СССР Ин-т Проблем Механики, Москва, 1983

© Copyright for the Polish edition 2023 by
Institute of Fundamental Technological Research Polish Academy of Sciences

Przekład z j. rosyjskiego:
dr hab. inż. Andrzej Ziótkowski

Konsultacja wydawnicza:
prof. dr hab. inż. Katarzyna Kowalczyk-Gajewska

ISBN 978-83-65550-50-7

Wydanie I

Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk
ul. A. Pawińskiego 5B, 02-106 Warszawa
tel.: (48) 22 8266022
e-mail: wydawnictwo@ippt.pan.pl

Projekt okładek serii:
Ewa Jaczyńska

Korekta:
Zespół Działu Wydawnictw

Skład i łamanie w systemie L^AT_EX:
Katarzyna Jezierska

Przedmowa

Przedstawiony poniżej obszerny esej autorstwa Profesora Jana Rychlewskiego został opracowany w czasie jego pobytu jako profesora wizytującego w Instytucie Problemów Mechaniki w Moskwie w 1983 roku. Poświęcony on jest analizie spektralnej symetrycznych tensorów czwartego rzędu – sztywności \mathbf{C} i podatności \mathbf{S} opisujących własności liniowo sprężystych materiałów anizotropowych. Przedstawiona ogólna analiza podzielona została na poszczególne klasy anizotropii materiałowych, takich jak: anizotropia trójkliniczna (pełna), monokliniczna, ortotropowa, tetragonalna, trygonalna, kubiczna, oraz izotropia transwersalna i pełna.

Metodologia analizy spektralnej została szczegółowo opisana w podręcznikach algebry liniowej, a zwłaszcza aspekty obliczeń numerycznych. Problem dotyczący wartości własnych dla symetrycznej macierzy \mathbf{A} w postaci $\mathbf{A}\mathbf{u}_j = \lambda_j\mathbf{u}_j$ wymaga wyznaczenia dwóch zbiorów wzajemnie sprzężonych obiektów: skalarów własnych λ_j i wektorów własnych \mathbf{u}_j . Równanie $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ można sprowadzić do postaci wielomianu charakterystycznego, którego pierwiastki określają skalarne wartości własne λ_j . Drugim ważnym zagadnieniem problemu wartości własnych jest wyrażenie macierzy \mathbf{A} w postaci rozkładu spektralnego względem wartości własnych: $\mathbf{A} = \mathbf{u}\mathbf{A}\mathbf{u}^T = \sum \mathbf{u}_j\lambda_j\mathbf{u}_j^T$. Dla macierzy niesymetrycznych zachodzi podobny rozkład względem prawych i lewych wektorów własnych: $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{V}^T = \sum \mathbf{u}_j\lambda_j\mathbf{v}_j^T$, gdzie zachodzą związki $\mathbf{A}\mathbf{v}_j = \lambda_j\mathbf{u}_j$, $\mathbf{u}_j^T\mathbf{A} = \lambda_j\mathbf{v}_j^T$. Numeryczna analiza problemów własnych dla symetrycznych i niesymetrycznych macierzy \mathbf{A} jest szeroko przedstawiona w monografii A. Kielbasińskiego i H. Schwetlicka pt. *Numeryczna algebra liniowa* (WNT, Warszawa 1992).

Przechodząc od ogólnej analizy spektralnej w rachunku macierzowym do liniowej mechaniki ciał sprężystych, stany odkształcenia i naprężenia opisujemy za pomocą tensorów drugiego rzędu $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$, a prawo Hooke'a $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$, poprzez symetryczny tensor sztywności sprężystej czwartego rzędu \mathbf{C} . Parametryczna postać tego tensora oraz liczba liniowo niezależnych charakteryzujących go parametrów zależy od klasy anizotropii materiału. Analiza spektralna tensora \mathbf{C} przeprowadzona w pracy J. Rychlewskiego dla poszczególnych klas anizotropii wykazała, że tensor \mathbf{C} można przedstawić w postaci spektralnej jako sumę maksimum sześciu iloczynów modułów Kelvina i odpowiadających im tensorów

własnych $\mathbf{C} = \lambda_1 \omega_1 \otimes \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 \otimes \omega_2 + \lambda_3 \omega_3 \otimes \omega_3 + \lambda_4 \omega_4 \otimes \omega_4 + \lambda_5 \omega_5 \otimes \omega_5 + \lambda_6 \omega_6 \otimes \omega_6$. W raporcie podano jawne wzory na wartości prawdziwych modułów sprężystości (Kelvina) i odpowiadające im postacie tensorów własnych dla różnych klas anizotropii materiału. Dla różnych klas anizotropii sformułowano również problem określenia grup symetrii tensora \mathbf{C} .

Monografia J. Rychlewskiego stanowi pracę przełomową. Szeroko znane prace dotyczące tego samego zagadnienia, a więc wyznaczenia prawdziwych modułów sprężystości i odpowiadających im tensorów własnych autorstwa M. Mehrabadiego i S.C. Cowina (Eigentensors of linear anisotropic materials, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **43**(1): 15–41, 1990), a także S. Sutcliffe'a (Spectral decomposition of the elasticity tensor, *Journal of Applied Mechanics*, **59**(4): 762–773, 1992) zostały opublikowane później, kolejno w latach 1990 i 1992.

Prof. Zenon Mróz
Przewodniczący Komitetu Redakcyjnego
serii *Biblioteka Mechaniki Stosowanej*

Spis treści

§1 Uwagi wstępne	1
§2 Sprężyste stany własne	5
§3 Wzór strukturalny	11
§4 O matematycznej i fizycznej treści wzoru strukturalnego	21
§5 Reprezentacja prawa Hooke'a w postaci rozkładu ortogonalnego	25
§6 Energia sprężysta	29
§7 Niektóre materiałowe stałe i tensory sprężystości	31
§8 Nowe informacje o stałych sprężystości	35
§9 Sprężystość ciał ze sztywnymi więzami	41
§10 Pierwsze przykłady	43
§11 O klasyfikacji materiałów sprężystych	63
§12 Symetria i sprężyste stany własne	69
§13 Plastyczność i inne uogólnienia	75
§14 Uwagi końcowe	79
Dodatki	81
Literatura	89
Rozszerzony komentarz do polskiego przekładu	93

Glosa

Rozpatrzono prawo konstytutywne klasycznej teorii sprężystości – prawo Hooke’a. Wprowadzono pojęcie własnego stanu sprężystego cząstki. Na tej podstawie wyjaśniono strukturę tensora sztywności. Pokazano w szczególności, że układ 21 stałych, opisujący w sposób ciągły własności sprężyste, składa się w istocie z trzech odrębnych podukładów: 6 prawdziwych modułów sztywności, 12 dystrybutorów sztywności i 3 kątów. Pokazano też, że prawo Hooke’a dla dowolnego ciała anizotropowego można przedstawić w postaci sumy $\rho \leq 6$ praw prostej proporcjonalności.

Instytut Problemów Mechaniki Akademii Nauk ZSRR, 1983 r.

§1 Uwagi wstępne

W całej mechanice ośrodków ciągłych trudno jest wskazać prostszą, bardziej znaną i częściej stosowaną w praktyce inżynierskiej relację niż prawo Hooke'a. Pokażę, że nie osiągnięto granic jego zrozumienia i że również tutaj można napotkać na zielone pędy przyciągające świeżością i przynoszące użyteczne, przydatne owoce.

Prawo odkryte przez Roberta Hooke'a [1] zostało dopracowane przez największych matematyków, mechaników i fizyków. Z tego punktu widzenia, który jest przyjmowany w tej pracy, dwa okresy były szczególnie znaczące. Pierwszy dotyczy dzieł genialnej francuskiej szkoły z lat 20. ubiegłego wieku. Następnie A. Cauchy ukończył tworzenie koncepcji tensora naprężeń, co dało jemu, C. Navierowi i S.D. Poissonowi możliwość nadania prawu Hooke'a dla ciał izotropowych zasadniczo kompletnej, prawie współczesnej postaci [2].

To prawda, że spór w ich dyskusji na temat liczby stałych sprężystych został rozstrzygnięty stosunkowo niedawno [3]. Drugi okres obejmuje działalność F. Neumanna, jego ucznia W. Voigta i szkoły Voigta. Opracowali oni podstawy teorii anizotropowej sprężystości i podali opis własności sprężystych kryształów [4]. Wyniki tej szkoły nadal są podstawą odpowiednich rozdziałów w podręcznikach fizyki kryształów [5, 6] i stopniowo weszły do kanonu podstawowej literatury podręcznikowej na temat teorii sprężystości i mechaniki ośrodków ciągłych.

Badania F. Neumanna i W. Voigta były przeniknięte patosem uwzględnienia symetrii, która rządzi zjawiskami w kryształach. „Kryształ można porównać [...] z orkiestrą, prowadzoną przez dobrego dyrygenta. [...] Ta analogia artystycznie wyjaśnia, dlaczego w przypadku kryształów pojawiają się całe obszary zjawisk, całkowicie nieobecnych w przypadku innych ciał [...] Niektóre zjawiska, rozkwitają w nich z cudowną różnorodnością i wdziękiem, w innych ciałach można je wychwycić tylko pod postacią niewyraźnych i monottonnych wartości średnich [...]” – jak pisał W. Voigt [4].

We wszystkich naukach przyrodniczych obecność symetrii w obiekcie prowadzi do fundamentalnych wniosków. Ilość informacji wynikających z rozważenia

symetrii z reguły jest tym większa, im wyższa jest symetria. Ale ma to też pewną wadę: wraz ze spadkiem stopnia symetrii ilość tych informacji się zmniejsza, malejąc do zera, gdy żadnej nietrywialnej symetrii nie można zaobserwować. Niezwykle rozwinięta maszyna teorii grup, w szczególności teorii reprezentacji grup, wraz z brakiem symetrii utyka w martwym punkcie, a wraz z jej zniknięciem zaczyna buksować w miejscu – nie mając gdzie się zaczepić.

Tak się dzieje i w teorii własności sprężystych. Izotropia, izotropia poprzeczna, ortotropia i symetria kubiczna ilustrują efektywność istniejącego opisu własności sprężystych metodami symetrii. Jednocześnie ciała pozbawione trywialnych elementów symetrii istniejąca teoria pakuje do jednego woreczka z drętą etykietą „symetria trójskośna” [5–8]. Ich własności rozróżnia się tylko według niejasnych i monotonicznych zbiorów 21 różnych od zera składowych tensora sztywności w przypadkowo wybranej bazie. Piękne przykłady wyróżnienia w takich ciałach specjalnych baz materialnych [9, 10] tylko częściowo i nie we wszystkich przypadkach łagodzą sytuację. Bezradność teorii skazuje tutaj eksperymentatora na uciążliwe poszukiwania.

Warto podkreślić, że ciała wykazujące silnie anizotropowe własności sprężyste będą, w oczywisty sposób, pojawiać się w technice coraz częściej. Rzecz w tym, że symetria jest szybko tracona w miarę komplikacji struktury materiałów kompozytowych. Wystarczy na przykład uzbroić izotropową matrycę trzema różnymi i nieprostokadłymi wiązkami włókien, aby uczynić kompozyt całkowicie niesymetrycznym.

Na szczęście bez względu na to, jak ważna jest symetria, prawidłowości pojawiają się nie tylko na jej skutek. W tej pracy proponuję przyjrzeć się prawu Hooke’a poprzez koncepcję sprężystych stanów własnych ciała. Okazuje się, że nawet przy całkowitym braku symetrii w ciele sprężystym można wykryć zjawiska, które można wychwycić w postaci całkowicie klarownych i bynajmniej niemonotonicznych wielkości. W szczególności będzie pokazane na przykład, że wymieniony wcześniej zbiór 21 składowych tensora sztywności może być zastąpiony zbiorem 6 prawdziwych **modułów sztywności***, 12 **dystrybutorów sztywności** i 3 **kątów**, orientujących ciało w laboratorium.

Cechą charakterystyczną proponowanego podejścia jest to, że daje ono tym więcej informacji o własnościach sprężystych, im niższa jest symetria rozpatrywanego ciała.

W pracy rozpatrzono główną, całkiem prostą część teorii. Jedyne trudne pytanie można sformułować następująco: dlaczego tego nie zrobiono (jeśli nie zrobiono!) 80 lat temu?

*Pogrubione słowa są wyrażeniami kluczowymi w niniejszej pracy. Wszystkie przypisy gwiazdkowe pochodzą od tłumacza – przypis redakcji.

Notacja. Używamy bezindeksowego (absolutnego) zapisu tensorowego; w przeciwnym razie trudno byłoby w gąszczu indeksów spostrzec prostotę proponowanych pomysłów.

Wszystkie tensory występujące w tej pracy są euklidesowe, tj. są elementami przestrzeni tensorowych $T_p = E \otimes \dots \otimes E$ (p -krotnie) począwszy od „fizycznej” 3-wymiarowej wektorowej przestrzeni euklidesowej E .

Mamy zatem:

$p = 0$ – liczby	$a, \dots, \varepsilon, \dots, L, \dots$
$p = 1$ – wektory	$\mathbf{m}, \mathbf{n}, \dots$
$p = 2$ – tensory drugiego rzędu	$\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau}, \dots$
$p = 4$ – tensory czwartego rzędu	$\mathbf{C}, \mathbf{S}, \dots$

Tensory drugiego rzędu $\boldsymbol{\omega}, \dots$ są symetryczne, jeśli $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^T$, tj. są z podprzestrzeni tensorowej*

$$\mathcal{S} \equiv \text{sym } E \otimes E \subset T_2.$$

Tensory czwartego rzędu będą pochodzić tylko z podprzestrzeni tensorowej

$$\mathcal{T} \equiv \mathcal{S} \otimes \mathcal{S} \subset T_4.$$

Ortogonalne tensory drugiego rzędu będą oznaczane symbolem \mathbf{Q}, \dots

Własności tensorów euklidesowych opisano w dodatku A. Jednakże, dla zrozumienia istoty niniejszej pracy, nie jest konieczne zapoznanie się z treścią tego dodatku i znajomość bezindeksowego zapisu tensorowego. Wystarczy umiejętność przepisania dowolnego wzoru w zwykłym kartezjańskim zapisie indeksowym. Poniżej znajduje się niewymagające dodatkowych wyjaśnień zestawienie wszystkich równoważności, które są do tego celu konieczne i wystarczające**:

$\mathbf{n}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{C}$	\leftrightarrow	$n_i, \omega_{ij}, C_{ijkl}$
$\mathbf{1}$	\leftrightarrow	δ_{ij}
$\mathbf{n} \otimes \mathbf{m}, \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\omega}$	\leftrightarrow	$n_i m_j, n_i \omega_{jk}$
$\boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\tau}$	\leftrightarrow	$\omega_{ij} \tau_{kl}$
$\boldsymbol{\omega}^2, \boldsymbol{\omega}^3$	\leftrightarrow	$\omega_{ij} \omega_{jk}, \omega_{ij} \omega_{jk} \omega_{kl}$
$\boldsymbol{\omega} \mathbf{n}, \mathbf{n} \boldsymbol{\omega} \mathbf{m}$	\leftrightarrow	$\omega_{ij} n_j, \omega_{ij} n_i m_j$
$\ \boldsymbol{\omega}\ ^{***}$	\leftrightarrow	$(\omega_{ij} \omega_{ij})^{1/2}$
$\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\tau}$	\leftrightarrow	$\alpha_{ij} \tau_{jk}$

* Dla przejrzystości $E \otimes E = T_2^2$ i $\mathcal{S} \otimes \mathcal{S} = T_4^s$ – przypis tłumacza.

** Oznaczenia operacji tensorowych mają następujące znaczenie: „ \otimes ” to zwięźlenie po dwóch indeksach (tensory drugiego rzędu), „ \cdot ” to pełne nasunięcie (zwięźlenie po wszystkich powtarzających się indeksach), „ \circ ” to zwięźlenie po dwóch indeksach (tensory czwartego rzędu), „ \times ” to transformacja ortogonalna (obrót plus odbicie lustrzane), „ $\sigma \times$ ” oznacza permutację indeksów – przypis tłumacza.

*** $\|\boldsymbol{\omega}\| = (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})^{1/2}$ – przypis tłumacza.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} &\leftrightarrow \alpha_{ij} \beta_{ij} \\
\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} &\leftrightarrow C_{ijkl} \omega_{kl} \\
\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\beta} &\leftrightarrow C_{ijkl} \alpha_{ij} \beta_{kl} \\
\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &\leftrightarrow A_{ijkl} B_{ijkl} \\
\mathbf{C} \circ \mathbf{S} &\leftrightarrow C_{ijkl} S_{klpq} \\
\mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega} &\leftrightarrow Q_{ij} Q_{kl} \omega_{jl}^* \\
\mathbf{Q} * \mathbf{C} &\leftrightarrow Q_{ij} Q_{kl} Q_{pq} Q_{st} C_{jltq} \\
\|\mathbf{C}\| &\leftrightarrow (C_{ijkl} C_{ijkl})^{1/2}
\end{aligned}$$

Ważną rolę w naszych rozważaniach odgrywa dobrze znany tensor czwartego rzędu $\mathbf{I}^{(4s)}$ ** określony jednoznacznie następującym warunkiem:

$$\mathbf{I}^{(4s)} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \quad \text{dla dowolnego } \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{S}.$$

Będziemy go nazywać **jedynką**. Z tej definicji wynika, że

$$\mathbf{I}^{(4s)} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}).$$

Zauważamy również, że

$$\mathbf{Q} * \mathbf{I}^{(4s)} = \mathbf{I}^{(4s)} \quad \text{dla dowolnego } \mathbf{Q} \in \mathcal{O},$$

gdzie \mathcal{O} oznacza grupę ortogonalnych transformacji przestrzeni E , które dla zwięzłości będziemy nazywać obrotami***.

* $\mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{Q} \boldsymbol{\omega} \mathbf{Q}^T \leftrightarrow Q_{ij} Q_{kl} \omega_{jl}$ ($\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{1}$) – przypis tłumacza.

** Dla spójności i przejrzystości notacji w miejsce oryginalnego oznaczenia $\mathbb{1}$ tensora czwartego rzędu przyjęto oznaczenie $\mathbf{I}^{(4s)}$, który w zapisie indeksowym przyjmuje postać $I_{ijkl}^{(4s)}$ – przypis tłumacza.

*** $\mathcal{O} = \{\mathbf{Q} \in T_2 : \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{1}, \det \mathbf{Q} = \pm 1\}$ – grupa ortogonalna, $\mathcal{R} = \{\mathbf{Q} \in T_2 : \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{1}, \det \mathbf{Q} = +1\}$ – właściwa grupa ortogonalna – przypis tłumacza.

§2 Sprężyste stany własne

Tematem niniejszej pracy jest powszechnie znane prawo Hooke'a. Przyjmujemy, że:

- 1) naprężenie jest liniową funkcją odkształcenia,
- 2) deformacje są małe,
- 3) deformacja jest liczona od pewnego naturalnego, nienaprężonego stanu odniesienia,
- 4) tensor naprężenia jest symetryczny,
- 5) wpływ temperatury i innych pól jest pomijalny.

Przy tych założeniach Prawo Hooke'a przyjmuje postać

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (2.1)$$

Tensor \mathbf{C} będziemy nazywać **tensorem sztywności**. Ogólnie rzecz biorąc, prawo Hooke'a można zapisać w postaci odwrotnej

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}. \quad (2.2)$$

Tensor \mathbf{S} będziemy nazywali **tensorem podatności**. Tensory \mathbf{C} i \mathbf{S}^* są uważane za elementy 36-wymiarowej podprzestrzeni tensorowej $\mathcal{T} \subset T_4$ i są wzajemnie odwrotne w takim sensie¹, że

$$\mathbf{C} \circ \mathbf{S} = \mathbf{S} \circ \mathbf{C} = \mathbf{I}^{(4s)}. \quad (2.3)$$

¹Ścisłe mówiąc, w tym celu konieczne jest odniesienie naprężenia do arbitralnie ustalonego układu odniesienia; wtedy $\boldsymbol{\sigma}$ traci wymiar fizyczny. Czytelnik może założyć, że tak uczyniono, jeśli jest mu tak wygodnie.

*Tensory sztywności i podatności \mathbf{C} i \mathbf{S} oprócz tego, że posiadają symetrię $C_{ijkl} = C_{jikl}$ i $C_{ijkl} = C_{ijlk}$, wynikające z ich przynależności do przestrzeni T_4 , to dodatkowo mają symetrię $C_{ijkl} = C_{klij}$; por. także wzory (3.1) i (3.5) oraz towarzyszący tekst – przypis tłumacza.

(W dalszym ciągu nie będziemy już, z reguły, stosować zapisu indeksowego wzorów, odsyłając zainteresowanego zapisem indeksowym czytelnika do „słownika” podanego na stronach 3 i 4).

Zgodnie z ustaloną tradycją będziemy opisywać własności sprężyste tensorem sztywności \mathbf{C} .

Rozważmy \mathcal{O} -orbitę tensora \mathbf{C} w przestrzeni \mathcal{T} , tj. wszystkie tensory sztywności $\mathbf{Q} * \mathbf{C}$, jakie otrzymuje się z \mathbf{C} na skutek wszystkich obrotów $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}$. Będziemy ją oznaczać $\langle \mathbf{C} \rangle^*$. Gdy w mechanice używa się określenia „materiał sprężysty”, ma się na myśli (niejawnie) właśnie tę \mathcal{O} -orbitę. Będziemy \mathcal{O} -orbitę nazywać **materiałem sprężystym** $\langle \mathbf{C} \rangle$.

Niezmienniki określone na \mathcal{T} , tj. skalarne funkcje postaci $\pi : \mathcal{T} \rightarrow T$ spełniające warunek

$$\pi(\mathbf{Q} * \mathbf{C}) = \pi(\mathbf{C}) \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{C} \in \mathcal{T}, \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{O}, \quad (2.4)$$

są faktycznie zadane nie na tensorach sztywności, lecz na materiałach. Naturalnym jest nazywanie ich niezmiennikami materiałowymi, a ich wartości $\pi(\mathbf{C})$ **materiałowymi stałymi sprężystości**. (Składowe C_{ijkl} tensora sztywności \mathbf{C} w arbitralnie wybranej bazie **nie są** materiałowymi stałymi sprężystości; zostało to dawno dostrzeżone [27], ale z jakiegoś powodu milczy się o tym w podręcznikach). Funkcje izotropowe określone na \mathcal{T} , tj. funkcje postaci: $f : \mathcal{T} \rightarrow T$ (dowolnego rzędu p), spełniające warunek

$$f(\mathbf{Q} * \mathbf{C}) = \mathbf{Q} * f(\mathbf{C}) \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{C} \in \mathcal{T}, \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{O}, \quad (2.5)$$

w sposób naturalny nazywa się materiałowymi funkcjami tensorowymi, a ich wartości $f(\mathbf{C})$ **tensorami materiałowymi**.

Niech \mathcal{B} będzie ciałem stałym z punktami materiałowymi X, \dots Będziemy mówić, że ciało \mathcal{B} jest zbudowane z materiału sprężystego $\langle \mathbf{C} \rangle$, jeśli dla dowolnego punktu $X \in \mathcal{B}$ obowiązuje prawo Hooke’a z tensorem sztywności $\mathbf{C}(X)$, przy czym $\mathbf{C}(X) \in \langle \mathbf{C} \rangle$ dla dowolnego $X \in \mathcal{B}$. Ciało z materiału sprężystego $\langle \mathbf{C} \rangle$ będziemy nazywać jednorodnym, jeśli

$$\mathbf{C}(X) = \mathbf{C} = \text{const} \quad \text{dla wszystkich } X \in \mathcal{B}. \quad (2.6)$$

* „Dwa tensory leżą na jednej orbicie wtedy i tylko wtedy, gdy nieuporządkowane układy ich wartości głównych są jednakowe”. J. Rychlewski, *Symetria przyczyn i skutków*, PWN, Warszawa, 1991, s. 33 – przypis tłumacza.

(Mówiąc potocznie, to oznacza, że wszystkie cząstki mają nie tylko identyczne własności sprężyste, lecz są też jednakowo zorientowane). Jednorodnie ciało sprężyste można po prostu utożsamić z tensorem sztywności. I w tym właśnie sensie dalej będziemy mówić, używając wyrażenia: jednorodnie ciało sprężyste **C** lub, krótko, **ciało sprężyste C**.

Przejdziemy teraz od tych nudnych, aczkolwiek obowiązkowych definicji, do istoty sprawy tego opracowania.

Weźmy dowolne ciało sprężyste **C**. W ogólnym przypadku tensory naprężenia σ i odkształcenia ϵ , związane prawem Hooke'a (2.1) i (2.2), są nie tylko nieproporcjonalne, tj. $\sigma \neq \lambda \epsilon$ dla dowolnego λ , lecz także i nie są współosiowe*. Ciało izotropowe nie stanowi tu wyjątku. Jednakże

może się zdarzyć, że odkształcenie ϵ i naprężenia σ są tak dobrane dla danego ciała sprężystego **C**, że ϵ i σ są ściśle proporcjonalne, tj.

$$\sigma = \lambda \epsilon \quad \sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{ij} \quad (2.7)$$

dla jakiejś stałej λ .

Będzie tak oczywiście dla $\epsilon = \omega$, gdzie λ i ω są zdefiniowane warunkiem

$$\boxed{\mathbf{C} \cdot \omega = \lambda \omega} . \quad (2.8)$$

Nasuujące się tutaj pojęcia – wartość własna i element własny – zaszyfrujemy (lub, jeśli czytelnik zechce, rozszyfrujemy), używając terminologii mechanicznej i wyrazimy z należytą starannością.

Definicja 0. Parametr λ będziemy nazywać modulem sztywności ciała sprężystego **C**, jeśli istnieje symetryczny tensor drugiego rzędu ω spełniający warunek (2.8). Sam tensor ω będziemy nazywać **sprężystym stanem własnym** ciała **C**, odpowiadającym modułowi sztywności λ .

Sprężysty stan własny ω można w razie potrzeby interpretować albo jako stan odkształcenia, albo jako stan naprężenia (patrz przypis 1 na s. 5).

*Dwa tensory **A** i **B** $\in \mathcal{S}$, nazywamy **zgodnymi**, jeżeli ich *kierunki główne* pokrywają się, tj. $\mathbf{A} = A_1 \mu_I \otimes \mu_I + A_2 \mu_{II} \otimes \mu_{II} + A_3 \mu_{III} \otimes \mu_{III}$, $\mathbf{B} = B_1 \mu_I \otimes \mu_I + B_2 \mu_{II} \otimes \mu_{II} + B_3 \mu_{III} \otimes \mu_{III}$. Niektóre z A_k mogą być sobie równe, i analogicznie niektóre z B_k ($\mu_k \cdot \mu_l = \delta_{kl}$). Dwa tensory **A**, **B** $\in \mathcal{S}$, nazywamy **współosiowymi**, gdy podprzestrzenie własne tych tensorów pokrywają się, tj. są one zgodne, a gdy wartości własne są wielokrotne, to jeśli np. $A_1 = A_2$, to musi być $B_1 = B_2$, por także s. 68 w [P10] – przypis tłumacza.

Najprostszy sprężysty stan własny pokazano na rys. 1, gdzie \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} będziemy traktować jako trójkę ortonormalną włókien materialnych ciała. **Odształcenie czystego ścinania**

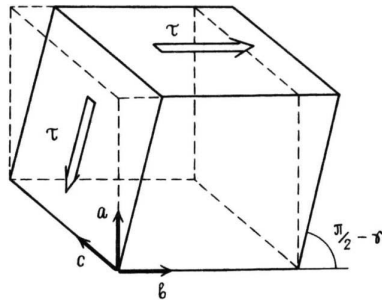
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\gamma(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) \sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\gamma & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

przy którym długość włókien \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} nie zmienia się (w ramach teorii małych odkształceń!) i pary włókien (\mathbf{a}, \mathbf{c}) , (\mathbf{b}, \mathbf{c}) pozostają prostopadłe, odpowiada tutaj **naprężeniu czystego ścinania**

$$\boldsymbol{\sigma} = \tau(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) \sim \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

przy czym modułem sztywności jest moduł postaciowy $\lambda = G(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G(\mathbf{a}, \mathbf{b})\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \tau = G\gamma.$$



Rys. 1. Czyste ścinanie. Najprostszy sprężysty stan własny.*

W przypadku ciała izotropowego będzie tak dla dowolnej pary włókien ortogonalnych \mathbf{a} , \mathbf{b} . W §10 pokażemy, że ta własność definiuje ciało izotropowe. Istnieją jednak ciała, dla których nie znajdzie się ani jednej pary włókien ortogonalnych \mathbf{a} , \mathbf{b} , mających pokazaną własność na rys. 1.

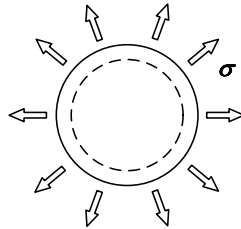
Drugim najprostszym sprężystym stanem własnym jest $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{1}$ (rys. 2). **Czysto objętościowemu stanowi odkształcenia**

*Podpisy pod rysunkami zostały dodane przez tłumacza – przypis redakcji.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3}\varepsilon\mathbf{1} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\varepsilon \end{pmatrix}$$

odpowiada tutaj **stan hydrostatycznego naprężenia**

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma\mathbf{1} \sim \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$



Rys. 2. Odkształcenie czysto objętościowe (sferyczne).
Drugi najprostszyszy sprężysty stan własny.

Modułem sztywności będzie moduł sztywności objętościowej K

$$\sigma = 3K \varepsilon, \quad \sigma = K \varepsilon.$$

Tak będzie w przypadku ciała izotropowego, ale istnieje wiele ciał, które takiej własności nie mają. Kula z takiego materiału pod wpływem działania ciśnienia hydrostatycznego ulega deformacji w elipsoide.

Dowodziemy bezzwłocznie twierdzenia ustanawiającego fizyczną treść wprowadzonych pojęć.

Twierdzenie 1. Jeżeli tensor $\boldsymbol{\omega}$ jest sprężystym stanem własnym ciała \mathbf{C} odpowiadającym modułowi sztywności λ , to dla dowolnego obrotu \mathbf{Q} tensor $\mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega}$ jest sprężystym stanem własnym ciała $\mathbf{Q} * \mathbf{C} \in \langle \mathbf{C} \rangle$ odpowiadającym **temu samemu** modułowi sztywności λ .

Dowód. Jeśli $\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{\omega}$, to

$$(\mathbf{Q} * \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega}) \equiv \mathbf{Q} * (\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \lambda \mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega}. \quad \blacklozenge \quad (2.9)$$

Stąd najważniejszy wniosek:

moduły sztywności i niezmienniki stanów własnych sprężystości są takie same dla dowolnych dwóch ciał z tego samego materiału.

Proponowany sposób opisu własności sprężystych opiera się na następującym przekonaniu:

stany własne sprężystości i moduły sztywności zawierają wszystkie informacje o makrostrukturze ciała, które są niezbędne do opisu jego sprężystego zachowania.

Zostanie to udowodnione w następnym paragrafie.

Uwaga 1. Przedstawiony tutaj pomysł i pierwsze wyniki były prezentowane w trakcie wykładów z mechaniki ośrodków ciągłych, które wygłaszałem od późnych lat 60. XX w. w wielu ośrodkach naukowych w Polsce i w Związku Radzieckim. Jeśli chodzi o moje działania w sprawach dalekich od mechaniki, to nie spełniłem ani wtedy, ani później danej moim słuchaczom obietnicy wydrukowania pracy, z wyjątkiem bardzo zwięzłego omówienia istoty sprawy w moim odręcznym skrypcie [11], s. 54 (patrz dodatek B). Jak uprzejmie poinformował mnie A. Blinowski, w ostatnim czasie ten pomysł wielokrotnie pojawiał się w [12] dla jednego konkretnego przypadku, z powołaniem się na autora skryptu [11].

§3 Wzór strukturalny

Będziemy rozpatrywać tylko takie ciała sprężyste, dla których istnieje **potencjał sprężysty**

$$2\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) \equiv \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi. \quad (3.2)$$

Cała niniejsza praca opiera się na tej przyjemnej okoliczności, że forma biliniowa

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} \equiv \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{I}^{(4s)} \cdot \boldsymbol{\beta} \equiv \text{tr}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}) \quad (3.3)$$

okazuje się poprawnie zdefiniowanym **iloczynem skalarnym** w \mathcal{S} , przy czym jest ona zgodna ze strukturą produktu tensorowego $\mathcal{S} = E \otimes E$. Przestrzeń \mathcal{S} z tym iloczynem skalarnym, nie przestając być produktem tensorowym, jest także 6-wymiarową abstrakcyjną przestrzenią euklidesową (patrz dodatek A).

Tensory $\mathbf{C} \in \mathcal{T}$ będziemy rozpatrywać jako liniowe operatory $l : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ przekształcające \mathcal{S} w siebie:

$$l(\boldsymbol{\omega}) \equiv \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad \text{dla dowolnego } \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{S}. \quad (3.4)$$

Istnienie potencjału sprężystego (3.1) jest równoważne z następującym warunkiem:

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad \text{dla dowolnych } \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{S}, \quad (3.5)$$

tj. $\boldsymbol{\alpha} \cdot l(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta} \cdot l(\boldsymbol{\alpha})$. Takie liniowe transformacje przestrzeni euklidesowych są nazywane symetrycznymi. Więc:

tensor sztywności \mathbf{C} można uważać za symetryczny operator liniowy, który przekształca 6-wymiarową euklidesową przestrzeń symetrycznych tensorów drugiego rzędu \mathcal{S} na siebie.

W dalszym ciągu, dla zwięzłości, nie będziemy odróżniać tensora od realizowanej przez niego zgodnie ze wzorem (3.4) transformacji liniowej.

Ukazane, całkowicie naturalne spojrzenie na tensory sztywności zawiera rdzeń całej pracy. Dalszy ciąg to tylko kwestia techniki, przy czym jest ona dobrze znana. Rzeczywiście, działanie operatorów symetrycznych w przestrzeniach euklidesowych zostało opisane przez matematyków już dawno i wyczerpująco (patrz na przykład [13–15]). Nam przyjdzie tylko przetłumaczyć w niezwykle zwężonej formie dostępne informacje na język tensorów euklidesowych.

Każdy operator liniowy działający w przestrzeni skończonej wymiarowej jest jednoznacznie określony jego wartościami na elementach arbitralnie ustalonej bazy. Przyjmiemy dla wygody ortonormalną bazę \mathcal{S}

$$\boldsymbol{\omega}_I, \dots, \boldsymbol{\omega}_{VI} \quad \boldsymbol{\omega}_K \cdot \boldsymbol{\omega}_L = \delta_{KL} \equiv \begin{cases} 0 & K \neq L, \\ 1 & K = L, \end{cases} \quad (3.6)$$

gdzie $K, L = I, \dots, VI$. (W dalszym ciągu będziemy oznaczać bazy w \mathcal{S} dużymi łańskimi indeksami; **nie zakłada się** sumowania po powtarzających się indeksach oznaczonych dużymi łańskimi indeksami). Zapisując dowolny tensor $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{S}$ w tej bazie, mamy

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_I \boldsymbol{\omega}_I + \dots + \alpha_{VI} \boldsymbol{\omega}_{VI}, \quad \alpha_K \equiv \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\omega}_K. \quad (3.7)$$

Teraz

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\alpha} &= \alpha_I \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}_I + \dots + \alpha_{VI} \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}_{VI} \\ &= [(\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}_I) \otimes \boldsymbol{\omega}_I + \dots + (\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}_{VI}) \otimes \boldsymbol{\omega}_{VI}] \cdot \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (3.8)$$

dla dowolnego $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{S}$. To implikuje **fundamentalną tożsamość**: dla dowolnego tensora $\mathbf{C} \in \mathcal{T}$ i dla dowolnej bazy ortonormalnej $\boldsymbol{\omega}_K$, $K = I, \dots, VI$

$$\mathbf{C} = (\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}_I) \otimes \boldsymbol{\omega}_I + \dots + (\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}_{VI}) \otimes \boldsymbol{\omega}_{VI}. \quad (3.9)$$

To jest szczególny przypadek wzoru (A.20), por. dodatek A.

Uwaga 2. Ze względu na znaczenie wydedukowanej tożsamości podamy ją w kartezjańskim zapisie indeksowym, bez użycia terminologii geometrycznej. Twierdzimy, że dla dowolnego tensora C_{ijkl} z wewnętrzną symetrią

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (3.10)$$

i dowolnej szóstki symetrycznych tensorów

$$\omega_{I ij}, \dots, \omega_{VI ij}, \quad \omega_{K ij} = \omega_{K ji} \quad (3.11)$$

spełniających warunki

$$\omega_{K ij} \omega_{L ij} = \delta_{KL}, \quad K, L = I, \dots, VI, \quad (3.12)$$

prawdziwa jest tożsamość:

$$C_{ijkl} = C_{ijpq}\omega_{I pq}\omega_{I kl} + \dots + C_{ijpq}\omega_{VI pq}\omega_{VI kl} \quad (3.13)$$

lub, równoważnie, że dla dowolnej szóstki (3.11) i (3.12) jest spełniona tożsamość

$$\omega_{I ij}\omega_{I kl} + \dots + \omega_{VI ij}\omega_{VI kl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj}).^* \quad \blacklozenge \quad (3.14)$$

Tożsamość (3.9) jest równoważna następującemu stwierdzeniu: dla dowolnej ortonormalnej bazy (3.6)

$$\mathbf{I}^{(4s)} = \boldsymbol{\omega}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_I + \dots + \boldsymbol{\omega}_{VI} \otimes \boldsymbol{\omega}_{VI}. \quad (3.15)$$

Rzeczywiście z (3.9) wynika (3.15) zgodnie z samą definicją $\mathbf{I}^{(4s)}$. I odwrotnie, z (3.15) wynika (3.9), ponieważ $\mathbf{C} \circ \mathbf{I}^{(4s)} = \mathbf{C}$ dla dowolnego $\mathbf{C} \in \mathcal{T}$.

Główną rolę w teorii symetrycznych odwzorowań przestrzeni euklidesowych odgrywają **projektor**y. Znajdziemy ich obraz tensorowy. Rozważmy podprzestrzeń $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ i jej ortogonalne dopełnienie \mathcal{P}^\perp . Wzór

$$\mathcal{S} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^\perp \quad (3.16)$$

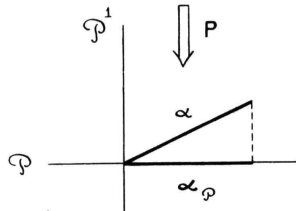
oznacza, że dla każdego tensora $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}$ istnieją dokładnie dwa tensory $\boldsymbol{\alpha}_\mathcal{P}$ i $\boldsymbol{\alpha}_\mathcal{P}^\perp$, takie że

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_\mathcal{P} + \boldsymbol{\alpha}_\mathcal{P}^\perp, \quad \boldsymbol{\alpha}_\mathcal{P} \cdot \boldsymbol{\alpha}_\mathcal{P}^\perp = 0, \quad \boldsymbol{\alpha}_\mathcal{P} \in \mathcal{P}. \quad (3.17)$$

Tensor $\boldsymbol{\alpha}_\mathcal{P}$ nazwiemy, jak zwykle, **ortogonalną projekcją $\boldsymbol{\alpha}$ na podprzestrzeń \mathcal{P}** . Rozważymy tensor $\mathbf{P} \in \mathcal{T}$ jednoznacznie zdefiniowany wzorem

$$\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_\mathcal{P} \quad \text{dla dowolnego } \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{S}. \quad (3.18)$$

Tensor ten będziemy nazywać **projektorem ortogonalnym na podprzestrzeń \mathcal{P}** (rys. 3). Łatwo jest otrzymać jawną postać \mathbf{P} .



Rys. 3. Projektcja na podprzestrzeń \mathcal{P} za pomocą projektora ortogonalnego \mathbf{P} .

* $\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj}) = \mathbf{I}^{(4s)}$ – przypis tłumacza.

Niech $L \equiv \dim \mathcal{P} \leq 6$. Weźmy ortonormalną bazę $\boldsymbol{\omega}_I, \dots, \boldsymbol{\omega}_{VI}$, tak aby L tensorów

$$\boldsymbol{\omega}_{K+I}, \boldsymbol{\omega}_{K+II}, \dots, \boldsymbol{\omega}_{K+L} \quad (3.19)$$

znajdowało się w \mathcal{P} . Wtedy $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\omega}_{K+I} = \boldsymbol{\omega}_{K+I}, \dots, \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\omega}_{K+L} = \boldsymbol{\omega}_{K+L}$ i jednocześnie $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\omega}_T = 0$ dla dowolnego $\boldsymbol{\omega}_T \notin \mathcal{P}$. Zgodnie z tożsamością (3.9) otrzymamy

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\omega}_{K+I} \otimes \boldsymbol{\omega}_{K+I} + \dots + \boldsymbol{\omega}_{K+L} \otimes \boldsymbol{\omega}_{K+L}. \quad (3.20)$$

W samym \mathcal{P} projektor działa jak operator jednostkowy: $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$ dla wszystkich $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}$. W związku z tym

$$\overset{s}{\mathbf{P}} \equiv \mathbf{P} \circ \dots \circ \mathbf{P} = \mathbf{P} \quad \text{dla dowolnego } s \geq 1. \quad (3.21)$$

Wymiar \mathcal{P} jest równy liczbie składników w reprezentacji (3.20)

$$\dim \mathcal{P} = P_{ijij}. \quad (3.22)$$

Dwa ortogonalne projektory: \mathbf{P}_1 na \mathcal{P}_1 i \mathbf{P}_2 na \mathcal{P}_2 nazwiemy **wzajemnie ortogonalnymi**, jeśli podprzestrzenie $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ są ortogonalne, $\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2$. Oczywiście jest to równoważne z równością

$$\mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_1 = \mathbf{0}. \quad (3.23)$$

System parami wzajemnie ortogonalnych projektorów $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_\rho$, nazywany jest **rozkładem jedyнки**, jeśli

$$\mathbf{I}^{(4s)} = \mathbf{P}_1 + \dots + \mathbf{P}_\rho. \quad (3.24)$$

Dowolny rozkład jedyнки można uzyskać wybierając odpowiednią bazę według wzoru (3.15) i odpowiednio grupując wyrażenia składowe. Rozkład jedyнки (3.24) odpowiada rozkładowi przestrzeni na sumę prostą parami wzajemnie ortogonalnych podprzestrzeni:

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_\rho, \quad (3.25)$$

gdzie $\mathcal{P}_\alpha \equiv \text{Im } \mathbf{P}_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, \rho$.

I na odwrót, rozkład (3.25), gdzie $\mathcal{P}_\alpha \perp \mathcal{P}_\beta$ dla $\alpha \neq \beta$, stanowi rozkład jedyнки (3.24), gdzie \mathbf{P}_α to ortogonalny projektor na \mathcal{P}_α .

Teraz jesteśmy w stanie przedstawić główne twierdzenie – **twierdzenie spektralne** – teorii symetrycznych odwzorowań przestrzeni euklidesowych, w naszym przypadku. (Tutaj i w dalszej części będziemy używać dla członów rozkładu (3.24), (3.25) i wszystkich im odpowiadających elementów rozkładu greckich indeksów; **nie zakłada się sumowania** po powtarzających się indeksach).

Twierdzenie 2. Dla dowolnego ciała sprężystego \mathbf{C} istnieje dokładnie jeden rozkład ortogonalny przestrzeni tensorów symetrycznych drugiego rzędu

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_\rho, \quad \mathcal{P}_\alpha \perp \mathcal{P}_\beta, \quad \alpha \neq \beta, \quad \rho \leq 6, \quad (3.26)$$

i dokładnie jeden zbiór parami różnych parametrów

$$\lambda_1, \dots, \lambda_\rho, \quad \lambda_\alpha \neq \lambda_\beta \quad \text{dla} \quad \alpha \neq \beta,$$

taki że

$$\mathbf{C} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \dots + \lambda_\rho \mathbf{P}_\rho, \tag{3.27}$$

gdzie \mathbf{P}_v są ortogonalnymi projektorami na \mathcal{P}_v .

Dowód. Można znaleźć w nieco innej terminologii na przykład w [13, 14, 16]. ♦
 Składniki \mathcal{P}_α sumy prostej (3.26), które dalej grają główną rolę, mają całkowicie jasną interpretację fizyczną:

podprzestrzeń \mathcal{P}_α składa się ze wszystkich sprężystych stanów własnych o module sztywności λ_α , $\alpha = 1, \dots, \rho$.

Rzeczywiście, dla dowolnego $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}_\alpha$ mamy

$$\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} = (\lambda_1 \mathbf{P}_1 + \dots + \lambda_\rho \mathbf{P}_\rho) \cdot \boldsymbol{\omega} = \lambda_\alpha \boldsymbol{\omega}. \tag{3.28}$$

Projektory \mathbf{P}_α we wzorze (3.27) będziemy nazywać **projektorami materiałowymi** podprzestrzeni \mathcal{P}_α – **materiałowymi podprzestrzzeniami**, a rozkłady (3.26) i (3.27) **materiałowymi rozkładami** odpowiadającymi ciału \mathbf{C} .

Po napisaniu układu równań:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{(4s)} &= \mathbf{P}_1 + \dots + \mathbf{P}_\rho, \\ \mathbf{C} &= \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \dots + \lambda_\rho \mathbf{P}_\rho, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{C}^{(\rho-1)} &= \lambda_1^{\rho-1} \mathbf{P}_1 + \dots + \lambda_\rho^{\rho-1} \mathbf{P}_\rho \end{aligned} \tag{3.29}$$

za pomocą wyznacznika Vandermonde’a:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_\rho \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{\rho-1} & \dots & \lambda_\rho^{\rho-1} \end{vmatrix} = \prod_{\rho \geq \alpha > \beta \geq 1} (\lambda_\alpha - \lambda_\beta) \tag{3.30}$$

otrzymamy jawne wyrażenia [13]

$$\mathbf{P}_\alpha = \frac{(\mathbf{C} - \lambda_1 \mathbf{I}^{(4s)}) \circ \dots \circ (\mathbf{C} - \lambda_{\alpha-1} \mathbf{I}^{(4s)}) \circ (\mathbf{C} - \lambda_{\alpha+1} \mathbf{I}^{(4s)}) \circ \dots \circ (\mathbf{C} - \lambda_\rho \mathbf{I}^{(4s)})}{(\lambda_\alpha - \lambda_1) \dots (\lambda_\alpha - \lambda_{\alpha-1})(\lambda_\alpha - \lambda_{\alpha+1}) \dots (\lambda_\alpha - \lambda_\rho)}. \tag{3.31}$$

Zwróćmy także uwagę na wzory

$$\lambda_\alpha = \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}_\alpha. \quad (3.32)$$

Moduły sztywności λ_α są, jak zwykle, pierwiastkami równania charakterystycznego, które tutaj przyjmuje postać

$$\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}^{(4s)}) = \lambda^6 + a_1(\mathbf{C}) \lambda^5 + \dots + a_5(\mathbf{C}) \lambda + a_6(\mathbf{C}) = 0, \quad (3.33)$$

gdzie

$$\det(\mathbf{A}) \equiv \det(A_{KL}), \quad (3.34)$$

przy czym

$$A_{KL} \equiv \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_L = A_{LK} \quad (3.35)$$

jest macierzą (6×6) związaną z tensorem \mathbf{A} i dowolnie ustaloną bazą ortonormalną $\mathbf{v}_I, \dots, \mathbf{v}_{VI}$ w \mathcal{S} . Wybór tej bazy nie wpływa na współczynniki a_i .

Liczba

$$q_\alpha \equiv \dim \mathcal{P}_\alpha^* = P_{(\alpha)ijij} \quad (3.36)$$

to krotność λ_α jako pierwiastka równania (3.33).

Przyjeliśmy twierdzenie spektralne w najsilniejszy możliwy sposób, być może trochę niezwykły. Można podać inne równoważne sformułowania. Biorąc pod uwagę fakt, że twierdzenie to odgrywa, naszym zdaniem, centralną rolę w opisie własności ciał sprężystych, podajemy jeszcze trzy **stwierdzenia równoważne twierdzeniu 2**:

- 1) Dla dowolnego ciała sprężystego \mathbf{C} istnieje, co najmniej jedna baza ortonormalna w \mathcal{S} ,

$$\boldsymbol{\omega}_I, \dots, \boldsymbol{\omega}_{VI}, \quad \boldsymbol{\omega}_K \cdot \boldsymbol{\omega}_L = \delta_{KL} \quad (3.37)$$

składająca się ze sprężystych stanów własnych,

$$\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}_K = \lambda_K \boldsymbol{\omega}_K. \quad (3.38)$$

- 2) Dla dowolnego ciała sprężystego \mathbf{C} istnieje co najmniej jedna baza ortonormalna (3.37) i sześć parametrów $\lambda_I, \dots, \lambda_{VI}$, takich że

$$\boxed{\mathbf{C} = \lambda_I \boldsymbol{\omega}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_I + \dots + \lambda_{VI} \boldsymbol{\omega}_{VI} \otimes \boldsymbol{\omega}_{VI}}. \quad (3.39)$$

- 3) Dla dowolnego ciała sprężystego \mathbf{C} istnieje co najmniej jedna baza ortonormalna (3.37), taka że macierz

$$C_{KL} \equiv \boldsymbol{\omega}_K \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}_L \quad (3.40)$$

jest diagonalna.

* $\dim \mathcal{P}_\alpha = \text{tr}(\mathbf{P}_{(\alpha)}) \equiv \mathbf{P}_{(\alpha)} \cdot \mathbf{I}^{(4s)}$ – przypis tłumacza.

Rozważymy macierz (3.40). Jeśli ω_K , $K = I, \dots, VI$ jest bazą w \mathcal{S} , to przez samą definicję iloczynu skalarnego przestrzeni liniowych 36 tensorów

$$\omega_K \otimes \omega_L, \quad K, L = I, \dots, VI \quad (3.41)$$

jest bazą $\mathcal{T} \equiv \mathcal{S} \otimes \mathcal{S}$. Macierz (3.40) jest macierzą składowych \mathbf{C} w tej bazie, tj. spełniona jest tożsamość

$$\mathbf{C} = \sum_{K,L=I}^{VI} C_{KL} \omega_K \otimes \omega_L. \quad (3.42)$$

To jest szczególny przypadek wzoru (A.14), por. dodatek A [s. 84].

Przydatne jest prześledzenie **ekwiwalentności wzorów (3.27) i (3.39)**. Wzór (3.39) wynika z (3.27) z uwagi na (3.20). I odwrotnie, jeśli w (3.39) uwzględni się **wszystkie** pokrywające się λ_K , to na podstawie (3.20) dochodzimy do (3.27) przy jednoznaczności wszystkich składników sumy. Zauważymy, że jeśli wszystkie λ_K są parami różne (tj. pierwiastki (3.33) są jednokrotne), to (3.39) jest po prostu wzorem (3.27) z

$$\mathbf{P}_1 = \omega_I \otimes \omega_I, \dots, \mathbf{P}_6 = \omega_{VI} \otimes \omega_{VI}. \quad (3.43)$$

Wzór (3.39) jest bardzo szczególnym przypadkiem wzoru (B.1).

Wzór (3.27) (lub (3.39)) będziemy nazywali **podstawowym wzorem strukturalnym ciała sprężystego**. Dowolny ortonormalny zbiór stanów własnych ω_K , $K = I, \dots, VI$ tensora \mathbf{C} będziemy nazywać jego **tensorową bazą materiałową**.

Wybieramy jakąś kolejność składników w (3.27), na przykład: składnik $\lambda_\alpha \mathbf{P}_\alpha$ jest zapisywany przed składnikiem $\lambda_\beta \mathbf{P}_\beta$ (nie sumować!), jeśli $q_\alpha < q_\beta$, a przy $q_\alpha = q_\beta$, jeśli $\lambda_\alpha > \lambda_\beta$. Wtedy wszystkie λ_α i \mathbf{P}_α (jak również, oczywiście, zbiór komponentów ρ) są wartościami pewnych funkcji na \mathcal{T} od argumentu \mathbf{C} . To będziemy mieli na myśli przy formułowaniu następnego twierdzenia.

Twierdzenie 3. Parametry $\lambda_1, \dots, \lambda_\rho$ odpowiadające ciału sprężystemu \mathbf{C} zgodnie ze wzorem strukturalnym (3.27) są **materiałowymi stałymi sprężystymi**, a materiałowe projektory $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_\rho$ są **materiałowymi tensorami**, odpowiadającymi \mathbf{C} .

Dowód. Niezmienniczość modułów sztywności

$$\lambda_\alpha(\mathbf{Q} * \mathbf{C}) = \lambda_\alpha(\mathbf{C}), \quad \alpha = 1, \dots, \rho, \quad (3.44)$$

wynika z twierdzenia 1. Izotropia \mathbf{P}_α

$$\mathbf{P}_\alpha(\mathbf{Q} * \mathbf{C}) = \mathbf{Q} * \mathbf{P}_\alpha(\mathbf{C}) \quad (3.45)$$

wynika natychmiast z jawnych wzorów (3.31). \blacklozenge

Przestrzenie stanów własnych dla ciała $\mathbf{Q} * \mathbf{C}$ będą, zgodnie z twierdzeniem 1, obrazami przestrzeni stanów własnych ciała \mathbf{C} , przy obrocie \mathbf{Q} .

Na zakończenie wprowadzimy jeszcze jedno użyteczne pojęcie. Materiałowemu rozkładowi przestrzeni \mathcal{S} (3.26) odpowiada rozłożenie liczby $6 \equiv \dim \mathcal{S}$ na dodatnie składowe całkowite q_1, \dots, q_ρ (3.36) (lub, jeśli Państwo sobie życzą, schemat Younga [17]).

Będziemy ten rozkład zapisywać w postaci

$$\langle q_1 + \dots + q_\rho \rangle, \quad q_1 \leq \dots \leq q_\rho, \quad (3.46)$$

i nazywać **pierwszym wskaźnikiem strukturalnym** rozpatrywanego ciała \mathbf{C} . Pierwszy wskaźnik strukturalny jest oczywiście taki sam dla ciał z tego samego materiału, tj. jest charakterystyką materiału.

Uwaga 3. Zwrócimy uwagę, że w rzeczywistości $\lambda_\alpha(\mathbf{C})$, $\mathbf{P}_\alpha(\mathbf{C})$ są nawet „bardziej niezmiennicze niż potrzeba”².

Rzeczywiście, rozważymy grupę \mathcal{A} składającą się ze wszystkich liniowych transformacji \mathcal{S} na siebie, zachowującą iloczyn skalarny, tj. grupę automorfizmów \mathcal{S} jako 6-wymiarową przestrzeń euklidesową [18]. Definiująca własność przekształcenia z \mathcal{A} jest następująca: obrazem dowolnej ortonormalnej bazy $\boldsymbol{\omega}_I, \dots, \boldsymbol{\omega}_{VI}$ jest inna ortonormalna baza, powiedzmy $\mathbf{v}_I, \dots, \mathbf{v}_{VI}$. Identyfikując, jak zwykle, zgodnie ze wzorem (3.4) transformacje z \mathcal{A} z tensorami $\mathbf{K} \in \mathcal{T}$, otrzymujemy zgodnie z (3.9)

$$\mathbf{K} = \mathbf{v}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_I + \dots + \mathbf{v}_{VI} \otimes \boldsymbol{\omega}_{VI}. \quad (3.47)$$

Jest to ogólne wyrażenie automorfizmu \mathcal{S} jako 6-wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Grupa obrotów \mathcal{O} podstawowej przestrzeni E , działająca w \mathcal{S} jest 3-parametrową podgrupą w 15-parametrowej grupie \mathcal{A} . Obrotowi $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}$ odpowiada tensor

$$\mathbf{K}(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_I + \dots + \mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega}_{VI} \otimes \boldsymbol{\omega}_{VI}. \quad (3.48)$$

²Tak jak mówimy, $\text{tr}(\boldsymbol{\omega})$ „jest bardziej niezmienniczy niż potrzeba”; ponieważ jest niezmienniczy względem całej liniowej grupy przekształceń \mathcal{S} , a nie tylko względem jej ortogonalnej części.

Przeniesiemy działanie \mathcal{A} z \mathcal{S} do kwadratu tensorowego $\mathcal{T} \equiv \mathcal{S} \otimes \mathcal{S}$ tak jak zwykle, tj.

$$\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{K} \circ \mathbf{C} \circ \mathbf{K}^{-1}, \quad (3.49)$$

gdzie

$$\mathbf{K}^{-1} \equiv (\mathbf{v}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_I + \dots)^{-1} \equiv (\boldsymbol{\omega}_I \otimes \mathbf{v}_I + \dots). \quad (3.50)$$

Łatwo wykazać, że twierdzenie 3 można uogólnić w następujący sposób: dla dowolnego $\mathbf{K} \in \mathcal{A}$

$$\lambda_\alpha(\mathbf{K} \circ \mathbf{C} \circ \mathbf{K}^{-1}) = \lambda_\alpha(\mathbf{C}), \quad (3.51)$$

$$\mathbf{P}_\alpha(\mathbf{K} \circ \mathbf{C} \circ \mathbf{K}^{-1}) = \mathbf{K} \circ \mathbf{P}_\alpha(\mathbf{C}) \circ \mathbf{K}^{-1}. \quad (3.52)$$

Ta niezmienniczość wydaje się mieć mniejsze znaczenie, ponieważ, najogólniej rzecz ujmując, **ciało $\mathbf{K} \circ \mathbf{C} \circ \mathbf{K}^{-1}$ jest zbudowane z innego materiału niż ciało \mathbf{C} .**

§4 O matematycznej i fizycznej treści wzoru strukturalnego

Przy omawianiu wzoru strukturalnego w wysoko wykwalifikowanych zespołach pojawiły się następujące wątpliwości o nietrywialnym charakterze.

4.1. Czy wzór strukturalny nie jest wynikiem informacji *a priori* wprowadzonej do opisu prawa Hooke'a z teorii transformacji n -wymiarowych przestrzeni euklidesowych?

Nie, nie jest. Działania:

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \rightarrow \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}, \quad (\alpha_{ij}, \beta_{kl}) \rightarrow \alpha_{ij}\beta_{ij}, \quad (4.1)$$

$$\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\alpha}, \quad \alpha_{ij} \rightarrow C_{ijkl}\alpha_{kl}, \quad (4.2)$$

są operacjami tensorowymi. Jednocześnie, dzięki szczęśliwemu zbiegowi okoliczności, operacja (4.1) jest poprawną definicją iloczynu skalarnego, a operacja (4.2) jest liniowym odwzorowaniem \mathcal{S} w siebie. **Nie wykorzystaliśmy żadnych innych założeń ani jawnych, ani ukrytych.** Przestrzeń liniowa \mathcal{S} z działaniem (4.1), zgodnym ze strukturą tensorową w \mathcal{S} , **jest** (nie jest zaś **sztucznie zastępowana!**) 6-wymiarową przestrzenią euklidesową. Wszystkie wnioski wynikające z tego faktu są prawdziwe, ale z pewnością nie są **całą prawdą** o \mathcal{S} , ponieważ \mathcal{S} jest **nie tylko** 6-wymiarową przestrzenią euklidesową. (Tych, którzy nie lubią języka współczesnej algebry, odsyłamy do dodatku C [s. 87], gdzie wyprowadzenie wzoru strukturalnego jest nakreślone drogą pełnej „arytmetyzacji” rozpatrywanych struktur).

Tym samym odpowiedź na pytanie o matematyczny status wzoru strukturalnego została wyczerpana.

4.2. Cała konstrukcja jest oparta na definicji iloczynu skalarnego (4.1). Iloczyn skalarny można wprowadzić do przestrzeni liniowej na nieskończenie wiele sposobów. Czy to pozbawia wzór strukturalny treści fizycznej?

To nie jest tak, ale – żeby wyjaśnić tę okoliczność – trzeba będzie się trochę potrudzić. Sprecyzujemy problem.

Rozważmy dowolny iloczyn skalarny w \mathcal{S} , tj. formę biliniową

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \rightarrow \boldsymbol{\alpha} \odot \boldsymbol{\beta} \quad (4.3)$$

symetryczną ($\boldsymbol{\alpha} \odot \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \odot \boldsymbol{\alpha}$), dodatnio określoną ($\boldsymbol{\alpha} \odot \boldsymbol{\alpha} > 0$ dla $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$).*

Potrzebujemy, aby były dla niej spełnione dwa warunki:

- 1) niezmienniczość względem grupy obrotów \mathcal{O} generującej przestrzeni E

$$(\mathbf{Q} * \boldsymbol{\alpha}) \odot (\mathbf{Q} * \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha} \odot \boldsymbol{\beta} \quad (4.4)$$

dla wszystkich $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{S}$ i dla dowolnego $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}$ (jest to wymóg zgodności formy (4.3) ze strukturą tensorową, już dostępną w \mathcal{S});

- 2) symetria dowolnego tensora sztywności \mathbf{C} , spełniającego warunek istnienia potencjału sprężystego (3.1), w odniesieniu do (4.3):

$$\boldsymbol{\alpha} \odot (\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta} \odot (\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \quad (4.5)$$

dla wszystkich $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{S}$.

Teraz problem można sformułować następująco: czy oprócz (4.1) istnieją inne iloczyny skalarny (4.3) spełniające wymogi (4.4) i (4.5)? **Odpowiedź jest twierdząca, ale banalna.** Zaczniemy od lematu, mającego samoistną wartość.

Lemat 1. Dowolny iloczyn skalarny w przestrzeni symetrycznych tensorów drugiego rzędu $\mathcal{S} \equiv \text{sym } E \otimes E$ niezmienniczy względem grupy obrotów \mathcal{O} pierwotnej 3-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E ma postać

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} \odot \boldsymbol{\beta} &= k_1 \text{tr}(\boldsymbol{\alpha}) \text{tr}(\boldsymbol{\beta}) + k_2 \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} \\ &= k_1 \alpha_{ii} \beta_{jj} + k_2 \alpha_{ij} \beta_{ij}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

gdzie

$$3k_1 + k_2 \geq 0, \quad k_2 \geq 0. \quad (4.7)$$

*Użyte w oryginalnym tekście niniejszego wywodu oznaczenie dowolnego iloczynu skalarnego „ \times ” zostało zastąpione w tłumaczeniu oznaczeniem „ \odot ”, tak by działanie to nie było mylone z iloczynem wektorowym, dla którego powszechnie jest używane oznaczenie „ \times ” – uwaga tłumacza.

Dowód. Dostateczność jest oczywista: (4.6) jest formą biliniową, symetryczną i dodatnio określoną. Rozpatrzmy konieczność. Ponieważ reprezentacja (4.6) musi być inwariantna, istnieje zatem taka funkcja rzeczywista f dziewięciu zmiennych, że

$$\begin{aligned} \alpha \odot \beta = f(\operatorname{tr}(\alpha), \operatorname{tr}(\beta), \operatorname{tr}(\alpha\beta), \\ \operatorname{tr}(\alpha^2), \operatorname{tr}(\beta^2), \operatorname{tr}(\alpha^2\beta), \\ \operatorname{tr}(\alpha\beta^2), \operatorname{tr}(\alpha^3), \operatorname{tr}(\beta^3)), \end{aligned} \quad (4.8)$$

gdzie w nawiasach jest wypisany dobrze znany funkcjonalnie kompletny zbiór niezmienników na $\mathcal{S} \odot \mathcal{S}$. Nakładając na f warunki biliniowości, symetrii i dodatniości, otrzymujemy (4.6) i (4.7) $\operatorname{tr}(\alpha\beta) \equiv \alpha \cdot \beta$. \blacklozenge

Teraz możemy udzielić odpowiedzi.

Twierdzenie 4. Tensor sztywności \mathbf{C} jest symetryczny względem niezmienniczego iloczynu skalarnego (4.6) wtedy i tylko wtedy, gdy $k_1 = 0$, tj.

$$\alpha \odot \beta = k(\alpha \cdot \beta), \quad k > 0. \quad (4.9)$$

Dowód. Dostateczność jest oczywista. Rozpatrzmy konieczność. Niech (4.5) będzie spełnione dla (4.6). Weźmiemy $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ niezerowe i ortogonalne w starym znaczeniu

$$\alpha \cdot \beta = 0, \quad \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0. \quad (4.10)$$

Zgodnie ze wzorem strukturalnym (jest on udowodniony dla (4.1); wątpliwość tkwi tylko w jego fizycznej jednoznaczności!) oczywiście istnieje taki tensor sprężystości, dla którego $\mathbf{P}_1 = \alpha \otimes \alpha$, $\mathbf{P}_2 = \beta \otimes \beta$, tj.

$$\mathbf{C} \cdot \alpha = \lambda \alpha, \quad \mathbf{C} \cdot \beta = \mu \beta, \quad \lambda \neq \mu. \quad (4.11)$$

Teraz

$$\mu(\alpha \odot \beta) = \alpha \odot (\mathbf{C} \cdot \beta) = \beta \odot (\mathbf{C} \cdot \alpha) = \lambda(\alpha \cdot \beta), \quad (4.12)$$

skąd

$$\alpha \odot \beta = 0. \quad (4.13)$$

Wobec tego każda para α, β , ortonormalna w starym znaczeniu (4.1), powinna być ortonormalna i w nowym sensie (4.3). Biorąc pod uwagę (4.6), otrzymujemy $k_1 = 0$. \blacklozenge

Iloczyn skalarny, dla którego można wykonać konstrukcję wzoru strukturalnego, jest zatem określony tak, jak można było się spodziewać, z dokładnością

do dodatniego mnożnika. W naszym przypadku wynik ten oznacza, co następuje:

Wzór strukturalny (3.27) jest zdefiniowany dla dowolnego ciała z dokładnością do wyboru układu jednostek wymiarowych dla naprężenia.

To wyczerpuje odpowiedź na pytanie o fizyczną treść proponowanego sposobu opisu ciał sprężystych.

§5 Reprezentacja prawa Hooke'a w postaci rozkładu ortogonalnego

Weźmiemy ciało sprężyste \mathbf{C} . Jego wzór strukturalny pozwala przekształcić dowolny tensor $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}$ w następujący sposób. Wprowadzimy projekcje ortogonalne $\boldsymbol{\tau}$ na materiałowe podprzestrzenie \mathcal{P}_α ciała \mathbf{C}

$$\boldsymbol{\tau}_\alpha \equiv \mathbf{P}_\alpha \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \alpha = 1, \dots, \rho. \quad (5.1)$$

Przypomnimy, że

$$\mathbf{P}_\beta \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha = 0, \quad \text{dla dowolnego } \alpha \neq \beta, \quad (5.2)$$

lub równoważnie

$$\boldsymbol{\tau}_\alpha \cdot \boldsymbol{\tau}_\beta = 0, \quad \text{dla dowolnego } \alpha \neq \beta. \quad (5.3)$$

Normy projekcji będziemy oznaczać następująco:

$$\tau_\alpha \equiv |\boldsymbol{\tau}_\alpha| = (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{P}_\alpha \cdot \boldsymbol{\tau}). \quad (5.4)$$

Tensor $\boldsymbol{\tau}$ można zapisać jednoznacznie jako sumę jego projekcji na podprzestrzenie materiałne

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 + \dots + \boldsymbol{\tau}_\rho. \quad (5.5)$$

Szczególnym przypadkiem tej reprezentacji jest przedstawienie tensora w postaci sumy części kulistej i dewiatorowej, por. (10.7).

Użyjemy reprezentacji (5.5) do tensora naprężenia i tensora odkształcenia

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \dots + \boldsymbol{\sigma}_\rho, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \dots + \boldsymbol{\varepsilon}_\rho. \quad (5.6)$$

Podstawiając to do (2.1), otrzymamy ogólną postać prawa Hooke'a dla dowolnego ciała sprężystego

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\sigma}_\rho = \lambda_\rho \boldsymbol{\varepsilon}_\rho}. \quad (5.7)$$

Ta nowa postać prawa Hooke'a jest uogólnieniem podręcznikowej formy prawa Hooke'a dla ciała izotropowego przedstawianego w postaci dwóch równości tensorowych: prawa proporcjonalności części sferycznych i prawa proporcjonalności części dewiatorowych tensorów $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ (10.9).

Każde z $\rho \leq 6$ równań tensorowych (5.7) jest liniowo niezależne od pozostałych. Równanie z numerem α odpowiada ρ_α równaniom skalarnym.

Z (5.7) wynika, w szczególności, proporcjonalność norm

$$\sigma_\alpha = \lambda_\alpha \varepsilon_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \rho. \quad (5.8)$$

Jeśli użyje się pewnej tensorowej bazy materiałowej $\boldsymbol{\omega}_K$ (dla $\rho = 6$ zdefiniowanej z dokładnością do znaków), to zachodzi

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_I \boldsymbol{\omega}_I + \dots + \sigma_{VI} \boldsymbol{\omega}_{VI}, \quad \sigma_K \equiv \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}_K, \quad (5.9)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_I \boldsymbol{\omega}_I + \dots + \varepsilon_{VI} \boldsymbol{\omega}_{VI}, \quad \varepsilon_K \equiv \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\omega}_K, \quad (5.10)$$

i prawo Hooke'a sprowadza się do sześciu równań skalarnych

$$\boxed{\sigma_I = \lambda_I \varepsilon_I, \dots, \sigma_{VI} = \lambda_{VI} \varepsilon_{VI}}. \quad (5.11)$$

Prawo Hooke'a w postaci (5.7), a tym bardziej w postaci (5.11), prawie bezpośrednio odzwierciedla sformułowanie samego autora anagramu *ut tensio sic vis* [1, 2], który znajduje się w tytule niniejszej pracy. Można przyjąć, że Robert Hooke byłby zadowolony.

Rozważymy odwrotność prawa Hooke'a (2.2). Można wprowadzić stany własne $\boldsymbol{\tau}$ tensora podatności \mathbf{S} i **moduły podatności** μ zgodnie ze wzorem

$$\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mu \boldsymbol{\tau}. \quad (5.12)$$

Jednak jest to niepotrzebne, jak wskazuje proste twierdzenie:

Twierdzenie 5. Stany własne tensora podatności pokrywają się z odpowiednimi sprężystymi stanami własnymi, a moduły podatności są odwrotnościami modułów sztywności.

Dowód. Jeśli $\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{\omega}$, to

$$\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\lambda} \mathbf{I}^{(4s)} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\omega}. \quad \blacklozenge \quad (5.13)$$

Dlatego natychmiast otrzymujemy odwrotność $\mathbf{C}(X)$

$$\boxed{\mathbf{S} = \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{P}_1 + \dots + \frac{1}{\lambda_\rho} \mathbf{P}_\rho}. \quad (5.14)$$

Tutaj $\lambda_1, \dots, \lambda_\rho$ to moduły sztywności, a $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_\rho$ to projektory materiałowe, o których mowa w twierdzeniu 2. Jeśli zastosujemy tensorową materiałową bazę $\boldsymbol{\omega}_K$, to

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\lambda_I} \boldsymbol{\omega}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_I + \dots + \frac{1}{\lambda_{VI}} \boldsymbol{\omega}_{VI} \otimes \boldsymbol{\omega}_{VI}. \quad (5.15)$$

Odwrotność prawa Hooke'a możemy od razu uzyskać z (5.7)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha} \boldsymbol{\sigma}_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \rho. \quad (5.16)$$

§6 Energia sprężysta

Podstawiając materiałowy rozkład (5.6) i (5.7) do wyrażenia (3.1), otrzymujemy następujące wyrażenia energii sprężystej dla dowolnego ciała:

$$2\Phi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \quad (6.1)$$

$$= \lambda_1 \varepsilon_1^2 + \dots + \lambda_\rho \varepsilon_\rho^2 = \quad (6.2)$$

$$= \frac{1}{\lambda_1} \sigma_1^2 + \dots + \frac{1}{\lambda_\rho} \sigma_\rho^2, \quad (6.3)$$

gdzie

$$\varepsilon_\alpha \equiv (\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha)^{1/2}, \quad \sigma_\alpha \equiv (\boldsymbol{\sigma}_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma}_\alpha)^{1/2}. \quad (6.4)$$

Stąd wynika następujące fundamentalne twierdzenie:

Twierdzenie 6. Energia sprężysta jest dodatnia dla dowolnego tensora odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\boxed{\lambda_I > 0, \dots, \lambda_\rho > 0}. \quad (6.5)$$

Zwracamy uwagę na ekstremalną prostotę znalezionych nowych **warunków dodatniej określoności energii sprężystej**. Przydatne jest porównanie ρ nierówności (6.5) ze znanymi warunkami Sylwestera nałożonymi na składowe C_{ijkl} (patrz, np. [10]).

Jeśli przyjmiemy jakąś tensorową materiałową bazę $\boldsymbol{\omega}_I, \dots, \boldsymbol{\omega}_{VI}$, to:

$$2\Phi = \lambda_I \varepsilon_I^2 + \dots + \lambda_{VI} \varepsilon_{VI}^2 = \quad (6.6)$$

$$= \frac{1}{\lambda_I} \sigma_I^2 + \dots + \frac{1}{\lambda_{VI}} \sigma_{VI}^2, \quad (6.7)$$

gdzie

$$\varepsilon_K \equiv \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\omega}_K, \quad \sigma_K \equiv \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}_K, \quad (6.8)$$

$$\lambda_K > 0, \quad K = \text{I}, \dots, \text{VI}. \quad (6.9)$$

Ta reprezentacja energii sprężystej umożliwia następującą interpretację geometryczną:

powierzchnie stałej wartości energii

$$\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \text{const} \quad (6.10)$$

są 6-wymiarowymi elipsoidami w przestrzeni tensorów symetrycznych \mathcal{S} , przy czym osie elipsoid mają kierunki sprężystych stanów własnych rozważanego ciała \mathbf{C} , a długości półosi są równe odpowiednim modułom sztywności.

Przy pokrywaniu się wartości $\lambda_K = \lambda_L$ elipsoidy zyskują odpowiednią symetrię, a gdy $\lambda_{\text{I}} = \dots = \lambda_{\text{VI}} = \lambda$ (patrz (10.1)), stają się one kulami.

§7 Niektóre materiałowe stałe i tensory sprężystości

Wprowadzimy dla ciała sprężystego \mathbf{C} dwie ortonormalne diady materiałowe

$$\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0, \quad (7.1)$$

tj. dwa ortogonalne kierunki materiału (dwa ortogonalne włókna). Rozważymy dobrze znane stałe materiałowe ciała sprężystego (patrz na przykład [5])

moduł objętościowego ściskania K^*

$$\frac{1}{K} \equiv \mathbf{1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1}, \quad (7.2)$$

moduł Younga $E(\mathbf{n})$ na kierunku $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$:

$$\frac{1}{E(\mathbf{n})} \equiv (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{S} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \quad (7.3)$$

współczynnik Poissona $\nu(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ w kierunku $\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$ przy rozciąganiu w kierunku $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$:

$$\frac{\nu(\mathbf{m}, \mathbf{n})}{E(\mathbf{n})} \equiv -(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) \cdot \mathbf{S} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \quad (7.4)$$

*Należy zachować ostrożność. Skalar określony wzorem (7.2) nazywany jest współcześnie **współczynnikiem (modułem) ściśliwości** (*compressibility factor*) i oznaczany literą $\beta \equiv \mathbf{1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1}$. Natomiast w literaturze przedmiotu najczęściej spotykany jest obecnie **współczynnik (moduł) sprężystości objętościowej** (*bulk modulus*) określony wzorem $K \equiv \frac{1}{3} \mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{1}$. W ogólnym przypadku dla sprężystych materiałów *anizotropowych* wartości tych modułów *nie stanowią* wzajemnej odwrotności. Wartości tych współczynników są wzajemnie odwrotne dla tzw. materiałów *objętościowo-izotropowych*, tj. takich, dla których tensor $\mathbf{1}$ jest stanem własnym. W szczególności dla materiałów *izotropowych* jest $K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = 1/\beta$ – przypis tłumacza.

i **moduł sztywności postaciowej** $G(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ przy odkształceniu postaciowym $(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) + (\mathbf{n} \otimes \mathbf{m})$:

$$\frac{1}{4G(\mathbf{m}, \mathbf{n})} \equiv (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{S} \cdot (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}). \quad (7.5)$$

Korzystając ze wzoru strukturalnego (3.39), otrzymujemy następujące eleganckie wyrażenia:

$$\frac{1}{K} = \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_I)^2}{\lambda_I} + \dots + \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_{VI})^2}{\lambda_{VI}}, \quad (7.6)$$

$$\frac{1}{E(\mathbf{n})} = \frac{(\mathbf{n}\boldsymbol{\omega}_I\mathbf{n})^2}{\lambda_I} + \dots + \frac{(\mathbf{n}\boldsymbol{\omega}_{VI}\mathbf{n})^2}{\lambda_{VI}}, \quad (7.7)$$

$$-\frac{\nu(\mathbf{m}, \mathbf{n})}{E(\mathbf{n})} = \frac{(\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}_I\mathbf{m})(\mathbf{n}\boldsymbol{\omega}_I\mathbf{n})}{\lambda_I} + \dots + \frac{(\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}_{VI}\mathbf{m})(\mathbf{n}\boldsymbol{\omega}_{VI}\mathbf{n})}{\lambda_{VI}}, \quad (7.8)$$

$$\frac{1}{4G(\mathbf{m}, \mathbf{n})} = \frac{(\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}_I\mathbf{n})^2}{\lambda_I} + \dots + \frac{(\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}_{VI}\mathbf{n})^2}{\lambda_{VI}}. \quad (7.9)$$

Tutaj

$$\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_K) \equiv \omega_{Kii}, \quad (7.10)$$

$$\mathbf{n}\boldsymbol{\omega}_K\mathbf{n} \equiv \omega_{Kij}n_in_j, \quad (7.11)$$

$$2\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}_K\mathbf{n} \equiv 2\omega_{Kij}m_in_j. \quad (7.12)$$

Jest to nic innego jak **względna zmiana objętości, względne wydłużenie włókna** $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ i kąt ścinania włókien $\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$, $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ odpowiadający odkształceniu $\boldsymbol{\omega}_K$, $K = I, \dots, VI$.

Gdy moduły sztywności mają tę samą wartość $\lambda_K = \lambda_L$, sumy odpowiadających im wyrażeń odpowiadają członom $\lambda_\alpha \mathbf{P}_\alpha$ w najogólniejszym wzorze strukturalnym (3.27).

Otrzymane wzory dobrze zgadzają się z intuicyjnym rozumieniem sprężystego stanu własnego $\boldsymbol{\omega}_K$:

- 1) nie ma on wkładu do modułu objętościowego ciała K , jeśli odpowiadające mu odkształcenie objętościowe $\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_K)$ jest równe zeru;
- 2) nie ma on wkładu do modułu Younga $E(\mathbf{n})$, jeśli odpowiadające mu wydłużenie $\mathbf{n}\boldsymbol{\omega}_K\mathbf{n}$ wynosi zero;

- 3) nie ma on wkładu do odpowiedniego współczynnika Poissona $\nu(\mathbf{m}, \mathbf{n})/E(\mathbf{n})$, jeśli jedno z wydłużeń $\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}_K\mathbf{m}$, $\mathbf{n}\boldsymbol{\omega}_K\mathbf{n}$ jest równe zero;
- 4) nie ma on wkładu do modułu postaciowego $G(\mathbf{m}, \mathbf{n})$, jeśli odpowiadający mu kąt ścinania $\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}_K\mathbf{n}$ wynosi zero.

Otrzymane wzory znacznie ułatwiają zrozumienie i, najwyraźniej, pomogą w wyznaczaniu wprowadzonych modułów sztywności i sprężystych stanów własnych dla różnych ciał sprężystych, zwłaszcza kompozytów. Moim zdaniem cała gra „była warta świeczki”, choćby ze względu na uzyskanie tych wzorów.

Aby wymienić najbardziej podstawowe, wstępne praktyczne informacje o ciałach sprężystych, warto dysponować narzędziami pozwalającymi po prostu, na ile to możliwe, porównywać te ciała pod względem sztywności i anizotropii.

Jako użyteczne miary ogólnej sztywności ciała mogą być zaproponowane, na przykład:

- 1) norma \mathbf{C} jako operator liniowy (patrz na przykład [15])

$$l(\mathbf{C}) \equiv \sup_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{K}} |\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\alpha}|, \quad (7.13)$$

gdzie $|\boldsymbol{\tau}| \equiv (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})^{1/2}$, a \mathcal{K} to sfera jednostkowa w \mathcal{S} ;

- 2) wielkość proporcjonalna do normy \mathbf{C} jako tensora czwartego rzędu

$$m(\mathbf{C}) \equiv \frac{1}{\sqrt{6}} \|\mathbf{C}\|; \quad (7.14)$$

- 3) niezmiennik liniowy

$$n(\mathbf{C}) \equiv \frac{1}{6} \text{tr}(\mathbf{v}) = \frac{1}{6} C_{ikik}, \quad (7.15)$$

gdzie tensor \mathbf{v} jest zdefiniowany wzorem (7.21).

Stosując wzór strukturalny (3.39), otrzymujemy natychmiast:

$$l(\mathbf{C}) = \max(\lambda_I, \dots, \lambda_{VI}), \quad (7.16)$$

$$m(\mathbf{C}) = \left[\frac{1}{6} (\lambda_I^2 + \dots + \lambda_{VI}^2) \right]^{1/2}, \quad (7.17)$$

$$n(\mathbf{C}) = \frac{1}{6} (\lambda_I + \dots + \lambda_{VI}), \quad (7.18)$$

gdzie $l(\mathbf{C})$ to maksymalny, $m(\mathbf{C})$ to średniokwadratowy, a $n(\mathbf{C})$ to średni arytmetyczny moduł sztywności.

Jako użyteczną **miarę anizotropii** ciała \mathbf{C} można zaproponować „względną, średnią, kwadratową anizotropię sprężystą”, wprowadzoną w [10], lub następującą bardziej precyzyjną miarę:

$$\delta(\mathbf{C}) \equiv \frac{d(\langle \mathbf{C} \rangle)}{m(\mathbf{C})}, \quad (7.19)$$

gdzie

$$d(\langle \mathbf{C} \rangle) \equiv \sup_{\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \langle \mathbf{C} \rangle} \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| = \max_{\mathbf{Q} \in \mathcal{O}} \|\mathbf{C} - \mathbf{Q} * \mathbf{C}\|, \quad (7.20)$$

to średnica $\langle \mathbf{C} \rangle$. (Ten problem ekstremalny został rozpatrzony w [19]).

Nowożyłow [9] zwrócił uwagę na dwa niezwykle tensory $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$ o składowych*

$$\mu_{ij} \equiv C_{ijkl}, \quad \nu_{ij} \equiv C_{ikkj} = C_{ikjk}. \quad (7.21)$$

Są to liniowe funkcje izotropowe \mathbf{C} , tj. **tensory materiałowe** ciała. Każdy materiałowy symetryczny tensor drugiego rzędu, liniowo zależny od \mathbf{C} , będzie miał postać $a\boldsymbol{\mu} + b\boldsymbol{\nu}$.

Tensor $\boldsymbol{\mu}$ opisuje reakcję ciała na deformację sferyczną: jeśli $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1}$, to $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{1} = \boldsymbol{\mu}$ [9]. Można go wyrazić następująco

$$\boldsymbol{\mu} = \lambda_I \text{tr}(\boldsymbol{\omega}_I) \boldsymbol{\omega}_I + \dots + \lambda_{VI} \text{tr}(\boldsymbol{\omega}_{VI}) \boldsymbol{\omega}_{VI}. \quad (7.22)$$

Wkład do $\boldsymbol{\mu}$ dają tylko niedewiatorowe sprężyste stany własne.

Tensor $\boldsymbol{\nu}$ odgrywa rolę w dynamice fal sprężystych. Można go wyrazić następująco

$$\boldsymbol{\nu} = \lambda_I \boldsymbol{\omega}_I^2 + \dots + \lambda_{VI} \boldsymbol{\omega}_{VI}^2. \quad (7.23)$$

Uwaga 4. Ze wzorów (3.22) i (3.23) natychmiast wynika, że zaproponowany w [9] interesujący wybór tak zwanych głównych osi anizotropii nie jest uniwersalny. Łatwo jest wskazać wiele przykładów, gdy ciało jest całkowicie anizotropowe, a jednocześnie tensory $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$ albo mają wspólną oś symetrii, albo w ogóle są tensorami sferycznymi.

Teoria propagacji fal sprężystych jest oparta na tak zwanym **tensorze Christoffela** $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{n})$ o składowych $\chi_{il} = C_{ijkl}n_jn_k^{**}$, gdzie \mathbf{n} oznacza falowy wektor normalny (fazowy). Zgodnie ze wzorem strukturalnym (3.39)

$$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{n}) = \lambda_I \boldsymbol{\omega}_I \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\omega}_I \mathbf{n} + \dots + \lambda_{VI} \boldsymbol{\omega}_{VI} \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\omega}_{VI} \mathbf{n}. \quad (7.24)$$

Ten wzór ma wiele konsekwencji, nad którymi nie będziemy się tutaj zatrzymywać. Zwrócimy tylko uwagę, że dodatnia określoność $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{n})$ jest natychmiast widoczna.

* $\boldsymbol{\mu} \equiv \mathbf{C} \cdot \mathbf{1} \Rightarrow \text{tr}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{1}$, $\boldsymbol{\nu} \equiv ((2, 3) \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{1} \Rightarrow \text{tr}(\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{1} = \text{tr}(\mathbf{C})$ – przypis tłumacza.

** $\boldsymbol{\chi} \equiv \mathbf{n} \mathbf{C} \mathbf{n}$ – przypis tłumacza.

§8 Nowe informacje o stałych sprężystości

Na podstawie wzoru strukturalnego przeanalizujemy kwestię określenia zbioru niezależnych parametrów skalarnych, które w sposób ciągły opisują różnorodność ciał sprężystych.

Zgodnie z (3.39) problem sprowadza się do określenia zbioru niezależnych parametrów, które w sposób ciągły opisują różnorodność tensorowych reperów materiałowych. Weźmy reper $\boldsymbol{\omega}_K$, $\boldsymbol{\omega}_K \cdot \boldsymbol{\omega}_L = \delta_{KL}$, $K, L = \text{I}, \dots, \text{VI}$. Każdy z tensorów $\boldsymbol{\omega}_K$ będziemy opisywać trzema liniowo niezależnymi niezmiennikami, na przykład śladami tensorów $\boldsymbol{\omega}_K$, $\boldsymbol{\omega}_K \boldsymbol{\omega}_K$, $\boldsymbol{\omega}_K \boldsymbol{\omega}_K \boldsymbol{\omega}_K$ i trzema parametrami, ustalającymi kierunek osi głównych $\boldsymbol{\omega}_K$ w laboratoryjnym układzie współrzędnych, na przykład kątami Eulera θ_K , φ_K , ψ_K . W ten sposób każdy tensor $\boldsymbol{\omega}_K$ zastępujemy szóstką parametrów, na przykład:

$$\begin{aligned} & \text{tr}(\boldsymbol{\omega}_K), \quad \text{tr}(\boldsymbol{\omega}_K^2), \quad \text{tr}(\boldsymbol{\omega}_K^3), \quad \theta_K, \quad \varphi_K, \quad \psi_K, \\ & K = \text{I}, \dots, \text{VI}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Otrzymanych 36 parametrów jest związanych 21 warunkami ortonormalności; sześć z nich to warunki normalizacji $|\boldsymbol{\omega}_K|^2 \equiv \text{tr}(\boldsymbol{\omega}_K^2) = 1$. Pozostałych 30 parametrów, na przykład:

$$\text{tr}(\boldsymbol{\omega}_K), \quad \text{tr}(\boldsymbol{\omega}_K^3), \quad \theta_K, \quad \varphi_K, \quad \psi_K, \quad (8.2)$$

jest związanych 15 warunkami ortogonalności

$$\boldsymbol{\omega}_K \cdot \boldsymbol{\omega}_L = 0 \quad \text{dla} \quad K \neq L. \quad (8.3)$$

Uporządkujmy parametry w następujący sposób. Jako parametry **liniowo niezależne** wybierzmy na przykład 3 parametry ustalające osie pierwszego tensora w laboratoryjnym układzie współrzędnych:

$$\theta \equiv \theta_{\text{I}}, \quad \varphi \equiv \varphi_{\text{I}}, \quad \psi \equiv \psi_{\text{I}}, \quad (8.4)$$

i na przykład 12 liniowo niezależnych niezmienników tensorów*

$$\begin{aligned}\chi_1 &\equiv \text{tr}(\boldsymbol{\omega}_I), \dots, \chi_6 \equiv \text{tr}(\boldsymbol{\omega}_{VI}), \\ \chi_7 &\equiv \text{tr}(\boldsymbol{\omega}_I^3), \dots, \chi_{12} \equiv \text{tr}(\boldsymbol{\omega}_{VI}^3).\end{aligned}\tag{8.5}$$

Pozostałe 15 niezmienniczych parametrów, na przykład:

$$\theta_K, \varphi_K, \psi_K, \quad K = \text{II}, \dots, \text{VI},\tag{8.6}$$

wyrazimy z 15 warunków (8.3) za pomocą 15 liniowo niezależnych wielkości θ , φ , ψ , χ_1, \dots, χ_{12} .

Wobec tego liczba parametrów we wzorze strukturalnym (3.39), w ogólnym przypadku, jest równa $6 + 12 + 3 = 21$. Odpowiada to liczbie niezerowych składowych podawanej w podręcznikach,

$$C_{ijkl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3,$$

tensora sztywności \mathbf{C} w laboratoryjnym układzie współrzędnych. Tak też powinno być, ponieważ oba zbiory parametrów opisują w sposób ciągły różnorodność tensorów sztywności.

Uwaga 5. Czytelnik z nastawieniem analitycznym będzie domagał się wyjaśnień i będzie miał rację. Oto najważniejsze z nich. Słowa „w ogólnym przypadku” należy rozumieć następująco: rozważane jest otoczenie $\|\mathbf{C} - \mathbf{C}^0\| < \varepsilon$ pewnego tenora \mathbf{C}^0 , w którym λ_K^0 są parami różne i wszystkie ω_K^0 mają parami różne wartości własne.

Teraz, stosując **twierdzenie o funkcji niejawnej** (zob. na przykład [20]), trzeba pokazać, że warunki (8.3) rzeczywiście definiują w sąsiedztwie pewne odwzorowanie 15 parametrów (8.4) i (8.5) w 15 parametrów (8.6). Tę żmudną procedurę można najwyraźniej pominąć, pozostając w ramach rozsądnego zwyczaju pracy nad mechaniką. Ponadto nasze rozważania sugerują, że zbiór $\boldsymbol{\omega}_K$ jest dobrze zdefiniowany, tj. znane są znaki $\boldsymbol{\omega}_K$ i porządek $\boldsymbol{\omega}_I, \dots, \boldsymbol{\omega}_{VI}$.

*Poprawiono występujący w oryginale błąd literowy $\chi_7 \equiv \text{tr}(\boldsymbol{\omega}_I^2), \dots, \chi_{12} \equiv \text{tr}(\boldsymbol{\omega}_{VI}^2)$. Warto zwrócić uwagę, że zaproponowany tutaj przez Jana Rychlewskiego zestaw niezmienników charakteryzujących tensor Hooke’a stanowi prosty przykład ilustracyjny. Ogólnie rzecz biorąc, można skonstruować nieskończenie wiele niezmienników tensora Hooke’a, ale maksimum 18 spośród nich może być wzajemnie liniowo niezależnych. Dobór zbioru liniowo niezależnych niezmienników tensora, właściwego dla danego problemu modelowego, stanowi bardziej akt sztuki, niż jest działaniem rutynowym. Patrz np. praca A. Ziółkowskiego [P14], gdzie został szeroko omówiony dobór optymalnego zestawu (trzech) niezmienników dla symetrycznego tensora drugiego rzędu interpretowanego, jako naprężenie Cauchy’ego – przypis tłumacza.

Łatwo jest pokazać, że w otoczeniu \mathbf{C}^0 jest to wykonalne. I wreszcie, w otoczeniu \mathbf{C}^0 można uzgodnić wybór znaków wektorów własnych dla każdego $\boldsymbol{\omega}_K$. Tym samym dobrze zdefiniowane są wielkości $\theta_K, \varphi_K, \psi_K$. \blacklozenge

Uwaga 6. Przy zadaniach obliczenia liczby parametrów definiujących pewną różnorodność ciał badacz często nie docenia następujących kwestii. Bez narzucenia na parametry pewnych wymagań (ciągłości, charakteru algebraicznego itp.) samo sformułowanie problemu o liczbie parametrów jest bezsensowne.

Rzeczywiście, już Georg Kantor pokazał, że n -wymiarowa przestrzeń R^n w sposób jednoznaczny odwzorowuje się na proste R i skonstruował konkretną technikę takiego odwzorowania. Bezsensowne jest na przykład pytanie o to, jak wiele liniowo niezależnych niezmienników definiuje symetryczny tensor drugiego rzędu z dokładnością do obrotu – zawsze można skonstruować **jeden** taki niezmiennik. Już na etapie formułowania problemu potrzebujemy **ciągłości** odwzorowania $R^n \rightarrow \mathcal{T}$, rozumianego w sensie normy $\|\mathbf{C}\|$ w przestrzeni \mathcal{T} . Pominęliśmy tutaj i pomijamy dalej związane z tym szczegóły techniczne. \blacklozenge

Oto kolejne obliczenie liczby parametrów we wzorze strukturalnym (3.39), w sposób ciągle opisujących różnorodność ciał sprężystych:

$$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 21.$$

Rzeczywiście w ogólnym przypadku liczba modułów sztywności λ_K wynosi 6, liczba swobodnych parametrów tensora $\boldsymbol{\omega}_I$, związanego warunkiem normalizacji, wynosi 5, liczba swobodnych parametrów tensora $\boldsymbol{\omega}_{II}$, związanego warunkiem normalizacji i warunkiem ortogonalności do poprzedniego tensora, jest równa 4, ..., liczba swobodnych parametrów tensora $\boldsymbol{\omega}_{VI}$, związanego warunkiem normalizacji i warunkami ortogonalności do poprzedniej piątki, wynosi zero.

Biorąc pod uwagę fundamentalny charakter zagadnienia stałych sprężystych, podsumujemy.

Komentarz. Różnorodność ciał sprężystych, dla których istnieje potencjał sprężysty, można w sposób ciągle opisać, w ogólnym przypadku, zbiorem 21 parametrów składającym się z trzech następujących, bardzo różniących się między sobą podzbiorów.

Po pierwsze, jest to 6 jednoznacznie zdefiniowanych dla danego materiału sprężystego **wymiarowych stałych materiałowych** (niezmienników tensora sztywności)

$$\lambda_1, \dots, \lambda_{VI}, \tag{I}$$

mających fizyczny wymiar naprężenia i dodatnio określonych. Przeglądając wzory (5.11), (6.6), (7.16)–(7.18), widzimy, że te stałe opisują stopień ogólnej sztywności materiału. Są to prawdziwe **moduły sztywności** materiału. Odpowiadają im **moduły podatności**

$$\lambda_I^{-1}, \dots, \lambda_{VI}^{-1}.$$

Po drugie, jest to 12 **bezwymiarowych stałych materiałowych** (niezmienników tensora sztywności)

$$\chi_1, \dots, \chi_{12} \quad (\text{II})$$

(zdefiniowanych na przykład wzorami (8.5)), stanowiących funkcjonalnie kompletny i nieredukowalny układ niezmienników tensorowego materiałowego repera $\omega_I, \dots, \omega_{VI}$. Niezmienniki te niejako rozkładają sztywność po włóknach i płaszczyznach materiału. Ich najważniejszą własnością jest to, że są one takie same dla tensora sztywności \mathbf{C} i podatności \mathbf{S} . Te stałe bezwymiarowe będziemy nazywać **dys-trybutorami sztywności**.

Po trzecie, są to 3 nie niezmiennicze parametry, na przykład kąty Eulera

$$\theta, \varphi, \psi, \quad (\text{III})$$

ustalające orientację konkretnego ciała wykonanego z rozpatrywanego materiału sprężystego względem laboratoryjnego układu odniesienia.

Przypadki zdegenerowane, gdy niektóre **moduły sztywności** się pokrywają:

$$\lambda_K = \lambda_L, \quad \text{dla niektórych par } K, L,$$

i/lub **dystrybutory sztywności** podlegają jakimkolwiek więzom

$$f_i(\chi_1, \dots, \chi_{12}) = 0, \quad i = 1, \dots, k \leq 12, \quad (8.7)$$

wymagają odrębnego badania. Zbiory (I)–(III) sprowadzają się do zbioru

$$\begin{aligned} (\lambda_1, \dots, \lambda_\rho; \quad \chi_1, \dots, \chi_t; \quad \varphi_1, \dots, \varphi_u) \\ \rho \leq 6, \quad t \leq 12, \quad u \leq 3, \end{aligned} \quad (8.8)$$

gdzie λ_i są parami różne i χ_1, \dots, χ_t stanowią kompletny zbiór ciągłych niezmienników projektorów $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_\rho$ ze wzoru (3.27). Symbol

$$[\rho + t + u] \quad (8.9)$$

będziemy nazywać drugim wskaźnikiem strukturalnym rozważanej klasy ciał sprężystych. Wzór strukturalny zapiszemy w postaci

$$C_{ijkl} = \lambda_1 P_{(1)ijkl}(\chi_1, \dots, \chi_t; \varphi_1, \dots, \varphi_u) + \dots + \lambda_\rho P_{(\rho)ijkl}(\chi_1, \dots, \chi_t; \varphi_1, \dots, \varphi_u). \quad (8.10)$$

Ponieważ istnieje obszerny materiał eksperymentalny dotyczący anizotropii materiałów sprężystych (zob. na przykład [21–23]) opracowany w funkcji wartości składowych C_{ijkl} w wybranych bazach materiałowych, powstaje praktyczna potrzeba odwrócenia tej zależności

$$\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(C_{ijkl}), \quad \chi_b = \chi_b(C_{ijkl}), \quad \varphi_c = \varphi_c(C_{ijkl}). \quad (8.11)$$

O zamkniętych wzorach, w ogólnym przypadku, nie może być nawet mowy – przeszkadza w tym równanie szóstej stopnia (3.33). Obliczenia numeryczne nie przedstawiają trudności. Jednak dla najważniejszych przypadków wszystko silnie się upraszcza. Pokażemy to w §10 na przykładzie ciał poprzecznie izotropowych.

§9 Sprężystość ciał ze sztywnymi więzami

Zasłużoną popularnością cieszy się w mechanice ośrodków ciągłych koncepcja ciała **nieściśliwego**. W przypadku ciała izotropowego jest ona bardzo naturalna, lecz w ogólnym przypadku anizotropii jest wyraźnie sztuczna. Problem sprężystości ciał ze sztywnymi wewnętrznymi więzami uzyskuje bardzo jasną fizyczną interpretację w ramach opracowanego tutaj podejścia.

Weźmy ciało sprężyste

$$\mathbf{C} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \dots + \lambda_\nu \mathbf{P}_\nu + \dots + \lambda_\rho \mathbf{P}_\rho \quad (9.1)$$

i załóżmy, że w odniesieniu do sprężystych stanów własnych z przestrzeni \mathbf{P}_ν ciało jest znacznie sztywniejsze, niż dla wszystkich innych, tj.

$$\lambda_\nu \gg \lambda_1, \dots, \lambda_{\nu-1}, \lambda_{\nu+1}, \dots, \lambda_\rho. \quad (9.2)$$

W takim przypadku następująca idealizacja może okazać się uzasadniona; **podatność w odniesieniu do wszystkich stanów z podprzestrzeni \mathcal{P}_ν jest równa zeru**, tj.

$$\lambda_\nu^{-1} = 0. \quad (9.3)$$

Będziemy nazywać ten warunek warunkiem **l -krotnych sztywnych więzów**, gdzie $l \equiv q_\nu$. Nadamy tej idealizacji poprawną postać.

Tensor podatności odpowiadający ciału (9.1) z warunkiem (9.3) będzie miał postać

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{P}_1 + \dots + \frac{1}{\lambda_{\nu-1}} \mathbf{P}_{\nu-1} + \frac{1}{\lambda_{\nu+1}} \mathbf{P}_{\nu+1} + \dots + \frac{1}{\lambda_\rho} \mathbf{P}_\rho. \quad (9.4)$$

Dla dowolnego odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$ otrzymujemy

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\nu \equiv \mathbf{P}_\nu \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{P}_\nu \cdot (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}, \quad (9.5)$$

tak jak powinno być. Podstawiając wzór dla małych odkształceń wyrażonych za pomocą przemieszczeń \mathbf{u} , otrzymujemy równania w funkcji przemieszczeń

$$\mathbf{P}_\nu \cdot (\nabla \mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad P_{(\nu) ijkl} u_{k,l} = 0. \quad (9.6)$$

Liczba niezależnych warunków skalarnych jest tutaj równa $q_\nu = l$. Jeśli $\boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_a$ jest pewną bazą w \mathcal{P}_ν , to te warunki zgodnie z (3.20) mają postać:

$$\omega_{(1) pq} u_{p,q} = 0, \dots, \omega_{(a) pq} u_{p,q} = 0. \quad (9.7)$$

Rozpatrzmy problem naprężeń. Prawo Hooke'a w postaci (2.1) z tensorem sztywności (9.1) przy (9.3) jest niepoprawne w członie

$$\boldsymbol{\sigma} = \dots + \lambda_\nu \mathbf{P}_\nu \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \dots, \quad (9.8)$$

człon ten reprezentuje nieoznaczoność typu $\infty \cdot 0$.

Wprowadzimy rozkład

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}_\nu^\perp \oplus \mathcal{P}_\nu, \quad (9.9)$$

$$\mathcal{P}_\nu^\perp = \mathcal{P}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_{\nu-1} \oplus \mathcal{P}_{\nu+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_\rho \quad (9.10)$$

i zapiszemy

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_a + \boldsymbol{\sigma}_\nu, \quad \boldsymbol{\sigma}_a \in \mathcal{P}_\nu^\perp, \quad \boldsymbol{\sigma}_\nu \in \mathcal{P}_\nu. \quad (9.11)$$

Prawo Hooke'a określa tylko **aktywną** część naprężeń $\boldsymbol{\sigma}_a$. **Reaktywna** część naprężeń $\boldsymbol{\sigma}_\nu$ nie jest związana z deformacjami i jest określona tylko równaniami ruchu (równowagi) i warunkami brzegowymi dla naprężeń.

Wobec tego tensor sztywności dla ciała sprężystego ze sztywnymi więzami (9.6) będzie miał postać

$$\mathbf{C} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \dots + \lambda_{\nu-1} \mathbf{P}_{\nu-1} + \lambda_{\nu+1} \mathbf{P}_{\nu+1} + \dots + \lambda_\rho \mathbf{P}_\rho, \quad (9.12)$$

a prawo Hooke'a przyjmuje postać

$$\boldsymbol{\sigma}_a = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_a. \quad (9.13)$$

Zauważmy, że operator \mathbf{C} okazuje się uogólnionym operatorem odwrotnym operatora \mathbf{S} [15], tj.

$$\mathbf{C} \circ \mathbf{S} = \mathbf{I}^{(4s)'} \equiv \mathbf{I}^{(4s)} - \mathbf{P}_\nu. \quad (9.14)$$

Nieściśliwość jest szczególnym przypadkiem jednowymiarowych sztywnych więzów, $l = 1$, kiedy

$$\mathbf{P}_\nu = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}. \quad (9.15)$$

Innym szczególnym przypadkiem jednowymiarowych sztywnych więzów, $l = 1$ jest **nierozciągliwość** wzdłuż pewnego kierunku $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$. Wtedy

$$\mathbf{P}_\nu = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (9.16)$$

§10 Pierwsze przykłady

Pięknie, powie wyrafinowany czytelnik, ale zadanie znalezienia odpowiednich sprężystych stanów własnych dla danego sprężystego ciała nie jest wcale proste, w każdym razie od strony obliczeniowej. Odpowiadam na to: rozwiązywanie tego zadania wprost będzie konieczne tylko w wyjątkowych przypadkach. Wręcz przeciwnie, myślę, że lepiej jest zrobić coś odwrotnego:

Ciało sprężyste należy **charakteryzować** jego zbiorem sprężystych stanów własnych i odpowiadających im modułów sztywności.

Podamy pierwsze proste przykłady.

10.1. Idealnie sprężyste ciała

Definicja 1. Ciało sprężyste będziemy nazywać ciałem **idealnie sprężystym**, jeśli dowolny symetryczny tensor drugiego rzędu jest jego sprężystym stanem własnym.

Zwrócimy uwagę, że jeśli wzór strukturalny (3.27) zawiera więcej niż jeden człon, to istnieją tensory, które nie są własne. Dlatego dla $\rho = 1$ tensor sztywności i prawo Hooke'a przyjmują postać*

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{I}^{(4s)}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \lambda \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \lambda > 0. \quad (10.1)$$

Wskaźniki strukturalne to liczby całkowite

$$\langle 6 \rangle, \quad [1 + 0 + 0]. \quad (10.2)$$

*Uwaga: występujący we wzorze (10.1) współczynnik oznaczony jako λ nie jest współczynnikiem Lamego λ . Przypadek ciała idealnie sprężystego można zinterpretować jako przypadek graniczny ciała izotropowego (por. sekcja 10.2) poniżej, dla którego współczynnik Lamego $\lambda = 0$. Wtedy staje się jasne, że współczynnik λ występujący we wzorze (10.1) należy zinterpretować jako odpowiednik współczynnika Lamego 2μ – przypis tłumacza.

Istnienie rozważanych ciał jest teoretycznie możliwe, ale nie są one dobrą idealizacją rzeczywistych materiałów.

10.2. Izotropowe ciała sprężyste

Przyjmujemy następującą odświeżającą definicję,

Definicja 2. **Izotropowym** ciałem sprężystym będziemy nazywać ciało sprężyste, dla którego każde czyste ścinanie jest sprężystym stanem własnym³.

Po to, aby wychodząc z tej definicji, przejść do znanego prawa Hooke'a, wykorzystamy następujący lemat (obowiązujący dla dowolnego symetrycznego operatora w przestrzeni euklidesowej).

Lemat 2. Niech \mathcal{P} , \mathcal{D} będą podprzestrzeniami sprężystych stanów własnych tensora sztywności \mathbf{C} . Jeśli \mathcal{P} nie jest ortogonalna do \mathcal{D} , to cała suma prosta $\mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$ składa się ze sprężystych stanów własnych.

Dowód. Niech $\lambda_{\mathcal{P}}$, $\lambda_{\mathcal{D}}$ będą wartościami własnymi, odpowiadającymi stanom własnym z \mathcal{P} i \mathcal{D} , odpowiednio. Ponieważ \mathcal{P} i \mathcal{D} są nie ortogonalne, istnieją zatem $\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{P}$, $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{D}$, takie że $\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\rho} \neq 0$. Wtedy

$$\lambda_{\mathcal{P}} \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\rho} = \lambda_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\rho},$$

tj. $\lambda_{\mathcal{P}} = \lambda_{\mathcal{D}}$. ♦

Twierdzenie 7. Rozkład materiałowy (3.26) ma dla ciała izotropowego postać

$$\mathcal{S} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}, \quad (10.3)$$

gdzie \mathcal{P} to 1-wymiarowa przestrzeń tensorów sferycznych, \mathcal{D} to 5-wymiarowa przestrzeń dewiatorów.

Dowód. Weźmy pewną ortonormalną bazę \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 , \mathbf{n}_3 i pięć czystych ścinań

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_1 &\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \boldsymbol{\tau}_2 &\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \boldsymbol{\tau}_3 &\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\tau}_4 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \boldsymbol{\tau}_5 &\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

³Nie próbuję tutaj zastąpić tą definicją tej dobrze znanej. Moim zadaniem jest uwypuklenie na tym obrazie niezauważonych subtelnosci.

Oczywiście $\boldsymbol{\tau}_1, \dots, \boldsymbol{\tau}_5$ jest bazą (nie ortonormalną!) dla przestrzeni dewiatorów \mathcal{D} . Ponieważ $\text{Lin } \boldsymbol{\tau}_1, \text{Lin } \boldsymbol{\tau}_2$ są przestrzeniami stanów własnych zgodnie z samą definicją ciała izotropowego, $\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \neq 0$, zatem zgodnie z lematem $\text{Lin } (\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2)$ składa się ze stanów własnych. Kontynuując w tym samym duchu, stwierdzamy, że $\text{Lin } (\boldsymbol{\tau}_1, \dots, \boldsymbol{\tau}_5) = \mathcal{D}$ składa się ze stanów własnych. Ale w takim razie dopełnienie $\mathcal{P} = \mathcal{D}^\perp$ składa się ze stanów własnych. \blacklozenge

Ponieważ projektory na przestrzeń tensorów sferycznych i przestrzeń dewiatorów są dobrze znane*,

$$\mathbf{I}_{\mathcal{P}} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad \mathbf{I}_{\mathcal{D}} = \mathbf{I}^{(4s)} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad (10.5)$$

tensor sztywności dla ciała izotropowego można wyrazić następująco

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \lambda_{\mathcal{P}} \mathbf{I}_{\mathcal{P}} + \lambda_{\mathcal{D}} \mathbf{I}_{\mathcal{D}} = \\ &= \frac{1}{3} (\lambda_{\mathcal{P}} - \lambda_{\mathcal{D}}) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \lambda_{\mathcal{D}} \mathbf{I}^{(4s)}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Rozkład (5.6) przyjmuje postać

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{P}} + \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{D}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathcal{P}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathcal{D}}, \quad (10.7)$$

gdzie, na przykład:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{P}} \equiv \mathbf{I}_{\mathcal{P}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \right) \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{D}} \equiv \mathbf{I}_{\mathcal{D}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{P}}. \quad (10.8)$$

Ortogonalny rozkład prawa Hooke'a (5.7) przyjmuje postać

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{P}} = \lambda_{\mathcal{P}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathcal{P}}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{D}} = \lambda_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathcal{D}}. \quad (10.9)$$

Widzimy, tak jak zapowiadaliśmy w §5, że wszystkie te formuły, dobrze znane dla ciała izotropowego, w rzeczywistości są szczególnymi przypadkami naszych ogólnych związków.

Stałe Lamégo można wyrazić za pomocą modułów sztywności $\lambda_{\mathcal{P}}, \lambda_{\mathcal{D}}$ następująco:

$$\lambda = \frac{1}{3} (\lambda_{\mathcal{P}} - \lambda_{\mathcal{D}}), \quad \mu = \frac{1}{2} \lambda_{\mathcal{D}}. \quad (10.10)$$

Dla modułu ściskania objętościowego i współczynnika Poissona mamy:

$$K = \frac{1}{3} \lambda_{\mathcal{P}}, \quad \nu = \frac{\lambda_{\mathcal{P}} - \lambda_{\mathcal{D}}}{2\lambda_{\mathcal{P}} + \lambda_{\mathcal{D}}}. \quad (10.11)$$

* $\mathbf{I}_{\mathcal{P}} \perp \mathbf{I}_{\mathcal{D}}$ – przypis tłumacza.

Wskaźniki strukturalne dla klasy ciał izotropowych są równe

$$\langle 1 + 5 \rangle, \quad [2 + 0 + 0]. \quad (10.12)$$

Parametry dystrybutorów sztywności χ_1, \dots, χ_{12} i kąty orientujące względem laboratoryjnego układu współrzędnych θ, φ, ψ są nieobecne, ponieważ **nie ma czego** dystrybuować i **nie ma czego** orientować: w ciele nie ma ani jednego włókna materiału, które można by wyróżnić.

Porównując (10.6) z (10.1), widzimy, że

ciało idealnie sprężyste to izotropowe ciało sprężyste ze współczynnikiem Poissona równym zeru*.

Uwaga 7. Jeśli wiemy z góry, że tensor sztywności ciała izotropowego ma postać (10.6), to od razu jest jasne, że tensory sferyczne i dewiatory są sprężystymi stanami własnymi. Jest to pokazane (bez wykorzystywania koncepcji sprężystego stanu własnego!) w prawie każdym podstawowym podręczniku teorii sprężystości. ♦

Zakładając $\lambda_{\mathcal{D}}^{-1} = 0$, otrzymujemy **nieściśliwe** ciało izotropowe

$$\mathbf{C} = \lambda_{\mathcal{D}} \mathbf{I}_{\mathcal{D}}. \quad (10.13)$$

Przypadek $\lambda_{\mathcal{D}}^{-1} = 0$ odpowiada ciału sprężystemu, całkowicie sztywnemu postaciowo. Wtedy

$$\mathbf{C} = \lambda_{\mathcal{P}} \mathbf{I}_{\mathcal{P}}, \quad (10.14)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \right) \mathbf{1} \quad (10.15)$$

(nie mylić z idealną cieczą!). Ten przypadek, najwyraźniej, jest trudniejszy do zrealizowania w praktyce.

10.3. Objętościowo-izotropowe ciała sprężyste

Wskazane jest wyróżnienie następującej rodziny ciał sprężystych.

Definicja 3. Objętościowo-izotropowym będziemy nazywać każde ciało sprężyste, dla którego tensor sferyczny jest sprężystym stanem własnym.

* $\lambda = \lambda_{\mathcal{P}} - \lambda_{\mathcal{D}} = 0 \Rightarrow \nu = 0$ – przypis tłumacza.

Twierdzenie 2 dla ciał objętościowo-izotropowych ma następującą postać:

$$\mathcal{S} = \mathcal{P} \oplus (\mathcal{D}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{D}_\gamma), \quad (10.16)$$

$$\mathbf{C} = K(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + (\mu_1 \mathbf{P}_1 + \dots + \mu_\gamma \mathbf{P}_\gamma), \quad (10.17)$$

gdzie \mathcal{P} jest 1-wymiarową przestrzenią tensorów sferycznych, K jest modulem sztywności objętościowej, $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_\gamma$ to ortogonalny rozkład przestrzeni dewiatorów \mathcal{D} , $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_\gamma$ to odpowiadający mu rozkład jedynek $\mathbf{I}_{\mathcal{D}}$ przestrzeni \mathcal{D} ,

$$\mathbf{P}_1 + \dots + \mathbf{P}_\gamma = \mathbf{I}_{\mathcal{D}}, \quad \gamma \leq 5. \quad (10.18)$$

Nie będziemy zajmować się szczegółami opisu ciał objętościowo-izotropowych. Odnotujemy tylko następujące ciekawe twierdzenie:

Twierdzenie 8. Jeśli ani jedno czyste ścinanie nie jest sprężystym stanem własnym ciała objętościowo-izotropowego, to $\gamma = 5$, tj. pierwszy wskaźnik strukturalny ma postać $\langle 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \rangle$.

Dowód. Przeprowadzimy przez przeciwieństwo. Pokażemy, że w dowolnej dwuwymiarowej podprzestrzeni przestrzeni dewiatorów znajduje się czyste ścinanie. Rzeczywiście, weźmy nieproporcjonalne, ale poza tym dowolne dewiatory $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\rho}$ różne, oczywiście od czystych ścinań, tj.⁴ $\text{tr}(\boldsymbol{\pi}^3) \neq 0$, $\text{tr}(\boldsymbol{\rho}^3) \neq 0$. Rozważmy niezerową liniową kombinację $\boldsymbol{\tau} = a\boldsymbol{\pi} + b\boldsymbol{\rho}$, $a^2 + b^2 \neq 0$ i zażądamy, żeby $\boldsymbol{\tau}$ było czystym ścinaniem,

$$\begin{aligned} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}^3) &= a^3 \text{tr}(\boldsymbol{\pi}^3) + b^3 \text{tr}(\boldsymbol{\rho}^3) + a^2 b \text{tr}(\boldsymbol{\pi}^2 \boldsymbol{\rho}) + \\ &+ ab^2 \text{tr}(\boldsymbol{\pi} \boldsymbol{\rho}^2) = 0. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Ponieważ $b \neq 0$, zatem wprowadzając $t \equiv a/b$, otrzymamy równanie

$$t^3 \text{tr}(\boldsymbol{\pi}^3) + t^2 \text{tr}(\boldsymbol{\pi}^2 \boldsymbol{\rho}) + t \text{tr}(\boldsymbol{\pi} \boldsymbol{\rho}^2) + \text{tr}(\boldsymbol{\rho}^3) = 0, \quad (10.20)$$

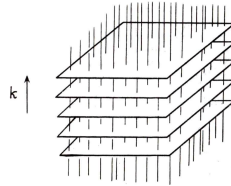
które ma co najmniej jedno rzeczywiste, niezerowe rozwiązanie. \blacklozenge

Definicja 2 i twierdzenie 8 zwracają naszą uwagę na szczególną rolę czystych ścinań. Wyrażając to nieco nieprecyzyjnie, ale za to poglądowo, można powiedzieć, że stan własny czystego ścinania jest jakby śladem izotropii w anizotropowym ciele.

⁴Konieczny i wystarczający warunek, aby tensor był czystym ścinaniem, ma postać $\text{tr}(\boldsymbol{\tau}) = \text{tr}(\boldsymbol{\tau}^3) = 0$.

10.4. Poprzecznie-izotropowe ciała sprężyste

Zacznijemy od specjalnego przykładu. Opisujemy sprężyste własności kompozytu pokazanego na rysunku 4. Izotropowa osnowa jest zbrojona rodziną cienkich równoległych płaskich warstw z innego izotropowego materiału i wiązką sprężystych włókien prostopadłą do warstw. Kierunek włókien określony jest diadą $\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$. Używamy bazy ortonormalnej $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 = \mathbf{k}$.



Rys. 4. Przykład kompozytu poprzecznie-izotropowego, o izotropowej osnowie zbrojonej rodziną cienkich równoległych płaskich warstw z innego izotropowego materiału i wiązką sprężystych włókien prostopadłą do warstw.

Po pierwsze, jasne jest, że ponieważ warstwy są cienkie, a połączenia włókien z warstwami nie są sztywne, zatem w przypadku dowolnego (małego!) odkształcenia ścinającego

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & q \\ p & q & 0 \end{pmatrix} \quad (10.21)$$

warstwy i włókna zachowują się jak ciała sztywne, tj. odkształca się tylko osnowa⁵. Ponieważ osnowa jest izotropowa, zatem dowolne ścinanie jest jej stanem własnym, z jednym i tym samym modulem sztywności. Dlatego dowolne **ścina-
nie (10.21) jest sprężystym stanem własnym rozpatrywanego kompo-
zytu**. Otrzymaliśmy \mathcal{P}_3 , 2-wymiarową przestrzeń sprężystych stanów własnych postaci (10.21).

Ortonormalną bazą w \mathcal{P}_3 będzie na przykład para:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{III}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{n}_1) \sim \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.22)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{IV}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{n}_2) \sim \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.23)$$

⁵Dlatego nie ma sensu wzmacnianie pręta skręcanego w kierunku osi $\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$!

Projektor na \mathcal{P}_3 ma postać*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_3 &= \boldsymbol{\omega}_{\text{III}} \otimes \boldsymbol{\omega}_{\text{III}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{IV}} \otimes \boldsymbol{\omega}_{\text{IV}} = \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 - \varepsilon) \times [\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{1}] + \frac{1}{2} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (10.24)$$

gdzie $\varepsilon \equiv \langle 1\ 2\ 3\ 4 \rangle$, $\sigma_1 \equiv \langle 1\ 3\ 2\ 4 \rangle$, $\sigma_2 \equiv \langle 1\ 4\ 3\ 2 \rangle$ **.

Po drugie, w przypadku dowolnego odkształcenia ścinającego w płaszczyźnie warstw, tj. odkształcenia postaci

$$\begin{pmatrix} u & v & 0 \\ v & -u & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.25)$$

włókna przemieszczają się jak ciała sztywne, a odkształca się tylko osnowa i warstwy. Ponieważ zarówno osnowa jak i warstwy są izotropowe, ścinania (10.25) są ich stanami własnymi. Dlatego **dowolne ścinanie (10.25) jest sprężystym stanem własnym rozpatrywanego kompozytu**. Uzyskaliśmy \mathcal{P}_4 – 2-wymiarową przestrzeń ścinania własnych postaci (10.25), $\mathcal{P}_4 \perp \mathcal{P}_3$.

Ortonormalną bazą w \mathcal{P}_4 jest na przykład

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{V}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2) \sim \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.26)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{VI}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_1) \sim \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.27)$$

Projektor na \mathcal{P}_4 ma postać***:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_4 &= \boldsymbol{\omega}_{\text{V}} \otimes \boldsymbol{\omega}_{\text{V}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{VI}} \otimes \boldsymbol{\omega}_{\text{VI}} = \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \times [\mathbf{1} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{1}] - 2\mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (10.28)$$

gdzie $\sigma_1 \equiv \langle 1\ 3\ 2\ 4 \rangle$, $\sigma_2 \equiv \langle 1\ 4\ 3\ 2 \rangle$.

*Przypis tłumacza: \mathbf{P}_3 można równoważnie, bardziej klarownie, wyrazić w postaci $\mathbf{P}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{n}_1) \otimes (\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{n}_1) + \frac{1}{2}(\mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{n}_2) \otimes (\mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{n}_2)$, $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{k} = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{k} = 0$ (gdzie \mathbf{n}_1 i \mathbf{n}_2 są dowolne).

** ε , σ_1 , σ_2 oznaczają permutacje indeksów – przypis tłumacza.

***Przypis tłumacza: \mathbf{P}_4 można równoważnie – bardziej klarownie, wyrazić w postaci $\mathbf{P}_4 = \frac{1}{2}(\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2) \otimes (\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2) + \frac{1}{2}(\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_1) \otimes (\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_1)$.

Po trzecie, rozpatrzmy $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}_3 \oplus \mathcal{P}_4)^\perp$. Przywołując definicje (10.21) i (10.25) przestrzeni \mathcal{P}_3 i \mathcal{P}_4 , widzimy, że dopełnienie ortogonalne \mathcal{P} jest 2-wymiarowe i składa się z tensorów postaci

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}. \quad (10.29)$$

W przypadku naszego kompozytu, tak jak i dla każdego innego ciała sprężystego, rozkład przestrzeni \mathcal{S} na sumę przestrzeni stanów własnych powinien być kompletny, (3.26). Dlatego albo cała \mathcal{P} składa się ze sprężystych stanów własnych, albo \mathcal{P} **dzieli się na dwie 1-wymiarowe podprzestrzenie stanów własnych**, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$. W ogólnym przypadku, tj. dla dowolnego zbioru sztywności osnowy, warstw i włókien oraz określonych udziałów objętościowych warstw włókien, dla pierwszej możliwości nie ma uzasadnienia. Nie ma także uzasadnienia dla wyróżnienia jakiegokolwiek pary $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$. Dlatego konieczne jest rozważenie **wszystkich** ortogonalnych rozkładów \mathcal{P} , tj. **wszystkich** par ortonormalnych $\boldsymbol{\omega}_I, \boldsymbol{\omega}_{II}$ w \mathcal{P} . Łatwo zauważyć, że stanowią one zbiór 1-parametrowy, który można wygodnie przedstawić w postaci⁶:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_I &= \frac{\sqrt{2}}{2} [\sin(\chi) \mathbf{1} + \sqrt{3} \sin(\chi_0 - \chi) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}] \\ &\sim \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \sin(\chi) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\chi) & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \cos(\chi) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (10.30)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{II} &= \frac{\sqrt{2}}{2} [\cos(\chi) \mathbf{1} + \sqrt{3} \cos(\chi_0 - \chi) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}] \\ &\sim \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \cos(\chi) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\chi) & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \sin(\chi) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.31)$$

Tutaj χ jest parametrem rodziny, przy czym bez utraty ogólności można założyć, że

$$0 \leq \chi < \pi/2, \quad (10.32)$$

⁶Dobra jest też postać $\boldsymbol{\omega}_I = g(s) [\mathbf{1} + s \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}]$, $\boldsymbol{\omega}_{II} = g(t) [\mathbf{1} + t \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}]$, gdzie $g(x) = (x^2 + 3x + 3)^{1/2}$, $3 + (t + s) + st = 0$.

χ_0 jest zaś określone przez warunek $\boldsymbol{\omega}_I = \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{1}$, tj. $\text{tg}(\chi_0) = \sqrt{2}^*$. W ten sposób otrzymaliśmy dla rozpatrywanego kompozytu 1-wymiarową przestrzeń stanów własnych \mathcal{P}_1 proporcjonalnych do $\boldsymbol{\omega}_I$ i 1-wymiarową przestrzeń stanów własnych \mathcal{P}_2 proporcjonalnych do $\boldsymbol{\omega}_{II}$. Dla projektorów na \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= \boldsymbol{\omega}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_I = \frac{1}{2} \sin^2(\chi) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\chi) \sin(\chi_0 - \chi) [\mathbf{1} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{1}] + \\ &+ \frac{3}{2} \sin^2(\chi_0 - \chi) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (10.33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2 &= \boldsymbol{\omega}_{II} \otimes \boldsymbol{\omega}_{II} = \frac{1}{2} \cos^2(\chi) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \\ &- \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\chi) \cos(\chi_0 - \chi) [\mathbf{1} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{1}] + \\ &+ \frac{3}{2} \cos^2(\chi_0 - \chi) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (10.34)$$

W ten sposób wszystkie sprężyste stany własne rozpatrywanego kompozytu zostały wyznaczone.

Przy poszukiwaniu sprężystych stanów odwoaliśmy się do pojęć mechanicznych związanych konkretnie z kompozytem pokazanym na rys. 4. Jeśli jednak przyjrzeć się uważnie, to można spostrzec, że wydzielenie przestrzeni odpowiednich ścinania (10.21) i (10.25) jest poprawne dla dowolnej konstrukcji o symetrii osiowej. Można to ściśle wykazać [24], jednak utrzymując jednolitą metodologię, przyjmiemy tutaj, co następuje:

Definicja 4. Poprzecznie-izotropowym ciałem sprężystym będziemy nazywać ciało sprężyste, dla którego można wskazać taki kierunek $\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$, że dowolne ścinanie

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}\mathbf{k} = 0, \quad (10.35)$$

i dowolne ścinanie

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}\mathbf{k} = \mathbf{b}\mathbf{k} = \mathbf{a}\mathbf{b} = 0, \quad (10.36)$$

są sprężystymi stanami własnymi.

Z tej definicji wywnioskujemy postać tensora sztywności. Przede wszystkim zauważamy, że ścinania (10.35) tworzą liniową podprzestrzeń w \mathcal{S} . Podobnie,

* $\sin(\chi_0) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\cos(\chi_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ - przypis tłumacza.

ścinania (10.36) tworzą liniową podprzestrzeń w \mathcal{S} . Te podprzestrzenie są naszym innym, jak tylko \mathcal{P}_3 i \mathcal{P}_4 , odpowiednio. Teraz, używając lematu, natychmiast dowodzimy, że ścinania (10.35) mają wspólny moduł sztywności, tak samo jak i ścinania (10.36). Innymi słowy \mathcal{P}_3 i \mathcal{P}_4 są przestrzeniami stanów własnych. Ale także i \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 dla pewnego χ , już zależnego od danego ciała będą przestrzeniami stanów własnych. W ten sposób udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 9. Dla dowolnego poprzecznie-izotropowego ciała rozkład strukturalny ma postać:

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_3 \oplus \mathcal{P}_4, \quad (10.37)$$

gdzie \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 zależą od χ i $\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$, a \mathcal{P}_3 , \mathcal{P}_4 od $\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$; to oznacza, że tensor sztywności można wyrazić wzorem:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = & \lambda_1 \mathbf{P}_1(\chi, \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) + \lambda_2 \mathbf{P}_2(\chi, \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) + \\ & + \lambda_3 \mathbf{P}_3(\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) + \lambda_4 \mathbf{P}_4(\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (10.38)$$

gdzie $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_4$ są określone wzorami (10.33), (10.34), (10.24) i (10.28).

Zamiast argumentu $\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$ można wprowadzić dwa kąty,

$$\mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \leftrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \quad (10.39)$$

ustalające $\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$ względem laboratoryjnego układu współrzędnych. Wskaźniki strukturalne klasy poprzecznie-izotropowych ciał, w ogólnym przypadku, mają postać:

$$\langle 1 + 1 + 2 + 2 \rangle, \quad [4 + 1 + 2]. \quad (10.40)$$

Sprężyste stany własne ciała poprzecznie-izotropowego są pokazane na rys. 5.

Znaleźliśmy pięć stałych materiałowych ciała poprzecznie-izotropowego

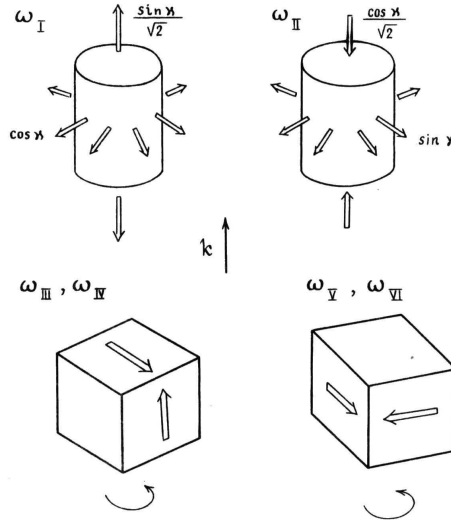
$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \chi. \quad (10.41)$$

Znaczenie pierwszych czterech stałych jest całkowicie jasne; w szczególności λ_3 , λ_4 są to po prostu moduły ścinania (postaciowe) dla (10.35) i (10.36). Nieco bardziej skomplikowana jest mechaniczna interpretacja **parametru dystrybucji sztywności** χ . Materiał poprzecznie-izotropowy jest objętościowo-izotropowym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\chi = \chi_0, \quad \text{gdzie} \quad \sin(\chi_0) = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \cos(\chi_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad (10.42)$$

i w konsekwencji:

$$\boldsymbol{\omega}_I = \frac{\sqrt{3}}{3} \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\omega}_{II} = \frac{\sqrt{6}}{6} (\mathbf{1} - 3\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}). \quad (10.43)$$



Rys. 5. Ilustracja graficzna sprężystych stanów własnych materiału poprzecznie-izotropowego.

Ze wzorów (7.6)–(7.8) wynika, że:

$$\frac{1}{3K} = \frac{\cos^2(\chi_0 - \chi)}{\lambda_1} + \frac{\sin^2(\chi_0 - \chi)}{\lambda_2}, \quad (10.44)$$

$$\frac{1}{E(n)} = \frac{\cos^2(\chi)}{\lambda_1} + \frac{\sin^2(\chi)}{\lambda_2}, \quad (10.45)$$

$$-\frac{\nu(k)}{E(k)} = \frac{\sqrt{2}}{4} \sin(2\chi) \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right). \quad (10.46)$$

Podkreślimy następującą charakterystyczną cechę parametru χ : gdy tylko $\lambda_1 = \lambda_2$, wartość χ przestaje odgrywać rolę*.

Wyrazimy nowe stałe poprzecznie-izotropowego ciała (10.41) przez konwencjonalne stałe, którymi są różne od zera składowe C_{ijkl} w bazie $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 = \mathbf{k}$:

$$\begin{aligned} C_{11} &\equiv C_{1111} = C_{2222} \equiv C_{22}, & C_{12} &\equiv C_{1122}, \\ C_{13} &\equiv C_{1133} = C_{2233} \equiv C_{23}, & C_{33} &\equiv C_{3333}, \\ C_{44} &\equiv C_{2323} = C_{1313} \equiv C_{55}, & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) &\equiv C_{1212} \equiv C_{66}, \end{aligned} \quad (10.47)$$

* $\lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow C_{13} = 0$ – przypis tłumacza.

(zob. na przykład [5, 10])*. Najłatwiej będzie to zrobić tak: zapiszemy prawo Hooke'a w postaci (5.11); dla naprężeń mamy następujące zależności:

$$\begin{aligned}
 \sigma_I &\equiv \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}_I = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \sin(\chi) + \sigma_{33} \cos(\chi), \\
 \sigma_{II} &\equiv \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \cos(\chi) - \sigma_{33} \sin(\chi), \\
 \sigma_{III} &\equiv \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}_{III} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_{13}, \\
 \sigma_{IV} &\equiv \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}_{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_{23}, \\
 \sigma_V &\equiv \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}_V = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{11} - \sigma_{22}), \\
 \sigma_{VI} &\equiv \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}_{VI} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_{12}.
 \end{aligned} \tag{10.48}$$

Analogiczne wzory otrzymamy dla $\varepsilon_I, \dots, \varepsilon_{VI}$. Prawo Hooke'a w postaci (5.11) przyjmuje dla poprzecznie-izotropowego ciała postać:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \sin(\chi) + \sigma_{33} \cos(\chi) \right] &= \lambda_1 \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \sin(\chi) + \varepsilon_{33} \cos(\chi) \right], \\
 \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \cos(\chi) - \sigma_{33} \sin(\chi) \right] &= \lambda_2 \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \cos(\chi) - \varepsilon_{33} \sin(\chi) \right], \\
 \sigma_{13} &= \lambda_3 \varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = \lambda_3 \varepsilon_{23}, \\
 \sigma_{11} - \sigma_{22} &= \lambda_4 (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \quad \sigma_{12} = \lambda_4 \varepsilon_{12}.
 \end{aligned} \tag{10.49}$$

Zwróćmy uwagę na pierwszą z tych zależności. Najwyraźniej, można uważać, że σ_I i ε_I w ciele poprzecznie-izotropowym odgrywają rolę, którą w ciele izotropowym gra średnie ciśnienie $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ i odpowiadające mu odkształcenie objętościowe $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$.

*Materiały poprzecznie-izotropowe są jednoznacznie scharakteryzowane przez 5 liniowo niezależnych stałych sprężystości – przypis tłumacza.

Porównując (10.49) ze standardowym zapisem:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33}, \\
 \sigma_{22} &= C_{12}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33}, \\
 \sigma_{33} &= C_{13}\varepsilon_{11} + C_{13}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33}, \\
 \sigma_{23} &= 2C_{44}\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{13} = 2C_{44}\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{12} = (C_{11} - C_{12})\varepsilon_{12},
 \end{aligned} \tag{10.50}$$

otrzymujemy*:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \sqrt{2}C_{13} \operatorname{tg}(\chi) + C_{33}, \\
 \lambda_2 &= -\sqrt{2}C_{13} \operatorname{tg}(\chi) + C_{11} + C_{12}, \\
 \lambda_3 &= 2C_{44}, \\
 \lambda_4 &= C_{11} - C_{12},
 \end{aligned} \tag{10.51}$$

gdzie $\operatorname{tg}(\chi)$ jest dodatnim pierwiastkiem równania:

$$\sqrt{2}C_{13}(\operatorname{tg}(\chi))^2 + (C_{33} - C_{11} - C_{12}) \operatorname{tg}(\chi) - \sqrt{2}C_{13} = 0^{**}. \tag{10.52}$$

Jeśli $C_{11} + C_{12} = C_{33} + C_{13}$ to $\operatorname{tg}(\chi) = \sqrt{2}$, tj. ciało jest objętościowo-izotropowe.

Zbiór stałych materiałowych (10.41) określa się dla kompozytów na podstawie parametrów materiałowych ich komponentów. Na przykład, dla wcześniej rozważanego kompozytu (10.41):

- 1) λ_3 jest modulem postaciowym osnowy,
- 2) λ_4 zależy od modułu postaciowego osnowy, modułu postaciowego warstw i udziału objętościowego warstw,
- 3) λ_1 , λ_2 i χ zależy od wszystkich parametrów kompozytu, przy czym dla małego udziału objętościowego zbrojenia, wpływ współczynników Poissona warstw i włókien można zaniedbać.

*Poprawiono następujące błędne oryginalne wzory $\lambda_2 = -\sqrt{2}\operatorname{tg}(\chi) + C_{11} + C_{12}$, $\lambda_4 = (C_{11} - C_{22})$. Można pokazać, korzystając z (10.52), że jest również $\lambda_1 = \sqrt{2}C_{13}\frac{1}{\operatorname{tg}(\chi)} + (C_{11} + C_{12})$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}C_{13}\frac{1}{\operatorname{tg}(\chi)} + C_{33}$. Dla jasności $2C_{44} = 2C_{55}$ i $C_{11} - C_{12} = 2C_{66}$ – przypis tłumacza.

**Jawne rozwiązanie tego równania względem $\operatorname{tg}(\chi)$ przyjmuje postać $2\sqrt{2}C_{13} \cdot \operatorname{tg}(\chi) = (C_{11} + C_{12} - C_{33}) + \sqrt{(C_{11} + C_{12} - C_{33})^2 + 8C_{13}^2}$; $0 \leq \chi < \pi/2$ – przypis tłumacza.

Wzór strukturalny (10.38) pozwala wyróżnić wiele interesujących specjalnych przypadków ciał poprzecznie-izotropowych. Zwrócimy uwagę na niektóre z nich:

- 1) $\lambda_3 = \lambda_4$ – wskaźniki strukturalne tej klasy mają postać

$$\langle 1 + 1 + 4 \rangle, \quad [3 + 1 + 2]; \quad (10.53)$$

tak będzie na przykład dla kompozytu pokazanego na rys. 6;

- 2) $\lambda_1 = \lambda_2$ – wskaźniki strukturalne tej klasy mają postać

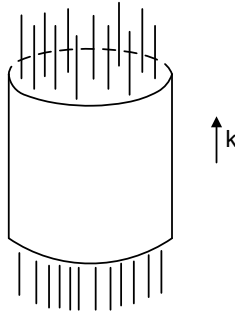
$$\langle 2 + 2 + 2 \rangle, \quad [3 + 0 + 2]; \quad (10.54)$$

jest to szczególny przypadek ciała objętościowo-izotropowego*;

- 3) $\chi = 0, \lambda_1^{-1} = 0$; tak będzie na przykład dla kompozytu z nierozciągliwymi włóknami;

- 4) $\chi = 0, \lambda_2^{-1} = \lambda_4^{-1} = 0$; tak będzie dla kompozytu pokazanego na rys. 4, z nierozciągliwymi warstwami;

- 5) $\chi = 0, \lambda_1^{-1} = \lambda_2^{-1} = \lambda_4^{-1} = 0$; tak będzie dla kompozytu z nierozciągliwymi włóknami i warstwami.



Rys. 6. Przykład kompozytu poprzecznie-izotropowego o izotropowej osnowie zbrojonej wiązką równoległych sprężystych włókien.

*Powyższe stwierdzenie jest błędne. Warunek $\lambda_1 = \lambda_2$ prowadzi do równania więzów $\text{tg}(\chi)^2 = -1$, por. wzory (10.51) i uwaga pod wzorem (10.52), którego spełnienie jest niemożliwe. Zatem dla przypadku $\lambda_1 = \lambda_2$ wzór (10.52) nie obowiązuje. Materiał poprzecznie-izotropowy jest objętościowo-izotropowy wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi = \chi_0$, por. (10.42). Dla materiału poprzecznie izotropowego i jednocześnie objętościowo-izotropowego jest $\lambda_1 = 2C_{13} + C_{33}$, $\lambda_2 = -C_{13} + C_{33}$ – przypis tłumacza.

Uwaga 8. Przestrzeń ścinań nazwiemy dowolną podprzestrzeń $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ składającą się z czystych ścinań, tj. tensorów $\boldsymbol{\tau}$ spełniających warunki $\text{tr}(\boldsymbol{\tau}) = \det(\boldsymbol{\tau}) = 0$.

Można udowodnić następujące interesujące twierdzenie:

Twierdzenie 10.

1. Dowolna 2-wymiarowa przestrzeń ścinań jest albo przestrzenią płaskich dewiatorów (10.36), albo przestrzenią ścinań osiowych (10.35).
2. Dowolna para wzajemnie ortogonalnych 2-wymiarowych przestrzeni ścinań ma postać (10.35) i (10.36) przy odpowiednim wyborze.
3. Trójwymiarowych przestrzeni ścinań w \mathcal{S} nie ma.

To twierdzenie wskazuje na szczególne miejsce zajmowane przez ciała poprzecznie-izotropowe wśród ciał anizotropowych.

10.5. Ortotropowe ciała sprężyste

Zacznijmy od definicji.

Definicja 5. Ortotropowym ciałem sprężystym będziemy nazywać dowolne ciało sprężyste, dla którego istnieje taka trójka wzajemnie ortogonalnych kierunków $\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$, $\mathbf{l} \otimes \mathbf{l}$, $\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$, $\mathbf{mk} = \mathbf{ml} = \mathbf{kl} = 0$, że ścinania:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \mathbf{k} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{l} \otimes \mathbf{k}, \\ \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{l}, \\ \boldsymbol{\mu} &= \mathbf{k} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{k},\end{aligned}\tag{10.55}$$

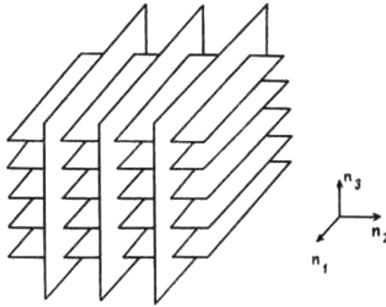
są sprężystymi stanami własnymi.

Już sama intuicja inżynierska wystarcza do stwierdzenia, że tak będzie, na przykład w przypadku kompozytu pokazanego na rys. 7; izotropowa osnowa jest tutaj zbrojona dwoma płasko-równoległymi wzajemnie ortogonalnymi rodzinami cienkich warstw.

Wyprowadzimy wzór strukturalny. Weźmiemy bazę ortonormalną \mathbf{n}_i zorientowaną w kierunkach wskazanych w definicji. Wprowadzamy ortonormalny system czystych ścinań:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{\text{III}} &\sim \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \boldsymbol{\omega}_{\text{IV}} &\sim \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\omega}_{\text{V}} &\sim \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{10.56}$$

Zgodnie z definicją 5 otrzymujemy 1-wymiarowe przestrzenie ścinań własnych \mathcal{P}_K proporcjonalnych do $\boldsymbol{\omega}_K$, $K = \text{III}, \text{IV}, \text{V}$.



Rys. 7. Przykład kompozytu ortotropowego o izotropowej osnowie zbrojonej dwoma płasko-równoległymi wzajemnie ortogonalnymi rodzinami cienkich warstw.

Rozpatrzmy $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}_{\text{III}} \oplus \mathcal{P}_{\text{IV}} \oplus \mathcal{P}_{\text{V}})^\perp$. Ta przestrzeń jest 3-wymiarowa i składa się z tensorów postaci

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix},\tag{10.57}$$

tj. ze wszystkich tensorów, dla których kierunki określone w definicji są kierunkami głównymi. **Wszystkie** ortogonalne rozkłady \mathcal{P} uzyskujemy, rozpatrując zbiór **wszystkich** ortonormalnych baz w \mathcal{P} . Te ostatnie dogodnie jest zapisać w następujący sposób:

$$\boldsymbol{\omega}_K \sim \begin{pmatrix} \omega_{K1} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{K2} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{K3} \end{pmatrix}, \quad K = \text{I}, \text{II}, \text{III},\tag{10.58}$$

gdzie

$$\boldsymbol{\omega}_K \cdot \boldsymbol{\omega}_L = \omega_{Ki} \omega_{Li} = \delta_{KL}.\tag{10.59}$$

Utożsamiając $\boldsymbol{\omega}_K$ z liczbową trójką $(\omega_{K1}, \omega_{K2}, \omega_{K3})$, widzimy, że te trójki powinny stanowić bazę ortonormalną w przestrzeni liczbowych trójek \mathbb{R}^3 ze zwykłym iloczynem skalarnym. Bazę tę określają trzy parametry

$$\chi_1, \chi_2, \chi_3, \quad (10.60)$$

w roli których można wziąć na przykład:

$$\chi_K \equiv \text{tr}(\boldsymbol{\omega}_K) = \omega_{K1} + \omega_{K2} + \omega_{K3}, \quad (10.61)$$

lub powiedzmy, kąty Eulera względem standardowej bazy $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

Każdemu wyborowi $\boldsymbol{\omega}_I$, $\boldsymbol{\omega}_{II}$, $\boldsymbol{\omega}_{III}$ ze wskazanego 3-parametrowego zbioru odpowiada podział \mathcal{P} na trzy przestrzenie \mathcal{P}_L , z których każda jest 1-wymiarową przestrzenią stanów własnych proporcjonalnych do $\boldsymbol{\omega}_L$, $L = I, II, III$.

Pokazaliśmy, że dla **ortotropowego ciała sprężystego**

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}_I \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_{VI}, \quad (10.62)$$

a tensor sztywności ma postać

$$\mathbf{C} = \lambda_I \boldsymbol{\omega}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_I + \dots + \lambda_{VI} \boldsymbol{\omega}_{VI} \otimes \boldsymbol{\omega}_{VI}, \quad (10.63)$$

gdzie $\boldsymbol{\omega}_K$ są zdefiniowane wzorami (10.58) i (10.56).

Zbiór parametrów sprężystych składa się z następujących elementów

$$\lambda_I, \dots, \lambda_{VI}; \quad \chi_1, \chi_2, \chi_3; \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \quad (10.64)$$

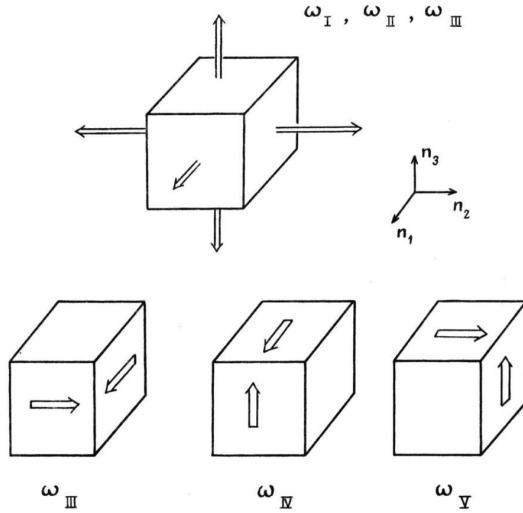
przy czym λ_{IV} , λ_V , λ_{VI} to moduły ścinania. Wskaźniki strukturalne klasy ciał ortotropowych są równe:

$$\langle 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \rangle, \quad [6 + 3 + 3]. \quad (10.65)$$

Sprężyste stany własne ciała ortotropowego są pokazane na rys. 8.

10.6. Jedna klasa całkowicie asymetrycznych ciał sprężystych

Rozważymy następujące uogólnienie ciał ortotropowych. Weźmiemy \mathcal{P}_I , \mathcal{P}_{II} , \mathcal{P}_{III} jak dla ciała ortotropowego, tj. jako ortogonalny rozkład przestrzeni ten-



Rys. 8. Ilustracja graficzna sprężystych stanów własnych materiału ortotropowego.

sorów z ustalonymi osiami głównymi $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$. Ortogonalne dopełnienie tej przestrzeni jest 3-wymiarowe i składa się z dewiatorów postaci*

$$\begin{pmatrix} 0 & u & v \\ u & 0 & w \\ v & w & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.66)$$

Wszystkie ortonormalne bazy w tej przestrzeni można wyrazić wzorami:

$$\boldsymbol{\omega}_L \sim \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{L1} & \gamma_{L2} \\ \gamma_{L1} & 0 & \gamma_{L3} \\ \gamma_{L2} & \gamma_{L3} & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.67)$$

$$\boldsymbol{\omega}_L \cdot \boldsymbol{\omega}_K = \frac{1}{2} \gamma_{Li} \gamma_{Ki} = \delta_{LK}, \quad (10.68)$$

gdzie $L = IV, V, VI$. Trójkę (10.67) można przedstawić, podobnie jak trójkę (10.58), za pomocą trzech parametrów

$$\chi_4, \chi_5, \chi_6. \quad (10.69)$$

*W oryginalnym wzorze (10.66) niepoprawnie pokazano macierz niesymetryczną. W tłumaczeniu błąd ten poprawiono – przypis tłumacza.

Teraz, podstawiając do wzoru (3.39) $\boldsymbol{\omega}_I, \boldsymbol{\omega}_{II}, \boldsymbol{\omega}_{III}$ według wzorów (10.58) i $\boldsymbol{\omega}_{IV}, \boldsymbol{\omega}_V, \boldsymbol{\omega}_{VI}$, stosując wzory (10.67), otrzymujemy obszerną klasę materiałów sprężystych, których wskaźniki strukturalne, w ogólnym przypadku, są równe

$$\langle 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \rangle, \quad [6 + 6 + 3]. \quad (10.70)$$

Ciekawą podklasą jest tutaj zbiór materiałów, dla których

$$\lambda_I = \lambda_{II} = \lambda_{III}, \quad (10.71)$$

tj. dowolny tensor, którego osie główne pokrywają się z ustaloną bazą \mathbf{n}_i – jest tensorem własnym. Tensor sztywności ma postać

$$\mathbf{C} = \lambda_I \mathbf{P}_I + (\lambda_{IV} \mathbf{P}_{IV} + \lambda_V \mathbf{P}_V + \lambda_{VI} \mathbf{P}_{VI}), \quad (10.72)$$

gdzie

$$\mathbf{P}_I \equiv \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3, \quad (10.73)$$

a $\mathbf{P}_{IV}, \mathbf{P}_V, \mathbf{P}_{VI}$ są określone przez parametry dystrybutorów sztywności χ_4, χ_5, χ_6 . Wskaźniki strukturalne tej klasy są równe

$$\langle 1 + 1 + 1 + 3 \rangle, \quad [4 + 3 + 3]. \quad (10.74)$$

W powyższych przykładach przedstawiliśmy pewną jednolitą metodykę. Wzajemnie jednoznaczność zależności (3.27):

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_\rho, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_\rho) \leftrightarrow \mathbf{C}, \quad (10.75)$$

gdzie λ_i są parami różne, a \mathbf{P}_i stanowią ortogonalny rozkład jedynek, wykorzystaliśmy „od lewej do prawej”. Dla klasy ciał sprężystych określonych pewnym wyróżnionym zbiorem sprężystych stanów własnych (w przykładach były to zbiory czystych ścinań), ustaliliśmy wszystkie stany własne i na tej podstawie uzyskaliśmy ogólną postać tensora sztywności, tj. ogólną postać prawa Hooke’a dla tej klasy. Dodajmy, że zgodnie z (3.39) **dowolny** zbiór sześciu nieujemnych parametrów $\lambda_I, \dots, \lambda_{VI}$, które niekoniecznie są różne, z **dowolną** ortonormalną bazą $\boldsymbol{\omega}_I, \dots, \boldsymbol{\omega}_{VI}$ definiuje pewne teoretycznie możliwe ciało sprężyste,

$$(\lambda_I, \dots, \lambda_{VI}, \boldsymbol{\omega}_I, \dots, \boldsymbol{\omega}_{VI}) \leftrightarrow \mathbf{C}, \quad (10.76)$$

dla którego $\boldsymbol{\omega}_K$ będą stanami własnymi, a λ_K modułami sztywności.

§11 O klasyfikacji materiałów sprężystych

Rozsądna klasyfikacja ciał sprężystych jest niezbędna przy szerokiej gamie zastosowań. Jest ona wykorzystywana, w szczególności, w celu ograniczenia i usprawnienia pracy eksperymentatora, który wyznacza własności sprężyste rzeczywistych materiałów, oraz pracy inżyniera dobierającego materiał do projektowanej konstrukcji.

Jedyną kompleksową klasyfikacją ciał sprężystych, którą dzisiaj mamy, jest klasyfikacja według symetrii. Mimo wszystkich swoich zalet nie ma ona gdzie się zaczepić wtedy, gdy symetria znika. Nie rozróżnia ona także własności ciał o tej samej symetrii.

Wzór strukturalny w sposób naturalny ujawnia zupełnie nowe możliwości porównywania i rozróżniania ciał według własności sprężystych.

Klasyfikacje ciał sprężystych oparte na wzorze strukturalnym nie zostały jeszcze zbudowane. Tutaj ograniczamy się do postawienia problemu i kilku komentarzy.

Oznaczmy przez $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}$ cały zbiór tensorów o symetrii

$$\sigma \times \mathbf{C} = \mathbf{C} \quad \text{dla każdego} \quad \sigma = \langle 2 \ 1 \ 3 \ 4 \rangle, \langle 1 \ 2 \ 4 \ 3 \rangle, \langle 3 \ 4 \ 1 \ 2 \rangle. \quad (11.1)$$

Jest to 21-wymiarowa podprzestrzeń 36-wymiarowej przestrzeni \mathcal{T} . Przedmiotem naszych badań jest zbiór wszystkich ciał sprężystych, tj. zbiór $\mathcal{G} \subset \mathcal{T}$ wszystkich możliwych tensorów sztywności. Zgodnie z wymogiem nieujemności energii sprężystej \mathcal{G} składa się ze wszystkich nieujemnych tensorów z \mathcal{F}^* ,

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \geq 0 \quad \text{dla wszystkich} \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{S}. \quad (11.2)$$

Dla wygody zakładamy, że i $\mathcal{O} \in \mathcal{G}^{**}$.

* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{T}$ – przypis tłumacza.

**Chodzi o \mathcal{O} -orbity tensorów \mathbf{C} , por. tekst powyżej wzoru (2.4) – przypis tłumacza.

Oczywiście \mathcal{G} ma następujące własności:

- 1) dla każdych $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2 \in \mathcal{G}$ i $\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 \in \mathcal{G}$,
- 2) dla każdych $\mathbf{C} \in \mathcal{G}$, $\alpha \geq 0$ i $\alpha\mathbf{C} \in \mathcal{G}$,
- 3) dla dowolnego niezerowego $\mathbf{C} \in \mathcal{G}$ mamy $-\mathbf{C} \notin \mathcal{G}$.

Innymi słowy, zbiór ciał sprężystych tworzy **stożek** w podprzestrzeni \mathcal{F} [15].

Uwaga 9. Nie należy uważać, że dla dowolnego $\mathbf{C} \in \mathcal{F}$ prawdziwa jest alternatywa: \mathbf{C} lub $-\mathbf{C}$ należy do \mathcal{G} . \blacklozenge

Musimy więc jakoś opisać stożek $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. W rzeczywistości zadanie to może i powinno być zawężone.

Przede wszystkim jest całkowicie jasne, że musimy klasyfikować **materiały sprężyste** (\mathbf{C}) (orbity grupy \mathcal{O} w \mathcal{T}), a nie same ciała sprężyste \mathbf{C} . Stożek \mathcal{G} składa się z materiałów. **Zbiór materiałów sprężystych**, tj. zbiór orbit na stożku \mathcal{G} oznaczymy przez \mathcal{H} . Ponadto przydatne jest zebranie materiałów w następujących rozłącznych klasach.

Będziemy mówić, że ciała \mathbf{C} i \mathbf{C}' należą do jednego typu sprężystego, jeśli ich systemy przestrzeni stanów własnych ($\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_\rho$ i $\mathcal{P}'_1, \dots, \mathcal{P}'_\rho$) pokrywają się z dokładnością do pewnego obrotu.

Innymi słowy, **typ sprężysty**, do którego należy pewne ciało \mathbf{C} o wzorze strukturalnym

$$\mathbf{C} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \dots + \lambda_\rho \mathbf{P}_\rho, \quad (11.3)$$

to zbiór $[\mathbf{C}]$ składający się ze wszystkich ciał sprężystych postaci

$$\mathbf{C}' = x_1 \mathbf{Q} * \mathbf{P}_1 + \dots + x_\rho \mathbf{Q} * \mathbf{P}_\rho, \quad (11.4)$$

gdzie \mathbf{Q} przebiega przez całą grupę \mathcal{O} , a (x_1, \dots, x_ρ) przebiega przez wszystkie możliwe kombinacje ρ parametrów – dodatnich i parami różnych.

Zbiór materiałów \mathcal{H} dzieli się na przecinające się typy sprężyste.

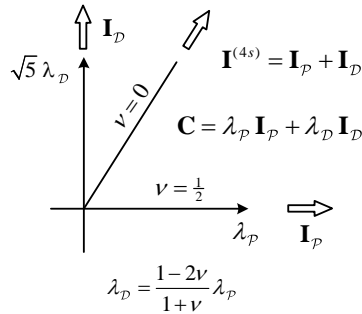
Jak widać, typ sprężysty $[\mathbf{C}]$ jest $\rho(\mathbf{C})$ parametrycznym zbiorem materiałów, $\rho(\mathbf{C}) \leq 6$.

Najprostszy typ sprężysty składa się z idealnie sprężystych ciał (10.1). Jest to jedyny typ 1-parametrowy. W przestrzeni \mathcal{T} ma on postać promienia $\lambda \mathbf{I}^{(4s)}$, $\lambda > 0$.

Kolejnym najprostszym typem sprężystym jest zbiór wszystkich izotropowych ciał sprężystych z niezerowym współczynnikiem Poissona. Jest to typ 2-parametrowy (10.6). W przestrzeni odpowiada mu kął prosty,

$$\lambda_{\mathcal{P}} \mathbf{I}_{\mathcal{P}} + \lambda_{\mathcal{D}} \mathbf{I}_{\mathcal{D}}, \quad \lambda_{\mathcal{P}}, \lambda_{\mathcal{D}} > 0, \quad (11.5)$$

położony na 2-wymiarowej płaszczyźnie izotropowych tensorów z \mathcal{F} . Wiązka idealnych materiałów wydziela w tym kącie kąt ostry $\lambda_P \geq \lambda_D > 0$, w którym najwyraźniej znajdują się wszystkie rzeczywiste ciała izotropowe (rys. 9).



Rys. 9. Ilustracja graficzna dwuwymiarowej przestrzeni parametrycznej materiałów izotropowych. Skośną linią zaznaczono materiał idealnie sprężysty, dla którego współczynnik Poissona ma wartość zerową $\nu = 0$.

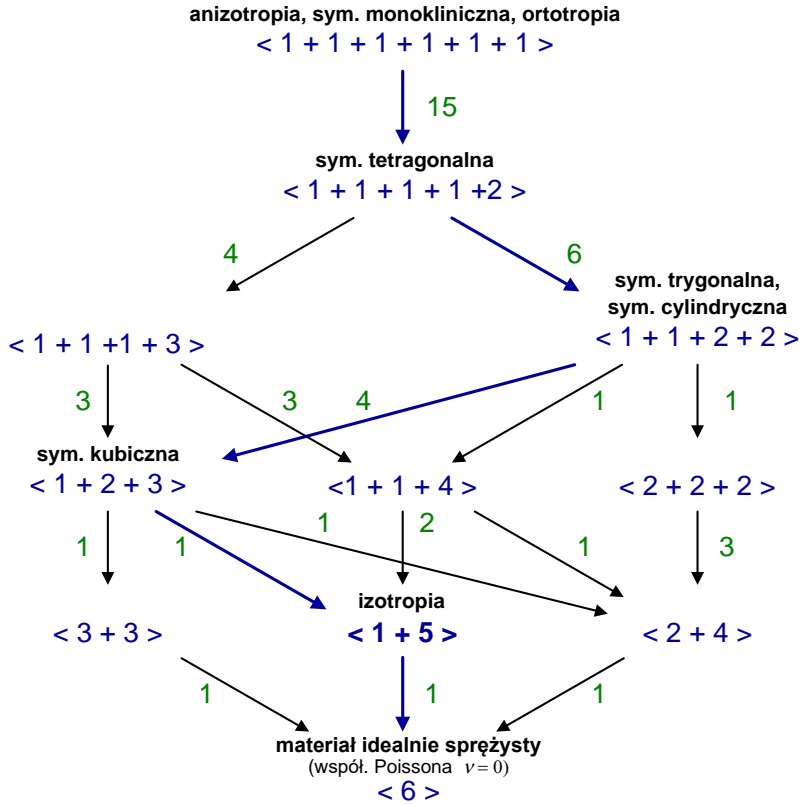
Zauważymy, że wszystkie pozostałe typy sprężyste są reprezentowane w \mathcal{F} zbiorami zakrzywionymi.

Zbiór wszystkich poprzecznie izotropowych ciał sprężystych z zadaniem $\chi = \text{const}$ składa się z 15 typów sprężystych: jednego 4-parametrowego, sześciu 3-parametrowych, siedmiu 2-parametrowych i jednego 1-parametrowego. Zbiór wszystkich, w ogólności, poprzecznie-izotropowych ciał sprężystych składa się, mówiąc umownie, z $15 \cdot \infty$ typów sprężystych, ponieważ $\chi \in [0, \pi/2)$.

Oczywiście konieczne jest dalsze uszczegółowienie podziału zbioru ciał sprężystych. Można to zrobić na różne sposoby.

Można, na przykład, zebrać razem wszystkie typy sprężyste o tym samym pierwszym wskaźniku strukturalnym. Nazwiemy takie zbiory **modami sprężystymi**. Mod sprężysty można po prostu utożsamiać z pierwszym wskaźnikiem strukturalnym wchodzących do niego ciał sprężystych.

Będziemy mówili, że mod sprężysty $\langle k_1 + \dots + k_t \rangle$ podlega modowi sprężystemu $\langle m_1 + \dots + m_u \rangle$, jeśli $t < u$, przy czym k_i albo są równe niektórym spośród m_i , albo są ich sumami. Modów sprężystych jest ogółem 11. Schemat ich podporządkowania jest pokazany na rys. 10. Mod \mathcal{B} jest podporządkowany modowi \mathcal{A} , jeśli z \mathcal{A} do \mathcal{B} można przejść według pokazanych strzałek. k -ty poziom schematu składa się ze wszystkich materiałów z parami różnych wartościami modułów sztywności $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, przejście z k -tego na $(k-1)$ -wszy poziom odbywa się poprzez zrównanie wartości dwóch modułów spośród $\lambda_1, \dots, \lambda_k$; przy strzałkach na rys. 10 podano liczbę możliwych zrównań.



Rys. 10. Ilustracja graficzna klasyfikacji typów materiałów sprężystych ze względu na pierwszy indeks strukturalny, tj. ilość i krotność liniowo niezależnych rzeczywistych modułów sprężystości. Takich typów jest 11. (Opisy klas symetrii oraz kolory i wytłuszczenie strzałek dodane przez tłumacza.)

Mod sprężysty $\langle 6 \rangle$ jest, oczywiście, jednym typem sprężystym $[\mathbf{I}^{(4s)}]$. Mody sprężyste na poziomach powyżej pierwszego składają się z nieskończonej liczby typów sprężystych. Na przykład mod sprężysty $\langle 1 + 5 \rangle$ składa się ze wszystkich ciał sprężystych

$$\mathbf{C} = \lambda_{\omega} \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega} + \lambda \left(\mathbf{I}^{(4s)} - \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega} \right), \quad (11.6)$$

gdzie λ_{ω} , $\lambda > 0$, a $\boldsymbol{\omega}$ to ustalony dowolnie tensor symetryczny. Tutaj $\boldsymbol{\omega}$ i dowolny tensor ortogonalny do $\boldsymbol{\omega}$ są sprężystymi stanami własnymi. Ciała izotropowe są szczególnym przypadkiem ciał typu $\langle 1 + 5 \rangle$, gdy

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\sqrt{3}}{3} \mathbf{1} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}_p. \quad (11.7)$$

Materiały tego samego typu sprężystego mogą znacznie różnić się charakterem stanów własnych i symetrią, ponieważ pierwszy wskaźnik strukturalny uwzględnia tylko wymiar przestrzeni stanów własnych.

Inne metody klasyfikacji oparte na znacznie dokładniejszym uwzględnianiu stanów własnych wymagają dużo bardziej subtelnych rozważań, nad którymi tutaj nie będziemy się zatrzymywać.

Uwaga 10. W całym tym paragrafie przyjmowaliśmy, że na ciało nie nałożono sztywnych więzów. Klasyfikacja ciał ze sztywnymi więzami powinna być przeprowadzona przy użyciu tensorów podatności \mathbf{S} , dopuszczając możliwość równości zera niektórych spośród podatności λ_i^{-1} . ♦

§12 Symetria i sprzężyste stany własne

Przypomnijmy na początku dwie fundamentalne definicje.

1. **Grupą symetrii tensora** p -tego rzędu $\mathbf{A} \in T_p$ nazywa się podgrupę $\mathcal{O}_{\mathbf{A}} \subset \mathcal{O}$ składającą się z tych $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}$, pod działaniem których \mathbf{A} nie ulega zmianie,

$$\mathbf{Q} * \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

2. Niech $G \subset \mathcal{O}$ będzie podgrupą grupy \mathcal{O} . Podprzestrzeń \mathcal{P} przestrzeni tensorów p -tego rzędu T_p nazywana jest G -stabilną, jeśli działanie dowolnego $\mathbf{Q} \in G$ nie wyprowadza z \mathcal{P} , tj. z $\mathbf{A} \in \mathcal{P}$ wynika, że $\mathbf{Q} * \mathbf{A} \in \mathcal{P}$. Podprzestrzenie G -stabilne i nie zawierające G -stabilnych podprzestrzeni własnych nazywa się **nieredukowalnymi**. Rozkład $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_\rho$ przestrzeni $T_p = \mathcal{P}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_\rho$ nazywa się G -stabilnym, jeśli wszystkie \mathcal{P}_i są G -stabilne; w tym przypadku \mathcal{P}_i są parami ortogonalne względem iloczynu skalarnego:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv A_{i \dots j} B_{i \dots j}.$$

G -stabilny rozkład nazywa się **nieredukowalnym**, jeśli wszystkie \mathcal{P}_i są nieredukowalne.

Grupą symetrii sprzężystej ciała nazwiemy, jak zwykle, grupę symetrii $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ jego tensora sztywności \mathbf{C} . Stosując wzór strukturalny, otrzymujemy następujące **twierdzenie o sprzężystej symetrii**:

Twierdzenie 11. Grupa sprzężystej symetrii ciała jest równa części wspólnej grup symetrii jego projektorów własnych

$$\mathcal{O}_{\mathbf{C}} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_1} \cap \dots \cap \mathcal{O}_{\mathbf{P}_\rho}. \quad (12.1)$$

Dowód. Niech wzór strukturalny ciała \mathbf{C} ma postać $\mathbf{C} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \dots + \lambda_\rho \mathbf{P}_\rho$ i niech

$$\mathbf{Q} \in \mathcal{O}_{\mathbf{P}_1} \cap \dots \cap \mathcal{O}_{\mathbf{P}_\rho}, \quad \text{tj.} \quad \mathbf{Q} * \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i, \quad (12.2)$$

wtedy

$$\mathbf{Q} * \mathbf{C} = \lambda_1 \mathbf{Q} * \mathbf{P}_1 + \dots = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \dots = \mathbf{C}, \quad (12.3)$$

tj. $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$. Na odwrót, niech $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$. Wtedy

$$\lambda_1 \mathbf{Q} * \mathbf{P}_1 + \dots = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \dots \quad (12.4)$$

Ponieważ \mathbf{P}_1, \dots jest ortogonalnym rozkładem jedynek, zatem $\mathbf{Q} * \mathbf{P}_1, \dots$ jest ortogonalnym rozkładem jedynek, tj. po obu stronach równości jest zapisany materiałowy rozkład pewnego tensora sztywności. Ponieważ rozkład materiałowy jest jednoznaczny, zatem $\mathbf{Q} * \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i$ dla $i = 1, \dots, \rho$. ♦

We wzorze symetrii (12.1) można, oczywiście, opuścić jeden (dokładnie jeden!) projektor

$$\mathcal{O}_{\mathbf{C}} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_1} \cap \dots \cap \mathcal{O}_{\mathbf{P}_{\nu-1}} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{P}_{\nu+1}} \cap \dots \cap \mathcal{O}_{\mathbf{P}_\rho}, \quad (12.5)$$

ponieważ $\mathbf{P}_\nu = \mathbf{I}^{(4s)} - (\mathbf{P}_1 + \dots + \mathbf{P}_{\nu-1} + \mathbf{P}_{\nu+1} + \dots + \mathbf{P}_\rho)$ i $\mathbf{Q} * \mathbf{I}^{(4s)} = \mathbf{I}^{(4s)}$ dla dowolnego $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}$.

Zilustrujemy to twierdzenie prostym, ale ważnym przykładem.

Przykład. Rozważymy ciało typu $\langle 1 + 5 \rangle$, tj.

$$\mathbf{C} = \lambda \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega} + \lambda' (\mathbf{I}^{(4s)} - \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega}). \quad (12.6)$$

Zgodnie z (12.5) symetria sprężysta tego ciała jest opisywana bardzo prostym wzorem:

$$\mathcal{O}_{\mathbf{C}} = \mathcal{O}_{\boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega}}. \quad (12.7)$$

Ta grupa składa się ze wszystkich $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}$, spełniających równanie

$$\mathbf{Q} * (\boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega}) \equiv \mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega}, \quad (12.8)$$

tj.

$$\mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{Q} \boldsymbol{\omega} \mathbf{Q}^T = \pm \boldsymbol{\omega}. \quad (12.9)$$

Znak „minus” w tym wzorze jest możliwy tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{\omega}$ jest czystym ścinaniem. Rzeczywiście, jeśli $\mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}$, to

$$\det(\boldsymbol{\omega}) = \det(\mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega}) = -\det(\boldsymbol{\omega}), \quad (12.10)$$

$$\text{tr}(\boldsymbol{\omega}) = \text{tr}(\mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega}) = -\text{tr}(\boldsymbol{\omega}),$$

tj.

$$\det(\boldsymbol{\omega}) = \text{tr}(\boldsymbol{\omega}) = 0. \quad (12.11)$$

Wyrazimy $\boldsymbol{\omega}$ przez wektory własne \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} i wartości własne a , b , c ,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= a \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + b \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + c \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 1.\end{aligned}\tag{12.12}$$

W przypadku (12.11) jedna z wartości własnych, powiedzmy c , jest równa zeru i mamy

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c = 0.\tag{12.13}$$

Teraz, jeśli $\boldsymbol{\omega}$ nie jest czystym ścinaniem, to grupa symetrii sprężystej jest po prostu równa grupie symetrii sprężystego stanu własnego $\boldsymbol{\omega}$

$$\mathcal{O}_{\mathbf{C}} = \mathcal{O}_{\boldsymbol{\omega}}.\tag{12.14}$$

W ogólnym przypadku, gdy $a \neq b \neq c \neq a$, wówczas $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\omega}}$ jest grupą symetrii trójosiowej elipsoidy, tj. $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\omega}} = D_{2h}$, i wtedy ciało jest ortotropowe. Osiami ortotropii są osie tensora $\boldsymbol{\omega}$. Jeśli $a = b \neq c$, to ciało jest poprzecznie izotropowe z osią \mathbf{n} , a jeśli $a = b = c$, to ciało jest izotropowe.

Jeśli stan własny $\boldsymbol{\omega}$ jest czystym ścinaniem

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}),\tag{12.15}$$

to wszystkie rozwiązania \mathbf{Q} równania (12.9) stanowią grupę symetrii piramidy o podstawie kwadratu z osią \mathbf{n} , $\mathcal{O}_{\mathbf{C}} = D_{4h}$ (symetria tetragonalna).

Rozpatrzmy szerszą klasę ciał

$$\mathbf{C} = \lambda_{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega} + \lambda_{\boldsymbol{\tau}} \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau} + \lambda' (\mathbf{I}^{(4s)} - \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}).\tag{12.16}$$

Wskaźniki strukturalne są tutaj równe

$$\langle 1 + 1 + 4 \rangle, \quad [3 + 6 + 3].\tag{12.17}$$

Wzór symetrii (12.5) ma postać

$$\mathcal{O}_{\mathbf{C}} = \mathcal{O}_{\boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega}} \cap \mathcal{O}_{\boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}}.\tag{12.18}$$

Jeśli tylko stany własne $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\tau}$ nie mają żadnych wspólnych wektorów własnych, to przecięcie to jest trywialne, a ciało jest całkowicie asymetryczne (symetria trójskośna). Ten przykład ilustruje szybką utratę symetrii sprężystej, gdy struktura staje się bardziej złożona.

Wróćmy do ogólnego twierdzenia 11. Stawiamy następujący problem:

wyznaczyć wszystkie sprężyste stany własne wszystkich ciał sprężystych, które są symetryczne względem zadanej podgrupy $G \subset \mathcal{O}$, tj. spełniających zależność:

$$G \subset \mathcal{O}_{\mathbf{C}}. \quad (12.19)$$

Innymi słowy, mówimy o wyznaczeniu wszystkich sprężystych stanów własnych kryształów o zadanej symetrii G .

Twierdzenie o symetrii sprężystej (12.1) sprawia, że problem ten jest nie tylko zauważalny, ale także jest całkowicie rozwiązywalny dla wszystkich kryształów. Przede wszystkim zauważamy, że zgodnie z tym twierdzeniem powyższy problem można przeformułować w następujący sposób:

znajdź wszystkie ortogonalne rozkłady jedynki

$$\mathbf{P}_1 + \dots + \mathbf{P}_\rho = \mathbf{I}^{(4s)}, \quad \rho \leq 6, \quad (12.20)$$

niezmiennicze względem zadanej podgrupy $G \subset \mathcal{O}$, tj. spełniające relację

$$G \subset \mathcal{O}_{\mathbf{P}_i} \quad \text{dla wszystkich} \quad i = 1, \dots, \rho. \quad (12.21)$$

Po rozwiązaniu tego problemu łatwo uzyskamy ogólną postać tensorów sztywności \mathbf{C} dla rozważanych ciał.

Ponadto, nie trudno jest udowodnić następujący lemat.

Lemat 3. Projektor ortogonalny \mathbf{P} na podprzestrzeń $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ jest symetryczny względem G , tj. $G \subset \mathcal{O}_{\mathbf{P}}$, wtedy i tylko wtedy, gdy \mathcal{P} jest G -stabilne.

Dowód. Niech $G \subset \mathcal{O}_{\mathbf{P}}$. Weźmy dowolne $\mathbf{Q} \in G$ i $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}$. Ponieważ $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}$, zatem

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{Q} * \mathbf{P}) \cdot (\mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{Q} * (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega}, \quad (12.22)$$

tj. również $\mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}$. To znaczy, że \mathcal{P} jest G -stabilne. Na odwrót, jeśli \mathcal{P} jest G -stabilne, tj. dla dowolnych $\mathbf{Q} \in G$, $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}$ oraz $\mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}$, to

$$\mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q} * (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{Q} * \mathbf{P}) \cdot (\mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega}), \quad (12.23)$$

tj.

$$(\mathbf{Q} * \mathbf{P}) \cdot \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau} \quad \text{dla dowolnego} \quad \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{P}. \quad (12.24)$$

Ponieważ ortogonalne dopełnienie \mathcal{P}^\perp także jest G -stabilne, to dla dowolnego $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}^\perp$ mamy $\mathbf{Q}^T * \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}^\perp$ i dlatego

$$(\mathbf{Q} * \mathbf{P}) \cdot \boldsymbol{\mu} = (\mathbf{Q} * \mathbf{P}) \cdot [\mathbf{Q} * (\mathbf{Q}^T * \boldsymbol{\mu})] = \mathbf{Q} * [\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q}^T * \boldsymbol{\mu})] = 0. \quad (12.25)$$

Z (12.24) i (12.25) wynika, że $\mathbf{Q} * \mathbf{P}$ jest projektorem na \mathcal{P} , $\mathbf{Q} * \mathbf{P} = \mathbf{P}$, tj. $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}_{\mathbf{P}}$. \blacklozenge

Udowodniony lemat ogranicza problem znalezienia wszystkich niezmienniczych względem G rozkładów jedynki do problemu znalezienia wszystkich G -stabilnych rozkładów przestrzeni \mathcal{S} . Ale wszystkie takie rozkłady będą znane, jeśli znajdziemy wszystkie nieredukowalne rozkłady. Wobec tego **zadanie znalezienia wszystkich sprężystych stanów własnych kryształów o zadanej symetrii G jest równoważne następującemu prostemu zadaniu:**

uzyskać wszystkie nieredukowalne G -stabilne rozkłady

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_\rho. \quad (12.26)$$

Gdy tylko zostaną one znalezione, prawo Hooke'a jest określone wzorem (3.27).

Jeśli $G = \mathcal{O}$, to zadanie jest trywialne. Rzeczywiście, jedynym nieredukowalnym \mathcal{O} -stabilnym rozkładem \mathcal{S} jest rozkład na sumę przestrzeni tensorów sferycznych \mathcal{P} i przestrzeni dewiatorów \mathcal{D} , tj. rozkład (10.3), skąd bezpośrednio wynika (10.6). To zdanie jest być może rekordowo krótkim wyprowadzeniem prawa Hooke'a dla ciała izotropowego (patrz na przykład [25]).

Zwrócimy jeszcze uwagę na następujący fakt, który znacznie ułatwia znalezienie przestrzeni sprężystych stanów własnych kryształów.

Twierdzenie 12. Niech \mathcal{P} będzie przestrzenią wszystkich odpowiadających modułowi sztywności λ sprężystych stanów własnych ciała \mathbf{C} , symetrycznego pod względem własności sprężystych względem grupy G . Rozważymy liniową powłokę G -orbity tensora $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}$

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\omega}) \equiv \text{Lin}(G * \boldsymbol{\omega}). \quad (12.27)$$

Dla dowolnego $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}$ zachodzi więc

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\omega}) \subset \mathcal{P}. \quad (12.28)$$

Jeśli \mathcal{P} jest nierozkładalna, to

$$\mathcal{P} = \mathcal{R}(\boldsymbol{\omega}). \quad (12.29)$$

Dowód. Dowolny tensor $\alpha \in \mathcal{R}$ ma postać

$$\alpha = a_1 \mathbf{Q}_1 * \omega + \dots + a_k \mathbf{Q}_k * \omega, \quad (12.30)$$

gdzie $\mathbf{Q}_i \in \mathcal{O}$. Ponieważ

$$\mathbf{C} \cdot \omega = \lambda \omega, \quad \mathbf{Q}_i * \mathbf{C} = \mathbf{C}, \quad (12.31)$$

zatem

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot \alpha &= a_1 \mathbf{C} \cdot (\mathbf{Q}_1 * \omega) + \dots = \\ &= a_1 (\mathbf{Q}_1 * \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{Q}_1 * \omega) + \dots = \\ &= a_1 \mathbf{Q}_1 * (\mathbf{C} \cdot \omega) + \dots = \\ &= \lambda [a_1 \mathbf{Q}_1 * \omega + \dots] = \lambda \alpha, \end{aligned} \quad (12.32)$$

tj. $\alpha \in \mathcal{P}$, co dowodzi (12.28). Jeśli \mathcal{P} jest nierozkładalny, to $\mathcal{P} = \mathcal{R}(\omega)$, ponieważ $\mathcal{R}(\omega)$, oczywiście, jest G -stabilne. \blacklozenge

Na przykład przestrzeń dewiatorów \mathcal{D} można zapisać w postaci

$$\mathcal{D} = \text{Lin}(\mathcal{O} * \tau), \quad (12.33)$$

gdzie τ jest dowolnym ustalonym ścinaniem!

W pracy [24] postawiony problem (12.26) został rozwiązany dla wszystkich kryształów.

§13 Plastyczność i inne uogólnienia

Czytelnik, który miał cierpliwość, aby prześledzić prezentowany wykład do tego miejsca, oczywiście rozumie, że można go odgrywać z innym głównym bohaterem.

Rozważymy **płynięcie sztywno-plastycznych anizotropowych ciał z kwadratowym potencjałem plastycznym** (patrz na przykład [26])

$$2\Psi(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (13.1)$$

Prawo płynięcia ma postać:

$$\boldsymbol{\delta} = \lambda \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \Psi = \lambda \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (13.2)$$

gdzie $\boldsymbol{\delta} \equiv \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$ jest tensorem prędkości deformacji, \mathbf{v} jest polem prędkości cząstek*

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}} \geq 0. \quad (13.3)$$

Wystarczy zauważyć co następuje:

Tensor anizotropii plastycznej \mathbf{H} ma dokładnie taką samą wewnętrzną symetrię jak tensor sztywności \mathbf{C}^{**} ,

$$H_{ijkl} = H_{jikl} = H_{klij}.$$

Z tego powodu **wszystkie podstawowe wzory tej pracy obowiązują również dla tensora \mathbf{H}** . Zwracamy uwagę tylko na te najważniejsze. Wzory strukturalne dla tensora \mathbf{H} mają postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{k_1^2} \mathbf{P}_1 + \dots + \frac{1}{k_\rho^2} \mathbf{P}_\rho = \\ &= \frac{1}{k_I^2} \boldsymbol{\omega}_I \otimes \boldsymbol{\omega}_I + \dots + \frac{1}{k_{VI}^2} \boldsymbol{\omega}_{VI} \otimes \boldsymbol{\omega}_{VI}, \end{aligned} \quad (13.4)$$

*Poprawiono błąd typograficzny we wzorze (13.3) zamieniając ϵ na $\boldsymbol{\delta}$ – przypis tłumacza.

** \mathbf{H} stanowi raczej odpowiednik tensora podatności \mathbf{S} – przypis tłumacza.

gdzie $\omega_I, \dots, \omega_{VI}$ są **plastycznymi stanami własnymi** rozpatrywanego ciała, a k_I, \dots, k_{VI} są **granicami płynięcia plastycznego**.

Kwadratowy warunek płynięcia dla ciała z dowolną anizotropią

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 1 \quad (13.5)$$

otrzymuje następującą postać:

$$\left[\left(\frac{|\boldsymbol{\sigma}_I|}{k_I} \right)^2 + \dots + \left(\frac{|\boldsymbol{\sigma}_\rho|}{k_\rho} \right)^2 = 1 \right], \quad (13.6)$$

gdzie

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha \equiv \mathbf{P}_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (13.7)$$

wyraża istotę rzutu tensora naprężenia na przestrzenie plastycznych stanów własnych \mathcal{P}_α , $\alpha = 1, \dots, \rho$. Jeśli wykorzystamy wielkości $\sigma_K \equiv \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}_K$, $K = I, \dots, VI$ to warunek płynięcia plastycznego można zapisać w postaci

$$\left(\frac{|\boldsymbol{\sigma}_I|}{k_I} \right)^2 + \dots + \left(\frac{|\boldsymbol{\sigma}_{VI}|}{k_{VI}} \right)^2 = 1. \quad (13.8)$$

Zbiór stałych, opisujących w najbardziej ogólnym przypadku płynięcie plastyczne ciała z kwadratowym warunkiem płynięcia i stowarzyszonym z nim prawem płynięcia będzie składał się z 6 **granic plastyczności**, 12 **dystrybutorów płynięcia** i 3 **kątów orientacji** względem laboratoryjnego układu współrzędnych.

W szczególnych przypadkach liczba stałych się zmniejsza.

Na przykład, dla **ciała poprzecznie izotropowego** liczba stałych wynosi 5:

$$k_1, k_2, k_3, k_4, \varphi \quad (13.9)$$

(por. (10.41)), gdzie k_i to granice płynięcia, a φ , $0 \leq \varphi < \pi/2$, to dystrybutor płynięcia. Kwadratowy warunek płynięcia dla poprzecznie-izotropowego ciała będzie miał, z uwagi na (10.48) i $k_{III} = k_{IV}$, $k_V = k_{VI}$ następującą postać:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k_1^2} \left[(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \sin(\varphi) + \sqrt{2} \sigma_{33} \cos(\varphi) \right]^2 + \\ & + \frac{1}{k_2^2} \left[(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \cos(\varphi) - \sqrt{2} \sigma_{33} \sin(\varphi) \right]^2 + \\ & + \frac{1}{k_3^2} (\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) + \frac{1}{k_4^2} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2 \right] = 2. \end{aligned} \quad (13.10)$$

Dla **ciała izotropowego** zgodnie (10.6) otrzymujemy

$$\mathbf{H} = \frac{1}{k_{\mathcal{P}}^2} \mathbf{I}_{\mathcal{P}} + \frac{1}{k_{\mathcal{D}}^2} \mathbf{I}_{\mathcal{D}}. \quad (13.11)$$

Warunek płynięcia (13.6) przyjmuje postać

$$\left(\frac{\sigma_{\mathcal{P}}}{k_{\mathcal{P}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\mathcal{D}}}{k_{\mathcal{D}}}\right)^2 = 1. \quad (13.12)$$

Jeśli założymy, że żadne ciśnienie hydrostatyczne nie może prowadzić do płynięcia plastycznego, to należy przyjąć

$$\frac{1}{k_{\mathcal{P}}} = 0. \quad (13.13)$$

Wtedy otrzymamy:

$$|\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{D}}|^2 = k_{\mathcal{D}}, \quad (13.14)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{k_{\mathcal{D}}^2} \mathbf{I}_{\mathcal{D}}, \quad (13.15)$$

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{\boldsymbol{\delta}_{\mathcal{D}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{D}}}{k_{\mathcal{D}}^2} \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{D}}. \quad (13.16)$$

Jest to zwykły wariant teorii ciała sztywno-plastycznego z warunkiem płynięcia Hubera–Misesa, gdzie $k_{\mathcal{D}}/\sqrt{2}$ oznacza granicę plastyczności dla ścinania.

Narzuca się następujące uogólnienie teorii płynięcia z kwadratowym potencjałem (13.1), (13.2), (13.4), (13.5). Weźmiemy ustalony z góry materiałowy rozkład jedynek

$$\mathbf{P}_1 + \dots + \mathbf{P}_{\rho} = \mathbf{I}^{(4s)}, \quad (13.17)$$

wprowadzimy projekcje

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \dots + \boldsymbol{\sigma}_{\rho}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} \equiv \mathbf{P}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (13.18)$$

i przyjmijmy warunek płynięcia w postaci

$$|\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}|^2 \leq k_{\alpha}^2, \quad \alpha = 1, \dots, \rho. \quad (13.19)$$

Stowarzyszone prawo płynięcia ma tutaj postać

$$\boldsymbol{\delta} = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \lambda_{\alpha} \boldsymbol{\sigma}_{\alpha}, \quad (13.20)$$

gdzie

$$\lambda_\alpha = 0 \quad \text{dla każdego} \quad |\sigma_\alpha| < k_\alpha. \quad (13.21)$$

Łącząc odpowiednio (2.1) z (13.2), otrzymamy **teorię ciał sprężysto-idealnie-plastycznych**. Tutaj powstaje pytanie, jaki jest związek pomiędzy \mathbf{C} i \mathbf{H} , tj. związek pomiędzy własnościami sprężystymi i plastycznymi. Najprostszą szczególną hipotezą jest to, że \mathbf{C} i \mathbf{H} mają wspólne stany własne.

Nie będziemy kłopotać czytelnika dalszymi oczywistymi zastosowaniami opracowanych przez nas pomysłów, na przykład w zakresie **lepkosprężystości**.

Zamiast tego zwrócimy uwagę na następującą nietrywialną możliwość uogólnienia naszego podejścia do sprężystości nieliniowej. Jedną z prostych, ale niezwykle powszechnych, klas nieliniowych ciał sprężystych jest klasa

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (13.22)$$

gdzie

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \lambda_1(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{P}_1 + \dots + \lambda_\rho(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{P}_\rho, \quad (13.23)$$

przy czym projektory \mathbf{P}_ν , stanowią aprioryczny materialny rozkład jedynki

$$\mathbf{P}_1 + \dots + \mathbf{P}_\rho = \mathbf{I}^{(4s)}, \quad (13.24)$$

niezależny od $\boldsymbol{\varepsilon}$. Wydaje mi się, że ten przypadek będzie realizowany dla **małych deformacji fizycznie nieliniowych ciał sprężystych**. Stany własne w (13.23) są ustalone i tylko moduły sztywności zależą od odkształcenia.

Na podstawie (13.22) i (13.23) można, najwyraźniej, skonstruować niezły wariant teorii **małych odkształceń sprężysto-plastycznych**.

W szczególnym przypadku dla izotropii $\rho = 2$, $\mathbf{P}_1 = \mathbf{I}_{\mathcal{P}}$, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{I}_{\mathcal{D}}$ (patrz (10.6)) będzie to teoria Hencky'ego–Iljuszyna.

Związek (13.22) i (13.23) pomiędzy $\boldsymbol{\sigma}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}$ nazwiemy **quasi-liniowym**.

§14 Uwagi końcowe

Zastanówmy się nad niektórymi otwartymi problemami.

1. Proponowane podejście jest skoncentrowane przede wszystkim na opisie tego „jak jest zbudowane” ciało sprężyste. Będzie ono, w oczywisty sposób, przydatne przy badaniu ogólnych jakościowych problemów teorii sprężystości ciał anizotropowych. Możemy również oczekiwać jego skuteczności w przypadku niektórych problemów brzegowych. Jeśli wykorzystamy pełen rozkład σ po sprężystych stanach własnych (5.9), to równanie ruchu można zapisać w następującej postaci

$$\operatorname{div}(\sigma_I \omega_I + \dots + \sigma_{VI} \omega_{VI}) + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a},$$

gdzie \mathbf{b} to natężenie sił masowych, \mathbf{a} to przyspieszenie. Jeśli ω_K są jednorodne, to równanie ruchu wyrażone w naprężeniach ma postać

$$\omega_I \nabla \sigma_I + \dots + \omega_{VI} \nabla \sigma_{VI} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a},$$

gdzie $\nabla \sigma_K$ oznacza gradient skalarnego pola $\sigma_K \equiv \sigma \cdot \omega_K$. Podstawiając tutaj prawo Hooke'a w postaci (5.11) i używając związku ε_K z wektorem przemieszczenia \mathbf{u}

$$\varepsilon_K = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \omega_K = \omega_K \cdot \nabla \mathbf{u},$$

otrzymamy równania ruchu wyrażone w przemieszczeniach.

2. Wracając do głównego tematu naszych konstatacji, należy zauważyć, że sukces w ich zastosowaniu będzie, jak się zdaje, determinowany postępem prac w dwóch kierunkach:
 - a) w opracowywaniu podejść teoretycznych łączących ujawnioną **strukturę matematyczną** ciała sprężystego, opisywaną jego sprężystymi stanami własnymi i modułami sztywności ze **strukturą fizyczną**, opisywaną,

powiedzmy, w przypadku kompozytów, stałymi materiałowymi komponentów, charakterystykami geometrycznymi ich wzajemnego położenia, parametrami styku i połączenia itp.;

- b) w opracowaniu efektywnych i ekonomicznych procedur eksperymentalnych określania stanów własnych sprężystości i modułów sztywności bezpośrednio z testów makroskopowych, z wykorzystaniem rozwiązań standardowych problemów brzegowych.
3. Fizyczna realizacja spektralnego twierdzenia teorii operatorów liniowych w postaci wzoru strukturalnego ciała sprężystego może być stosowana przez matematyków jako doskonała ilustracja, tak jak powiedzmy, płaskie przepływy płynu nieściśliwego służą jako ilustracje teorii odwzorowań konformalnych.

Z przyjemnością wyrażam głębokie uznanie dla kierownictwa Akademii Nauk ZSRR i Instytutu Problemów Mechaniki za zapewnienie warunków, dzięki którym można było ukończyć tę pracę. Praca była omawiana na seminariach w Instytucie Problemów Mechanicznych Akademii Nauk ZSRR, na wydziałach teorii sprężystości i teorii plastyczności na Uniwersytecie Moskiewskim, w Instytucie Krystalografii Akademii Nauk ZSRR, a wcześniej w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk. Jestem wdzięczny kierownikom tych seminariów A.Yu. Iszlinskiemu, A.A. Iljuszynowi, V.D. Kljusznikowowi, V.L. Indenbomowi, W. Szczepińskiemu oraz wszystkim uczestnikom dyskusji za rzeczowe i przyjacielskie komentarze. Jestem wdzięczny za przyjazne zainteresowanie uzyskanymi wynikami przez moich współpracowników A. Blinowskiego i J. Ostrowskiej.

Warszawa, 1969 r. – Moskwa, 1983 r.

Dodatki

Dodatek A. Tensory euklidesowe

W mechanice ośrodków ciągłych, z wyjątkiem niektórych specyficznych obszarów (relatywistyczna mechanika ośrodków ciągłych, kontynualna teoria dyslokacji itp.), wykorzystuje się tylko tensory euklidesowe. Zwrócimy uwagę na niektóre najważniejsze punkty ich teorii algebraicznej, nie zawsze wyraźnie postrzegane przez użytkowników tak zwanego „rachunku tensorowego”, redukowanego często do, po prostu, żonglerki indeksami.

Tensory euklidesowe p -tego rzędu to elementy p -krotnego iloczynu tensorowego [I–III]

$$T_p = \underbrace{E \otimes \dots \otimes E}_{p \text{ razy}}, \quad (\text{A.1})$$

gdzie E to pierwotna euklidesowa przestrzeń wektorowa, którą przyjmujemy jako 3-wymiarową; dla $p = 0$ są to liczby, dla $p = 1$ wektory \mathbf{a} , z samej przestrzeni E . Innymi słowy, T_p jest liniową przestrzenią, w której bazę stanowi 3^p tensorów prostych

$$\mathbf{e}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_j, \quad i, \dots, j = 1, 2, 3, \quad (\text{A.2})$$

gdzie \mathbf{e}_i stanowi bazę w E , a symbol mnożenia tensorowego \otimes ma własność wieloliniowości. Każdy tensor $\mathbf{A} \in T_p$ można zatem przedstawić w postaci

$$\mathbf{A} = A^{i \dots j} \mathbf{e}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_j. \quad (\text{A.3})$$

Wszystkie zwyczajne zasady przeliczania reprezentacji $A^{i \dots j}$ tensora \mathbf{A} z jednej bazy do innej wynikają z tego wzoru.

W przestrzeni T_p działa grupa automorfizmów przestrzeni E , tj. **grupa ortogonalna** \mathcal{O} 3-wymiarowej przestrzeni. Dla dowolnego takiego odwzorowania $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}$ przekształcającego wektor \mathbf{a} w wektor $\mathbf{Q}\mathbf{a}$ i dla dowolnego tensora $\mathbf{A} \in T_p$ mamy

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{Q} * \mathbf{A}, \quad (\text{A.4})$$

gdzie $\mathbf{Q}*$ jest operacją liniową określoną dla tensorów prostych zgodnie ze wzorem

$$\mathbf{Q} * (\mathbf{a}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_p) \equiv \mathbf{Q} \mathbf{a}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{Q} \mathbf{a}_p. \quad (\text{A.5})$$

W T_p działa także **grupa permutacji** Σ początkowych liczb naturalnych $1, \dots, p$. Dla dowolnej permutacji $\sigma \in \Sigma$ i dowolnego tensora $\mathbf{A} \in T_p$ mamy

$$\mathbf{A} \rightarrow \sigma \times \mathbf{A}, \quad (\text{A.6})$$

gdzie $\sigma \times$ jest operacją liniową zdefiniowaną na tensorach prostych zgodnie ze wzorem

$$\sigma \times (\mathbf{a}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_p) \equiv \mathbf{a}_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_{\sigma(p)}. \quad (\text{A.7})$$

W zbiorze wszystkich tensorów euklidesowych wszystkich rzędów wprowadza się tak zwane **działania tensorowe**, tj. odwzorowania niezmiennicze względem działania (A.4).

Dla dowolnego działania tensorowego

$$(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_s) \rightarrow f(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_s),$$

gdzie

$$\mathbf{A}_i \in T_p, \quad i = 1, \dots, s, \quad f(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_s) \in T_p,$$

z definicji spełniona jest tożsamość

$$f(\mathbf{Q} * \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{Q} * \mathbf{A}_s) = \mathbf{Q} * f(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_s),$$

dla dowolnego $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}$. Innymi słowy, każde działanie tensorowe jest z definicji funkcją izotropową. Na przykład, dla

$$f(\mathbf{C}, \boldsymbol{\omega}) \equiv \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega},$$

$$s = 2, \quad p_1 = 4, \quad p_2 = 2, \quad p = 2,$$

mamy

$$(\mathbf{Q} * \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{Q} * (\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}).$$

W szczególności w T_p wprowadza się różne operacje, które definiują struktury niezmiennicze względem (A.4). Na przykład w T_2 wprowadza się operację $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau}) \rightarrow \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\tau}$, względem której T_2 jest **pierścieniem**. Dogodnie jest w dowolnej przestrzeni T_p wprowadzić operację

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{A.8})$$

z definicji biliniową i zdefiniowaną dla tensorów prostych wzorem

$$(\mathbf{a}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_p) \cdot (\mathbf{b}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_p) \equiv (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1) \dots (\mathbf{a}_p \cdot \mathbf{b}_p), \quad (\text{A.9})$$

gdzie $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ oznacza iloczyn skalarny w E . Natychmiast można sprawdzić, że jest to operacja biliniowa:

- 1) symetryczna, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$,
- 2) dodatnio określona, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} > 0$ dla $\mathbf{A} \neq 0$,
- 3) niezmiennicza względem grupy \mathcal{O}

$$(\mathbf{Q} * \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{Q} * \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Innymi słowy, (A.8) okazuje się poprawnie zdefiniowanym **iloczynem skalarnym**, niezmienniczym względem \mathcal{O} . Przestrzeń T_p z iloczynem skalarnym (A.8) jest **3^p -wymiarową przestrzenią euklidesową**. Ta struktura w T_p jest w pełni zgodna (z uwagi na trzecią z wymienionych powyżej własności iloczynu skalarnego) ze strukturą p -krotnego iloczynu tensorowego⁷.

Zawężając iloczyn skalarny do pewnej tensorowej (tj. stałej względem \mathcal{O} , [I]) podprzestrzeni $\mathcal{S} \subset T_p$, otrzymamy przestrzeń euklidesową niższego wymiaru, zgodną ze strukturą tensorową.

Uwaga. Iloczynu skalarnego $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}$ w T_2 **nie trzeba** zmieniać przy przejściu do podprzestrzeni tensorów symetrycznych $\mathcal{S} \subset T_2$, tak samo jak nie trzeba, na przykład, zmieniać iloczynu skalarnego $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ w R^3 przy przejściu, powiedzmy, na dwuwymiarową płaszczyznę $x = y$. Wtedy $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 2x_1x_2 + z_1z_2 = \xi_1\xi_2 + z_1z_2$, gdzie $\xi \equiv \sqrt{2}x = \sqrt{2}y$. Ten przykład dobrze wyjaśnia „problem z dwójkami” we wzorze $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{22} + \alpha_{33}\beta_{33} + 2(\alpha_{12}\beta_{12} + \alpha_{13}\beta_{13} + \alpha_{23}\beta_{23})$. \blacklozenge

Zwróćmy jeszcze uwagę na następującą okoliczność, całkowicie pomijaną przy klasycznej prezentacji teorii tensorów. W wielu przypadkach wygodnie jest przeprowadzić następujące identyfikacje:

$$T_p = T_{q_1} \otimes \dots \otimes T_{q_s}, \quad p = q_1 + \dots + q_s. \quad (\text{A.10})$$

Zilustrujemy to na przykładzie tensorów czwartego rzędu. Tutaj

$$T_4 = T_1 \otimes T_1 \otimes T_1 \otimes T_1 = T_1 \otimes T_3 = T_3 \otimes T_1 = T_2 \otimes T_2. \quad (\text{A.11})$$

⁷Oczywiście (A.8) nie jest jedynym iloczynem skalarnym, który jest niezmienniczy w T_p względem \mathcal{O} , por. §4.

Weźmy bazę $\mathbf{e}_i \in E$. Oczywiście, zbiór $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$ będzie bazą w T_3 . Możemy jednak użyć w T_3 jako bazy dowolnego liniowo niezależnego układu $3^3 = 27$ tensorów trzeciego rzędu \mathbf{E}_K , $K = 1, \dots, 27$. Wtedy zbiór 81 tensorów

$$\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_K, \quad i = 1, 2, 3, \quad K = 1, \dots, 27,$$

będzie (z samej definicji iloczynu tensorowego $U \otimes V$ skończenie wymiarowych przestrzeni liniowych U, V) bazą w $T_4 = T_1 \otimes T_3$, tj. dowolny tensor czwartego rzędu można przedstawić w postaci

$$\mathbf{A} = \sum_{K=1}^{27} a_K^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_K \quad (\text{A.12})$$

(dorożumiane jest sumowanie po i).

Jeśli z kolei w T_2 będzie przyjęta baza, $\boldsymbol{\omega}_K$, $K = 1, \dots, 9$ to zbiór 81 tensorów

$$\boldsymbol{\omega}_K \otimes \boldsymbol{\omega}_L, \quad K, L = 1, \dots, 9, \quad (\text{A.13})$$

również będzie dobrą bazą w T_4 , tj.

$$\mathbf{A} = \sum_{K, L=1}^9 a_{KL} \boldsymbol{\omega}_K \otimes \boldsymbol{\omega}_L. \quad (\text{A.14})$$

Te wzory obowiązują z odpowiednimi skröczeniami przy mnożeniu tensorowym podprzestrzeni tensorowych, na przykład dla $\mathcal{T} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{S}$, w głównej części pracy.

Uwaga. W kartezjańskim zapisie indeksowym wzory (A.12), (A.14) mają postać:

$$A_{ijkl} = \sum_{K=1}^{27} a_{iK} E_{Kjkl}, \quad (\text{A.12}^1)$$

$$A_{ijkl} = \sum_{K, L=1}^9 a_{KL} \omega_{Kij} \otimes \omega_{Lkl}. \quad \blacklozenge \quad (\text{A.14}^1)$$

Tensorzy z

$$T_{p+q} = T_p \otimes T_q \quad (\text{A.15})$$

można utożsamić z liniowymi odwzorowaniami przestrzeni T_q w przestrzeń T_p .

Wprowadzimy działanie

$$(\mathbf{L}, \mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{L} \cdot \mathbf{A}, \quad (\text{A.16})$$

gdzie $\mathbf{L} \in T_{p+q}$, $\mathbf{A} \in T_q$, $\mathbf{L} \cdot \mathbf{A} \in T_p$, jako biliniowe, zdefiniowane dla tensorów prostych wzorem

$$\begin{aligned} & (\mathbf{a}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_p \otimes \mathbf{a}_{p+1} \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_{p+q}) \cdot (\mathbf{b}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_q) \equiv \\ & \equiv (\mathbf{a}_{p+1} \cdot \mathbf{b}_{p+1}) \dots (\mathbf{a}_{p+q} \cdot \mathbf{b}_{p+q}) (\mathbf{a}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_p). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Zatem dla każdego odwzorowania liniowego $l: T_q \rightarrow T_p$ istnieje dokładnie jeden tensor $\mathbf{L} \in T_{p+q}$, taki że dla dowolnego $\mathbf{A} \in T_q$,

$$l(\mathbf{A}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{A}. \quad (\text{A.18})$$

Jeśli $\mathbf{E}_K, \mathbf{E}^L$ to dwie bazy w T_q , związane relacjami

$$\mathbf{E}_K \cdot \mathbf{E}^L = \delta_K^L, \quad (\text{A.19})$$

to specyficzny tensor \mathbf{L} , realizujący odwzorowanie liniowe l , można wyrazić wzorem

$$\mathbf{L} = \sum_{K=1}^{3^q} l(\mathbf{E}_K) \otimes \mathbf{E}^K. \quad (\text{A.20})$$

Literatura

- I. N. Bourbaki, Algebra (struktury algebraiczne, liniowa i poliliniowa algebra) [w oryginale: *Алгебра (алгебраические структуры, линейная и полилинейная алгебра)*], Moskwa, Fizmatgiz, 1962.
- II. J. Rychlewski, Tensory euklidesowe, nieopublikowane.
- III. L. Schwartz, *Les tenseurs*, Herman, 1975.

Dodatek B. Tensory blokowo-symetryczne jako odwzorowania liniowe

Podczas wykładów z mechaniki materiałów, które wygłosiłem w październiku 1969 r. na Wydziale Mechaniki i Zarządzania Politechniki Leningradzkiej, mówiłem ([11], s. 54):

„Zwróćmy uwagę na następującą możliwość opisu własności dowolnej przestrzeni tensorów parzystej walencji T_{2p} . Możemy rozpatrywać tę przestrzeń jako $T_p \otimes T_p$ i uznać T_p za euklidesową przestrzeń wektorową o wymiarze n^p . Wtedy $\mathbf{L} \in T_{2p}$ można traktować jako liniowe odwzorowanie T_p w siebie

$$\mathbf{A} \in T_p \rightarrow \mathbf{L} \cdot \mathbf{A} \in T_p$$

i stosując większość poprzednich twierdzeń z zamianą $T_1 = E_n$ na T_p i T_2 na T_{2p} .

Na przykład, dla tensorów z T_{2p} z symetrią

$$\sigma \times \mathbf{L} = \mathbf{L},$$

gdzie

$$\sigma = (p + 1, \dots, 2p, 1, \dots, p) \in \Sigma_{2p}$$

(w kartezjańskim zapisie indeksowym $L_{i \dots jp \dots q} = L_{p \dots qi \dots j}$, gdzie każda elipsa zastępuje $p - 2$ indeksy), otrzymujemy rozkład widmowy,

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n^p} L_i \mathbf{l}_{\langle i \rangle} \otimes \mathbf{l}_{\langle i \rangle}, \quad (\text{B.1})$$

gdzie

$$\mathbf{l}_{\langle i \rangle} \in T_p, \quad \mathbf{l}_{\langle i \rangle} \cdot \mathbf{l}_{\langle j \rangle} = \delta_{\langle i \rangle \langle j \rangle}.$$

Wzór (B.1) stanowi podstawę całej naszej pracy. Wzór strukturalny (3.39) jest szczególnym przypadkiem (B.1) dla $n = 3$ i $p = 2$. Użyłem tego szczególnego przypadku do opisu prawa Hooke'a, co wzbudziło wielkie zainteresowanie Anatola Isakowicza Lurie. Niestety, nie dotrzymałem danej mu obietnicy szybkiego wydrukowania.

Dodatek C. Podejście macierzowe

W fizyce kryształów zasłużoną popularnością cieszy się macierzowa metoda zapisu prawa Hooke'a (patrz np. [6, 10]). Zazwyczaj stosuje się następujący schemat w celu zastąpienia tensorów naprężenia i odkształcenia liczbową reprezentacją wektorową:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &\equiv \sigma_{11}, & \sigma_2 &\equiv \sigma_{22}, & \sigma_3 &\equiv \sigma_{33}, \\ \sigma_4 &\equiv \sigma_{23}, & \sigma_5 &\equiv \sigma_{13}, & \sigma_6 &\equiv \sigma_{12},\end{aligned}\tag{C.1}$$

i

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &\equiv \varepsilon_{11}, & \varepsilon_2 &\equiv \varepsilon_{22}, & \varepsilon_3 &\equiv \varepsilon_{33}, \\ \varepsilon_4 &\equiv 2\varepsilon_{23}, & \varepsilon_5 &\equiv 2\varepsilon_{13}, & \varepsilon_6 &\equiv 2\varepsilon_{12},\end{aligned}\tag{C.2}$$

Prawo Hooke'a ma wtedy postać

$$\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 6,\tag{C.3}$$

gdzie

$$C_{\alpha\beta} \quad \text{równe} \quad C_{ijkl}\tag{C.4}$$

przy odpowiedniej zmianie indeksów. Ostrzegamy, że problem na tensory własne (2.8) **nie jest** problemem na sześć pierwiastków macierzy $C_{\alpha\beta}$, ponieważ prawa transformacji (C.1) i (C.2) są różne. Aby przekształcić (2.8) w problem macierzowy, należy wziąć dla dowolnego tensora $\alpha \in \mathcal{S}$ odpowiedniki

$$\begin{aligned}\alpha_1 &\equiv \alpha_{11}, & \alpha_2 &\equiv \alpha_{22}, & \alpha_3 &\equiv \alpha_{33}, \\ \alpha_4 &\equiv \sqrt{2}\alpha_{23}, & \alpha_5 &\equiv \sqrt{2}\alpha_{13}, & \alpha_6 &\equiv \sqrt{2}\alpha_{12}.\end{aligned}$$

Macierz otrzymaną z macierzy C_{ijkl} oznaczymy przez C_{KL} , $K, L = 1, \dots, 6$. Wtedy (2.8) jest równoważne

$$\sum_{L=1}^6 C_{KL} \omega_L = \lambda \omega_K,\tag{C.5}$$

$K = 1, \dots, 6$, tj. macierzowy problem na wektory własne i wartości własne*.

Oczywiście w tym przypadku należy sprawdzić, czy wszystko tutaj ma odpowiednią niezmienniczość względem obrotów w rozważanej przestrzeni, ale tak właśnie jest. Nie będziemy się zatrzymywać na uzyskaniu w ten sposób bardzo nieprzejrzyistych wzorów.

Uwaga. Jak mnie poinformowano na seminarium w Instytucie Krystalografii Akademii Nauk ZSRR, wartości własne macierzy C_{KL} były rozważane w niepublikowanej rozprawie K.S. Aleksandrowa.

*Usunięto błąd w oryginalnym wzorze (C.5), gdzie niepoprawnie występowało sumowanie po dwóch indeksach K i L – przypis tłumacza.

Literatura

1. R. Hooke, *Lectures de potentia restituta, or of spring explaining the power of springing bodies*, London, 1678.
2. I. Todhunter, K. Pearson, *A history of the theory of elasticity*, Cambridge, University Press, 1886.
3. M. Born, K. Huang, *Dynamiczna teoria sieci krystalicznych* [w oryginale: *Динамическая теория кристаллических решеток*], Wydawnictwo Literatury Zagranicznej, Moskwa, 1958.
4. W. Voigt, *Lehrbuch der Kristallphysik*, Leipzig–Berlin, 1910 (patrz także książka: I.I. Szafranowski, *Historia krystalografii* [w oryginale: *История кристаллографии*], Nauka, Leningrad, 1980).
5. Yu.I. Sirotin, M.P. Shaskolskaya, *Podstawy fizyki kryształów* [w oryginale: *Основы кристаллофизики*], Nauka, Moskwa, 1979.
6. J. Nye, *Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, 1985.
7. S.G. Lechnicki, *Teoria sprężystości ciała anizotropowego* [w oryginale: *Теория упругости анизотропного тела*], Nauka, Moskwa, 1977.
8. R.F.S. Hearmon, *An introduction to applied anisotropic theory*, Clarendon Press, Oxford, 1961.
9. W.W. Nowożiłow, *Teoria sprężystości* [w oryginale: *Теория упругости*], Sudpromgiz, Leningrad, 1958.
10. F.I. Fiodorow, *Teoria fal sprężystych w kryształach* [w oryginale: *Теория упругих волн в кристаллах*], Nauka, Moskwa, 1965.

11. J. Rychlewski, *Wykłady z teorii materiałów* [w oryginale: *Лекции по теории материалов*], Katedra „Mechaniki i procesów sterowania”, Leningradzki Instytut Politechniczny, Leningrad, 1969, Maszynopis.
12. K.A. Lurie, *Wybrane problemy optymalnego zginania i rozciągania płyt sprężystych, Mechanika ciała stałego* [w oryginale: *Некоторые задачи оптимального изгиба и растяжения упругих пластин, Механика твердого тела*], Nr. 6, 1979.
13. A.I. Maltsev, *Podstawy algebry liniowej* [w oryginale: *Основы линейной алгебры*], Gostechizdat, Moskwa, 1956.
14. P. Halmos, *Przestrzenie wektorowe o skończonych wymiarach* [w oryginale: *Конечномерные векторные пространства*], Fizmatgiz, Moskwa, 1963.
15. I.M. Glazman, Yu.I. Lubicz, *Analiza liniowa w skończonych wymiarach* [w oryginale: *Конечномерный линейный анализ*], Nauka, Moskwa, 1969.
16. F.R. Gantmakher, *Teoria macierzy* [w oryginale: *Теория матриц*], Nauka, Moskwa, 1966.
17. G.J. Lyubarsky, *Teoria grup i jej zastosowania w fizyce* [w oryginale: *Теория групп и ее применения в физике*], Fizmatgiz, Moskwa, 1958.
18. A.A. Pjuszyn, *Mechanika kontinuum* [w oryginale: *Механика сплошной среды*], Wydawnictwo Uniwersytetu Moskiewskiego, Moskwa, 1971.
19. J. Rychlewski, *O ocenie właściwości anizotropii opisanych symetrycznymi tensorami drugiego rzędu* [w oryginale: *Об оценке анизотропии свойств описываемых симметричными тензорами второго ранга*] (w druku).
20. L. Szwartz, *Analiza* [w oryginale: *Анализ*], Mir, Moskwa, 1972.
21. I.N. Frantsevich, F.F. Voronov, S.A. Bakuta, *Stale sprężystości i moduły sprężystości metali i niemetalu (podręcznik)* [w oryginale: *Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов (справочник)*], Naukowa Dumka, Kijów, 1982.
22. B.P. Belikov, K.S. Aleksandrow, T.V. Ryzowa, *Właściwości sprężyste minerałów skalotwórczych i skał* [w oryginale: *Упругие свойства породобразующих минералов и горных пород*], Nauka, Moskwa, 1970.
23. G. Simmons, *Single crystal elastic constants and calculated aggregate properties*, Journal of the Graduate Research Center, Vol. 34, No. 1–2, 1965.

-
24. J. Rychlewski, Własne stany sprężyste kryształów (w druku).
 25. M.E. Gurtin, *A short proof of the representation theorem for isotropic, linear, stress-strain relations*, Journal of Elasticity, Vol. 4, No. 3, 1974.
 26. W. Olszak, W. Urbanowski, *The plastic potential and the generalized distortion energy in the theory of nonhomogeneous anisotropic elastic-plastic bodies*, Arch. Mech. Stos., Vol. 8, 1956.
 27. L.D. Landau, E.M. Lifszyc, *Mechanika kontinuum* [w oryginale: *Механика сплошных сред*], Gostechizdat, Moskwa, 1944.

Rozszerzony komentarz do polskiego przekładu

Andrzej Ziółkowski

Przypis 1

Ad. §1. Uwagi wstępne, sekcja Notacja, s. 3 – Izotropowe tensory czwartego rzędu.

W raporcie w dominującym stopniu jest stosowany zapis absolutny (bezindeksowy), jednak samodzielne powtórzenie dowodów sformułowanych w raporcie twierdzeń, jak również ewentualne wykonywanie obliczeń analitycznych i/lub numerycznych wymaga wykonywania operacji na składowych tensorów, a zatem biegłego posługiwania się zapisem indeksowym. Bardzo pomoże w tym rzemiośle jest rozpisanie, zobrazowanie graficzne i poznanie własności *jednostkowych (izotropowych) tensorów czwartego rzędu* często wykorzystywanych, jako generatory różnych podprzestrzeni, operatorów, projektorów – tensorów jednostkowych również w tym sensie, że są one sumami permutowanych iloczynów tensorowych tensora jednostkowego drugiego rzędu ($\mathbf{1}, \sim \delta_{ij}$).

Definicja P1.* *Tensory kartezjańskie* to takie tensory euklidesowe (por. dodatek A, Raportu), dla których są przyjmowane prostokątne układy współrzędnych, tj. bazy ortonormalne. Tylko takie tensory są tutaj rozpatrywane. Na przykład dowolny kartezjański tensor drugiego rzędu generowany przez wektory 3-wymiarowej przestrzeni euklidesowej zawsze można przedstawić w postaci:

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i,j=1,2,3} \omega_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \boldsymbol{\omega} \in T_2, \quad \mathbf{e}_i \in E_3, \quad (\text{P.1})$$

$$\{\mathbf{e}_i\}, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}; \quad \{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}, \quad (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = \delta_{ik} \delta_{jl}; \quad i, j, k, l = 1, 2, 3,$$

gdzie $\boldsymbol{\omega}$ oznacza tensor drugiego rzędu, zbiór trzech wersorów $\{\mathbf{e}_i\}$ stanowi ortonormalną (kartezjańską) bazę 3-wymiarowej euklidesowej przestrzeni wektorowej E_3 generującej przestrzeń tensorów drugiego rzędu T_2 (przestrzeń euklidesowa to przestrzeń liniowa ze zdefiniowaną operacją iloczynu skalarnego), zbiór 9 diad $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$ stanowi bazę ortonormalną przestrzeni T_2 . Współczyn-

*W dodatku od tłumacza wszystkie definicje, twierdzenia i powołania na źródła są dla rozróżnienia oznaczone dodatkowo literą P – przypis redakcji.

niki ω_{ij} (macierz 3×3) to składowe reprezentacji tensora $\boldsymbol{\omega}$ w bazie tensorowej $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$.

Warto zwrócić uwagę, że tensor, który formalnie, matematycznie zdefiniowany jest jako pewna *struktura algebraiczna*, przy jego wykorzystaniu do opisu rzeczywistych zjawisk fizycznych, może być i wygodnie jest go interpretować, jako pewien *obiekt geometryczny* (podobnie jak punkt, prostą czy płaszczyznę), *niezmienniczy* w tym sensie, że niezależny od sposobu jego opisu – tj. od wyboru bazy (układu współrzędnych) przestrzeni wektorowej generującej przestrzeń tensorową, do której dany tensor należy (tutaj E_3), por. na przykład rozdział 2 w książce Stanisława Gołąba [P5]. W świetle takiej interpretacji jasne staje się, że tensor stanowi zintegrowaną (nierozdzieloną) całość składającą się z *reprezentacji tensora i bazy tensora*, w której ta reprezentacja została rozpisana, por. definicja (P.1)₁. Rozpatrywanie wyłącznie reprezentacji tensora – na przykład macierzowej w oderwaniu od bazy, może prowadzić do błędnych wniosków, co szerzej omówiono w przypisie 3.

Uwaga. Wszystkie przedstawione w przypisie 1 reprezentacje (macierzowe) omawianych tensorów, o ile wyraźnie nie wskazano inaczej, zostały rozpisane w bazie $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, por. (P.1)₃.

W dodatku A mówi się o *grupie permutacji* działającej w przestrzeni tensorowej T_p (na tensorach rzędu p), samo zaś działanie permutacji jest zdefiniowane wzorem (A.7) jako *operacja liniowa*. Funkcjonalność tego działania wydaje się *znacząco niedoceniana* w literaturze przedmiotu. Ze względu na znaczenie, jakie *operacja permutacji* ma dla prezentowanych poniżej rozważań, jej definicja i własności zostaną omówione szerzej.

Definicja P2. *Permutacją $\sigma \times$ tensora \mathbf{A}* nazywamy odwzorowanie liniowe określone następującym opisem:

$$\begin{aligned} \sigma \times \mathbf{A} : \mathbf{A} = A_{12 \dots p} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_p \rightarrow \sigma \times \mathbf{A} = A_{12 \dots p} \mathbf{e}_{\sigma(1)} \otimes \mathbf{e}_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{\sigma(p)}, \\ \sigma \equiv \langle \sigma(1) \dots \sigma(p) \rangle, \quad \mathbf{A}, \sigma \times \mathbf{A} \in T_p, \end{aligned} \quad (\text{P.2})$$

gdzie $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(p)$ stanowi zadaną permutację p pierwszych liczb naturalnych $1, 2, \dots, p$, zaś $A_{12 \dots p}$ oznaczają składowe tensora \mathbf{A} rzędu p w bazie tensorowej $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_p$. Permutacja tensora oznacza zmianę porządku elementów składowych jego bazy tensorowej.

Operację permutacji można całkowicie równoważnie interpretować, jako permutację składowych reprezentacji tensora rozpisanych w ustalonej bazie,

$$\sigma \times \mathbf{A} \equiv \langle \sigma(1) \sigma(2) \dots \sigma(p) \rangle \times \mathbf{A} = A_{\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(p)} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_p \in T_p. \quad (\text{P.3})$$

Dla operacji permutacji σ tensora dogodnie jest wprowadzenie następującej bardziej zwartej notacji $\sigma \times \mathbf{A} \equiv \langle \sigma(1) \dots \sigma(p) \rangle \times \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}^{(\langle \sigma(1) \dots \sigma(p) \rangle)}$. W przypadku gdy wiadomo, że zmianie ulega porządek tylko dwóch indeksów, to podawane są tylko indeksy ulegające zamianie, np. w przypadku tensorów czwartego rzędu $\mathbf{A}^{(4\ 2)}$ zamiast $\mathbf{A}^{(1\ 4\ 3\ 2)}$.

Operacja permutacji jest *automorfizmem*, tj. odwracalną liniową transformacją przestrzeni tensorowej T_p na siebie ($\sigma : T_p \xrightarrow{na} T_p$).

Pojęcie grupy stanowi jedno z najważniejszych pojęć szeroko wykorzystywanych przy budowaniu teorii (modeli) rzeczywistych zjawisk fizycznych.

Definicja P3. Struktura algebraiczna $G \equiv (\{G\}, \diamond)$ składająca się z niepustego zbioru *elementów* $\{G\}$, i działania (*operacji*) „ \diamond ” przypisującej element z $\{G\}$ do dowolnej pary elementów z $\{G\}$ ($\diamond : (g, h) \in \{G\} \times \{G\} \Rightarrow g \diamond h \in \{G\}$) jest nazywana grupą, gdy działanie \diamond spełnia następujące aksjomaty:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \bigwedge_{g_1, g_2, g_3 \in G} g_1 \diamond (g_2 \diamond g_3) = (g_1 \diamond g_2) \diamond g_3, \\ \text{(ii)} \quad & \bigvee_{e \in G} \bigwedge_{g \in G} e \diamond g = g \diamond e = g, \\ \text{(iii)} \quad & \bigwedge_{g \in G} \bigvee_{h \in G} g \diamond h = h \diamond g = e, \end{aligned} \tag{P.4}$$

tzn. działanie \diamond jest *łączne* (i), istnieje *element neutralny* grupy (ii), dla każdego elementu grupy *istnieje element odwrotny* (iii).

Grupę nazywamy *przemienne* (*grupą abelową*), gdy działanie \diamond jest przemienne

$$\text{(iv)} \quad \bigwedge_{g, h \in G} g \diamond h = h \diamond g.$$

Zbiór wszystkich transformacji permutacji działających w przestrzeni tensorów ustalonego rzędu stanowi grupę (\mathcal{P}^σ), co pozwala na wprowadzenie pojęcia *symetrii wewnętrznej tensorów*.

Definicja P4. Grupą *symetrii wewnętrznej tensora* $\mathbf{A} \in T_p$ nazywamy podzbiór grupy \mathcal{P}^σ , którego elementy spełniają warunek

$$\mathcal{P}_{\mathbf{A}}^\sigma \equiv \{\sigma \in \mathcal{P}^\sigma; \sigma \times \mathbf{A} = \mathbf{A}\} \quad \mathcal{P}_{\mathbf{A}}^\sigma \subset \mathcal{P}^\sigma. \tag{P.5}$$

Przykłady

Tensor \mathbf{A} jest (*wewnętrznie*) *symetryczny* po parze wskaźników (α, β) , jeśli zachodzi równość, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(\beta\ \alpha)}$, $\sim A_{\dots\alpha\dots\beta\dots} = A_{\dots\beta\dots\alpha\dots}$, tj. wtedy gdy współczynniki reprezentacji tensora \mathbf{A} w dowolnej ustalonej bazie przy zamianie miejscami indeksów (α, β) są takie same.

W przypadku tensorów czwartego rzędu operacja symetrii ze względu na permutację $\langle 1\ 3\ 2\ 4 \rangle \times$ oznacza, że $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\langle 1\ 2\ 3\ 4 \rangle} = \mathbf{A}^{\langle 1\ 3\ 2\ 4 \rangle}$, tj. $A_{ijkl} = A_{ikjl}$ w dowolnej ustalonej bazie.

Operacje permutacji w bardzo wygodny sposób pozwalają na wprowadzenie wielu użytecznych tensorów, takich jak *operatory symetryzacji i/lub projektorów*. Na przykład w przypadku tensorów czwartego rzędu bardzo użyteczne są następujące operatory permutacji,

$$\mathfrak{l} = id = \langle 1\ 2\ 3\ 4 \rangle, \quad \mathfrak{c} = \frac{1}{2}[\langle 1\ 3\ 2\ 4 \rangle + \langle 1\ 4\ 3\ 2 \rangle], \quad \mathfrak{s} = \frac{1}{3}\langle \mathfrak{l} + 2\mathfrak{c} \rangle. \quad (\text{P.6})$$

Operator permutacyjny \mathfrak{c} zastosowany do tensora $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ pozwala uzyskać tensor czwartego rzędu $\mathbf{I}^{(4s)} \equiv \mathfrak{c} \times (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})$ symetryzujący dowolny tensor drugiego rzędu, por. (P.18) poniżej. Operator \mathfrak{s} przekształca dowolny tensor czwartego rzędu w tensor absolutnie symetryczny, tj. symetryczny przy zamianie miejscami dowolnej pary wskaźników, por. także (P.52) poniżej.

Definicja P5. Tensor jest *absolutnie wewnętrźnie symetryczny*, gdy grupą jego wewnętrznych symetrii jest cały zbiór permutacji $\mathcal{P}_{\mathbf{A}}^{\sigma} = \mathcal{P}^{\sigma}$, tj. gdy jest on *symetryczny po każdej parze wskaźników*.

Więcej bardzo interesujących informacji o użyteczności i zastosowaniach operacji permutacji można znaleźć w pracy J. Rychlewskiego poświęconej liniowemu rozkładowi tensorów czwartego rzędu [P12].

Definicja P6. Zbiór tensorów drugiego rzędu \mathcal{O} o własnościach,

$$\mathcal{O} = \{\mathbf{Q} \in T_2; \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{1}, \quad \det(\mathbf{Q}) = \pm 1\}, \quad (\text{P.7})$$

stanowi grupę i nazywany jest *grupą tensorów ortogonalnych*.

Podzbiór tensorów ortogonalnych, dla których $\det(\mathbf{Q}) = 1$

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{Q} \in T_2; \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{1}, \quad \det(\mathbf{Q}) = +1\} \subset \mathcal{O} \quad (\text{P.8})$$

jest nazywany *właściwą grupą ortogonalną* lub *grupą obrotów* $SO(3)$.

Warto zauważyć, że właściwa grupa ortogonalna \mathcal{R} w 3D nie jest grupą abelową, ale jest nią grupa obrotów wokół ustalonej osi (2D).

Tensory ortogonalne mogą być interpretowane jako *automorfizmy* – liniowe transformacje przestrzeni $E_3 \xrightarrow{\text{na}} E_3$. W przypadku tensorów \mathbf{Q} z grupy \mathcal{O} będą to obroty i lustrzane odbicia wektorów z przestrzeni E_3 , w przypadku zaś tensorów z grupy \mathcal{R} będą to tylko obroty.

Transformacje określone przez tensory ortogonalne pozwalają wprowadzić pojęcie *symetrii zewnętrznej tensorów*.

Definicja P7. Grupę symetrii zewnętrznej tensora $\mathbf{A} \in T_p$ nazywamy podzbiór wszystkich tensorów ortogonalnych \mathbf{Q} spełniających warunek,

$$\mathcal{O}_T = \{\mathbf{Q} \in \mathcal{O}; \quad \mathbf{Q} * \mathbf{A} = \mathbf{A}\}. \quad (\text{P.9})$$

Tensorzy \mathbf{A} spełniające warunek (P.9) są nazywane tensorami *symetrycznymi* (*inwariantnymi, stabilnymi*) względem transformacji ortogonalnych $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}_T \subset \mathcal{O}$.

Udowodniono, że istnieje osiem grup symetrii zewnętrznej tensorów Hooke'a, por. Forte i Vianello [P4]. Grupy te opisano na rys. 10 (s. 66). To właśnie pojęcie symetrii zewnętrznej tensorów stanowi podstawę dla przyjętego w pracy podziału tensorów Hooke'a na *klasy równoważności* i podanie stosownego rozkładu spektralnego tensora w zależności od jego przynależności do określonej klasy/grupy symetrii zewnętrznej.

Definicja P8. Relację działającą w pewnym zbiorze X nazywamy *relacją równoważności* $\widehat{R} \subseteq X \times X$, wtedy i tylko wtedy gdy jest ona: i) *zwrotna*, tj. dla dowolnego $x \in X$ zachodzi $x \widehat{R} x$, ii) *symetryczna*, tj. dla dowolnego $x, y \in X$ zachodzi $x \widehat{R} y \Rightarrow y \widehat{R} x$, iii) *przechodnia*, tj. dla dowolnego $x, y, z \in X$ zachodzi $(x \widehat{R} y) \wedge (y \widehat{R} z) \Rightarrow y \widehat{R} z$.

Dwa elementy $x, y \in X$, takie że $x, y \in \widehat{R}$, nazywa się *równoważnymi* i często oznacza symbolicznie $x \sim y$.

Często w istniejącej literaturze poświęconej modelowaniu zachowania materiałów pomija się podstawową definicję różnych typów symetrii, przez co mniej doświadczony czytelnik łatwo może odnieść wrażenie, że własność symetrii jest własnością reprezentacji tensora. W świetle powyżej przypomnianych definicji łatwo stwierdzić, że nie jest to prawda. Własność symetrii różnego typu jest własnością tensora – zintegrowanego obiektu składającego się z bazy tensorowej i jego reprezentacji w tej bazie. Posiadanie określonej symetrii przez dany tensor wymusza istnienie określonych więzów pomiędzy składowymi jego reprezentacji w określonej bazie tensorowej. Takie więzy pomiędzy składowymi rozpisanyymi w różnych bazach tensorowych mogą mieć i mają różną jawną postać. Naturalnie, jeśli określony tensor posiada jednocześnie dwa różne typy symetrii, na przykład określoną symetrię zewnętrzną i określoną symetrię wewnętrzną, to te różne typy symetrii również będą wymuszać istnienie więzów pomiędzy jego składowymi reprezentacji, więzy wynikające z różnych symetrii będą na ogół różne nawet w tej samej bazie tensorowej. Sytuacja tego typu jest dyskutowana szerzej w przypisie 3 pod wzorem (P.52) na przykładzie materiału sprężystego posiadającego symetrię zewnętrzną typu monoklinicznego i absolutną symetrię wewnętrzną.

W niniejszym dodatku dużo uwagi jest poświęcone tensorom jednostkowym, które są tensorami izotropowymi.

Definicja P9. *Tensory izotropowe* są to takie tensory, dla których grupą symetrii zewnętrznej jest cały zbiór tensorów ortogonalnych $\mathcal{O}_T = \mathcal{O}$, por. (P.7).

Tensor izotropowy *nie ma identycznych składowych w każdej ortonormalnej bazie przestrzeni tensorowej*, do której należy. Przykłady różnych reprezentacji jednostkowego tensora drugiego rzędu $\mathbf{1} \in T_2$ (por. (P.11)), w różnych bazach ortonormalnych przestrzeni tensorów symetrycznych drugiego rzędu \mathcal{S} oraz różnych reprezentacji jednostkowych tensorów czwartego rzędu w różnych bazach ortonormalnych przestrzeni tensorów symetrycznych czwartego rzędu $\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}$ podano w przypisie 3 (s. 108).

Uwaga. Tensory izotropowe mają *identyczne* składowe reprezentacji *we wszystkich izometrycznych bazach* względem właściwej grupy ortogonalnej, ale tensory izotropowe *nie mają* takiej samej reprezentacji we wszystkich *ortonormalnych bazach*.

Definicja P10. Dwie bazy ortonormalne są *izometryczne*, względem właściwej grupy ortogonalnej, gdy istnieje taki tensor obrotu $\mathbf{Q} \in \mathcal{R}$, że

$$\mathbf{p}_\alpha = \delta_\alpha^i \mathbf{Q} \mathbf{e}_i, \quad (\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta = \delta_\alpha^i \mathbf{Q} \mathbf{e}_i \otimes \delta_\beta^j \mathbf{Q} \mathbf{e}_j, \dots, \text{etc.}), \quad \mathbf{e}_i, \mathbf{p}_\alpha \in E_3, \quad (\text{P.10})$$

por. na przykład rozdział 4 w podręczniku J. Ostrowskiej-Maciejewskiej [P10].

Uwaga. *Nie wszystkie* ortonormalne bazy tensorowe są izometryczne względem *właściwej grupy ortogonalnej*, patrz także tekst poniżej wzoru (P.46). Warto zauważyć, że *wszystkie* (jednoskrętne) bazy ortonormalne w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej E_3 są izometryczne.

Tensor jednostkowy w przestrzeni tensorów drugiego rzędu można przedstawić w następującej postaci:

$$\mathbf{1} \equiv \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \in T_2, \quad 1_{ij} = \delta_{ij} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{P.11})$$

Tensor $\mathbf{1}$ jest tensorem neutralnym przestrzeni tensorowej T_2 $\boldsymbol{\omega} \mathbf{1} = \boldsymbol{\omega}$ ($\omega_{is} \delta_{sj} = \omega_{ij}$) dla każdego $\boldsymbol{\omega} \in T_2$. Tensor $\mathbf{1}$ jest tensorem izotropowym i generuje jednowymiarową podprzestrzeń izotropowych tensorów drugiego rzędu $\boldsymbol{\omega}^{iso} = a \mathbf{1} \in T_2$, gdzie a oznacza dowolną liczbę rzeczywistą. *Nie istnieją nietrywialne wektory izotropowe.* Jedynym izotropowym wektorem jest wektor zerowy ($\mathbf{v} = \mathbf{0} \in T_1$).

Przejdźmy do zagadnienia jednostkowych (izotropowych) tensorów czwartego rzędu. Maksymalnie *trzy izotropowe tensory* czwartego rzędu są liniowo niezależne, patrz np. książka H. Jeffreysa [P7].

W celu skonstruowania trzech liniowo niezależnych „jedynek” tensorowych czwartego rzędu wykorzystuje się operacje permutacji i tensor $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$. Najczęściej spotykany w literaturze zbiór trzech liniowo niezależnych jedynek tensorowych czwartego rzędu ma postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} &\equiv \langle 1\ 2\ 3\ 4 \rangle \times \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, & \sim (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})_{ijkl} &= \delta_{ij}\delta_{kl}, \\ (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(32)} &\equiv \langle 1\ 3\ 2\ 4 \rangle \times \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, & \sim (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(32)}_{ijkl} &= \delta_{ik}\delta_{jl}, \\ (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(42)} &\equiv \langle 1\ 4\ 3\ 2 \rangle \times \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, & \sim (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(42)}_{ijkl} &= \delta_{il}\delta_{kj}, \end{aligned} \tag{P.12}$$

$$\mathbf{Q} * (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad \mathbf{Q} * (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(32)} = (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(32)}, \quad \mathbf{Q} * (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(42)} = (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(42)}.$$

Zbiór tensorów (P.12) jest generatorem podprzestrzeni izotropowych tensorów czwartego rzędu, która jest trójwymiarowa.

Zostanie udowodniona izotropowość tensora $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$, dla pozostałych „jedynek” dowód przebiega analogicznie. Stosując transformację obrotu $\mathbf{Q} \sim q_{ij}$, $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{1} \sim q_{im}q_{jm} = \delta_{ij}$ do układu współrzędnych (bazy ortonormalnej) trójwymiarowej wektorowej przestrzeni euklidesowej E_3 – generującej daną przestrzeń tensorową T_4 , składowe tensora $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ transformują się zgodnie z następującym wzorem $(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^Q_{ijkl} = q_{im}q_{jn}q_{kp}q_{lq}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})_{mnpq}$. Podstawiając do tego wzoru składowe tensora $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$, otrzymujemy $(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^Q_{ijkl} = q_{im}q_{jn}q_{kp}q_{lq}\delta_{mn}\delta_{pq} = q_{in}q_{jn}q_{kp}q_{lp} = \delta_{ij}\delta_{kl} = (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})_{ijkl}$. ♦

W celu uproszczenia zapisu składowych tensorów drugiego i czwartego rzędu w postaci wektorowej i/lub macierzowej, odpowiednio często stosuje się mapowanie par indeksów w reprezentacji tych tensorów. Najczęściej wykorzystywane jest następujące mapowanie par indeksów:

$$\begin{array}{c|cccccccc} (i, j) & 11 & 22 & 33 & 23 & 13 & 12 & 32 & 31 & 21 \\ \hline K & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \tag{P.13}$$

$$\omega_{ij} \rightarrow \omega_K, \quad A_{ijkl} \rightarrow A_{KL}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad K, L = 1, \dots, 9.$$

W przypadku tensorów symetrycznych, przy stosowaniu zwartego zapisu ich reprezentacji zakres indeksów jest zmniejszony ($K, L = 1, \dots, 6$). Patrz także na przykład praca M. Moakhera [P8].

Tensory (P.12) jako tensory czwartego rzędu posiadają ogólnie 81 składowych ($\mathbf{A} \rightarrow A_{ijkl}$, $i, j, k, l = 1, 2, 3$), jednak w przypadku każdego z tych tensorów tylko 9 składowych jest różnych od zera. Składowe tensorów (P.12) można przedstawić poglądowo w postaci macierzy 9×9 , jak to pokazano graficznie w (P.14);

dla przejrzystości wpisano tam tylko wartości niezerowych składowych reprezentacji tensorów:

$$\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \sim (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad ijkl = 1, 2, 3$$

$ij \downarrow kl \rightarrow$	11	22	33	23	32	13	31	12	21
11	1	1	1						
22	1	1	1						
33	1	1	1						
23									
32									
13									
31									
12									
21									

(P.14)₁

$$(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(32)} \sim I_{ijkl}^{(4)} \equiv (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})_{ijkl}^{(32)} = \delta_{ik} \delta_{jl}$$

$ij \downarrow kl \rightarrow$	11	22	33	23	32	13	31	12	21
11	1								
22		1							
33			1						
23				1					
32					1				
13						1			
31							1		
12								1	
21									1

(P.14)₂

$$(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(42)} \sim (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})_{ijkl}^{(42)} = \delta_{il} \delta_{kj}$$

$ij \downarrow kl \rightarrow$	11	22	33	23	32	13	31	12	21
11	1								
22		1							
33			1						
23					1				
32				1					
13							1		
31						1			
12								1	
21								1	

(P.14)₃

W reprezentacjach macierzowych (P.14) odpowiednie kolumny i wiersze zostały uporządkowane nie zgodnie z porządkiem naturalnym (P.13)₂, lecz zgodnie z porządkiem (1, 2, 3, 4, 7, 5, 8, 6, 9).

Indeksy niezerowych składowych tensorów: $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$, $(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(32)}$, $(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(42)}$ to,

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} &\rightarrow \{(1111), (1122), (1133), (2211), (2222), (2233), (3311), (3322), (3333)\}, \\ (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(32)} &\rightarrow \{(1111), (1212), (1313), (2121), (2222), (2323), (3131), (3232), (3333)\}, \quad (\text{P.15}) \\ (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(42)} &\rightarrow \{(1111), (1221), (1331), (2112), (2222), (2332), (3113), (3223), (3333)\}. \end{aligned}$$

Jak łatwo spostrzec, dzięki reprezentacji graficznej (P.14)₂ tensor $(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(32)} \in T_4$ traktowany jako odwzorowanie liniowe przestrzeni tensorów drugiego rzędu na siebie $T_2 \xrightarrow{na} T_2$ (automorfizm), jest operatorem jednostkowym, gdyż przekształca on dowolny tensor drugiego rzędu na ten sam tensor – jest on elementem neutralnym przestrzeni T_4 .

Obowiązują następujące zależności:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{(4)} \cdot \boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\omega} \quad \left(I_{ijkl}^{(4)} \omega_{kl} = \omega_{ij} \right), \quad \boldsymbol{\omega} \in T_2, \\ (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(32)} \circ \mathbf{A} &= \mathbf{A} \quad \left(I_{ijst}^{(4)} A_{stkl} = A_{ijkl} \right), \quad \mathbf{A} \in T_4, \quad (\text{P.16}) \\ \mathbf{I}^{(4)} &\equiv (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(32)} \in T_4, \quad \sim I_{ijkl}^{(4)} = \delta_{ik} \delta_{jl}. \end{aligned}$$

Z uwagi na własność (P.16) tensor $(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(32)}$ został tutaj dodatkowo oznaczony symbolem $\mathbf{I}^{(4)} \in T_4$.

Najogólniejszą postać tensora izotropowego czwartego rzędu można przy pomocy tensorów (P.12) przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{iso} &= a (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + b (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(32)} + c (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(42)} \in T_4, \\ A_{ijkl}^{iso} &= a \delta_{ij} \delta_{kl} + b \delta_{ik} \delta_{jl} + c \delta_{il} \delta_{kj}, \end{aligned} \quad (\text{P.17})$$

gdzie a , b , c oznaczają skalary.

Tensory (P.12) są powszechnie wykorzystywane do konstrukcji innych posiadających pożądane własności tensorów czwartego rzędu przydatnych w różnych zastosowaniach. Na przykład, aby wydzielić część symetryczną i część antysymetryczną tensorów drugiego rzędu $\boldsymbol{\omega} \in T_2$, są przydatne następująco zdefiniowane tensory–projektory:

$$\mathbf{I}^{(4s)} \equiv \frac{1}{2} \left[(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(32)} + (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(42)} \right], \quad \mathbf{I}^{(4a)} \equiv \frac{1}{2} \left[(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(32)} - (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(42)} \right],$$

$$\mathbf{I}^{(4s)} \sim I_{ijkl}^{(4s)} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}), \quad \mathbf{I}^{(4a)} \sim I_{ijkl}^{(4a)} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{kj}),$$

$$\mathbf{I}^{(4)} = \mathbf{I}^{(4s)} + \mathbf{I}^{(4a)}, \quad \mathbf{I}^{(4s)} \circ \mathbf{I}^{(4a)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{I}^{(4s)} \circ \mathbf{I}^{(4s)} = \mathbf{I}^{(4s)}, \quad \mathbf{I}^{(4a)} \circ \mathbf{I}^{(4a)} = \mathbf{I}^{(4a)}. \quad (\text{P.18})$$

Składowe projektorów $\mathbf{I}^{(4s)}$, $\mathbf{I}^{(4a)}$ można przedstawić w dogodnej pogładowo reprezentacji macierzowej (macierzy 9×9) następująco:

$$\mathbf{I}^{(4s)} \sim I_{ijkl}^{(4s)} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj})$$

$ij \downarrow kl \rightarrow$	11	22	33	23	32	13	31	12	21
11	1								
22		1							
33			1						
23				$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				
32				$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				
13						$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
31						$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
12								$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
21								$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(P.19)₁

$$\mathbf{I}^{(4a)} \sim I_{ijkl}^{(4a)} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{kj})$$

$ij \downarrow kl \rightarrow$	11	22	33	23	32	13	31	12	21
11	0								
22		0							
33			0						
23				$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$				
32				$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				
13						$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		
31						$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
12								$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
21								$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(P.19)₂

Własności (P.18)_{7,8} wskazujące na to, że tensory $\mathbf{I}^{(4s)}$, $\mathbf{I}^{(4a)}$ są projektorami, łatwo udowodnić poprzez zwykle pomnożenie ich reprezentacji macierzowych (P.19)₁ i (P.19)₂, odpowiednio przez siebie.

Tensory $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$, $\mathbf{I}^{(4)}$, $\mathbf{I}^{(4s)}$, $\mathbf{I}^{(4a)}$ mają następujące własności:

$$\text{tr}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{1} = (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}^{(4)} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega}^s = \mathbf{I}^{(4s)} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega}^a = \mathbf{I}^{(4a)} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} \in T_2, \quad (\text{P.20})$$

gdzie $\boldsymbol{\omega}$ jest dowolnym tensorem drugiego rzędu, $\text{tr}(\boldsymbol{\omega}) = \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33}$ oznacza ślad tensora $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}^s$ oznacza część symetryczną tensora $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}^a$ zaś jego część antysymetryczną.

Własności (P.20)₁ i (P.20)₃ można przedstawić poglądowo, przyjmując reprezentację macierzową tensora czwartego rzędu (macierz 9×9) i reprezentację wektorową tensora drugiego rzędu (wektor 9×1) następująco:

$$\begin{bmatrix} \text{tr}(\boldsymbol{\omega}) \\ \text{tr}(\boldsymbol{\omega}) \\ \text{tr}(\boldsymbol{\omega}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{22} \\ \omega_{33} \\ \omega_{23} \\ \omega_{32} \\ \omega_{13} \\ \omega_{31} \\ \omega_{12} \\ \omega_{21} \end{bmatrix}, \quad (\text{P.21})_1$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{22} \\ \omega_{33} \\ \frac{1}{2}(\omega_{23} + \omega_{32}) \\ \frac{1}{2}(\omega_{23} + \omega_{32}) \\ \frac{1}{2}(\omega_{13} + \omega_{31}) \\ \frac{1}{2}(\omega_{13} + \omega_{31}) \\ \frac{1}{2}(\omega_{12} + \omega_{21}) \\ \frac{1}{2}(\omega_{12} + \omega_{21}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{22} \\ \omega_{33} \\ \omega_{23} \\ \omega_{32} \\ \omega_{13} \\ \omega_{31} \\ \omega_{12} \\ \omega_{21} \end{bmatrix}. \quad (\text{P.21})_2$$

Składowe części antysymetrycznej $\boldsymbol{\omega}^a = \mathbf{I}^{(4a)} \cdot \boldsymbol{\omega}$ tensora $\boldsymbol{\omega}$ są następujące:

$$\begin{aligned} \omega_{11}^a = \omega_{22}^a = \omega_{33}^a = 0, & \quad \omega_{23}^a = \frac{1}{2}(\omega_{23} - \omega_{32}) = -\omega_{32}^a, \\ \omega_{13}^a = \frac{1}{2}(\omega_{13} - \omega_{31}) = -\omega_{31}^a, & \quad \omega_{12}^a = \frac{1}{2}(\omega_{12} - \omega_{21}) = -\omega_{21}^a. \end{aligned} \quad (\text{P.22})$$

Można spostrzec, że tensory $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$, $\mathbf{I}^{(4)}$, $(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(42)}$ nie są wzajemnie ortogonalne w sensie iloczynu skalarnego. Nie są również ortogonalne tensory $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ i $\mathbf{I}^{(4s)}$ ($(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \cdot \mathbf{I}^{(4s)} \neq 0$). Jest to jedna z przyczyn, dla której najczęściej w literaturze (na przykład przy modelowaniu zachowania materiałów) jest spotykany następujący rozkład przestrzeni *izotropowych tensorów czwartego rzędu* złożony z *wzajemnie ortogonalnych projektorów*:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{iso} &= a_1 \mathbf{I}_{\mathcal{P}} + b_1 \mathbf{I}_{\mathcal{D}} + c_1 \mathbf{I}^{(4a)} \in T_4, \\ \mathbf{I}_{\mathcal{P}} &\equiv \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad \mathbf{I}_{\mathcal{D}} \equiv \mathbf{I}^{(4s)} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \\ \mathbf{I}_{\mathcal{P}} \boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{1} \equiv \boldsymbol{\omega}^{sph}, \quad \mathbf{I}_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^s - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{1} \equiv \boldsymbol{\omega}^d. \end{aligned} \quad (\text{P.23})$$

Projektory $\mathbf{I}_{\mathcal{P}}$, $\mathbf{I}_{\mathcal{D}}$, $\mathbf{I}^{(4a)}$ pozwalają rozłożyć przestrzeń tensorów drugiego rzędu na wzajemnie ortogonalne podprzestrzenie tensorów sferycznych $\boldsymbol{\omega}^{sph}$ ($\text{tr}(\boldsymbol{\omega}) \neq 0$) i tensorów dewiatorowych ($\text{tr}(\boldsymbol{\omega}) = 0$) – symetrycznych ($\boldsymbol{\omega}^d$) i antysymetrycznych ($\boldsymbol{\omega}^a$).

Wszystkie występujące w rozkładzie (P.23)₁ tensory czwartego rzędu są wzajemnie ortogonalne i są projektorami, gdyż

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\mathcal{P}} \cdot \mathbf{I}_{\mathcal{D}} = 0, \quad \mathbf{I}_{\mathcal{P}} \cdot \mathbf{I}^{(4a)} = 0, \quad \mathbf{I}_{\mathcal{D}} \cdot \mathbf{I}^{(4a)} = 0, \\ \mathbf{I}_{\mathcal{P}} \circ \mathbf{I}_{\mathcal{P}} = \mathbf{I}_{\mathcal{P}}, \quad \mathbf{I}_{\mathcal{D}} \circ \mathbf{I}_{\mathcal{D}} = \mathbf{I}_{\mathcal{D}}, \quad \mathbf{I}_{\mathcal{P}} \circ \mathbf{I}_{\mathcal{D}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{I}^{(4a)} \circ \mathbf{I}^{(4a)} = \mathbf{I}^{(4a)}. \end{aligned} \quad (\text{P.24})$$

Wzór (10.6) w raporcie jest przykładem rozkładu (P.23), gdzie ze względu na przesłanki natury fizycznej przyjęto dewiatorową część antysymetryczną za tożsamościowo równą zeru ($a_1 = \lambda_{\mathcal{P}} = 3\lambda + 2\mu = 3K$, $b_1 = \lambda_{\mathcal{D}} = 2\mu$, $c_1 = 0$) – λ , μ oznaczają stałe Lamégo.

Więcej informacji o euklidesowych (kartezjańskich) tensorach izotropowych dowolnego rzędu, a także dowody ich własności, można znaleźć na przykład w rozdziale 7 książki H. Jeffreysa [P7] i/lub w rozdziale 1, sekcja 1.2.5 książki R. Ogdena [P9].

Przypis 2

Ad. §3. Wzór strukturalny (3.33), s. 16 – Współczynniki równania charakterystycznego tensora symetrycznego czwartego rzędu.

Jak podano w pracy, moduły sztywności Kelvina λ_i ($i = 1, \dots, 6$), rzeczywiste moduły sztywności sprężystej, są pierwiastkami równania charakterystycznego tensora sztywności sprężystej Hooke'a (\mathbf{C}), por. wzór (3.33). W raporcie nie podano jednak jawnych wzorów na współczynniki równania charakterystycznego a_i wyrażone przez niezmienniki podstawowe (ślady) potęg tensora \mathbf{C} .

Współczynniki równania charakterystycznego tensora Hooke'a – ogólnie dowolnego tensora symetrycznego czwartego rzędu z przestrzeni tensorowej generowanej przez liniową przestrzeń wektorową o wymiarze 3, można wyrazić przy pomocy śladów potęg tego tensora następująco:

$$\begin{aligned}
 p(\lambda) &= \det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}^{(4s)}) = a_0 \lambda^6 + a_1(\mathbf{C}) \lambda^5 + \dots + a_5(\mathbf{C}) \lambda + a_6(\mathbf{C}) = 0, \\
 a_0 &= 1, \quad a_1 = \operatorname{tr} \mathbf{C}, \quad a_2 = \frac{1}{2} [(\operatorname{tr} \mathbf{C})^2 - \operatorname{tr} \mathbf{C}^2], \\
 a_3 &= \frac{1}{6} [(\operatorname{tr} \mathbf{C})^3 - 3 \operatorname{tr} \mathbf{C}^2 \operatorname{tr} \mathbf{C} + 2 \operatorname{tr} \mathbf{C}^3], \\
 a_4 &= \frac{1}{24} [(\operatorname{tr} \mathbf{C})^4 + 8 \operatorname{tr} \mathbf{C}^3 \operatorname{tr} \mathbf{C} - 6 \operatorname{tr} \mathbf{C}^2 (\operatorname{tr} \mathbf{C})^2 + 3 (\operatorname{tr} \mathbf{C}^2)^2 - 6 \operatorname{tr} \mathbf{C}^4], \\
 a_5 &= \frac{1}{120} [(\operatorname{tr} \mathbf{C})^5 - 30 \operatorname{tr} \mathbf{C}^4 \operatorname{tr} \mathbf{C} + 15 (\operatorname{tr} \mathbf{C}^2)^2 \operatorname{tr} \mathbf{C} - 20 \operatorname{tr} \mathbf{C}^3 \operatorname{tr} \mathbf{C}^2 \\
 &\quad - 10 \operatorname{tr} \mathbf{C}^2 (\operatorname{tr} \mathbf{C})^3 + 20 \operatorname{tr} \mathbf{C}^3 (\operatorname{tr} \mathbf{C})^2 + 24 \operatorname{tr} \mathbf{C}^5], \\
 a_6 &= \frac{1}{720} [(\operatorname{tr} \mathbf{C})^6 + 144 \operatorname{tr} \mathbf{C}^5 \operatorname{tr} \mathbf{C} - 120 \operatorname{tr} \mathbf{C}^3 \operatorname{tr} \mathbf{C}^2 \operatorname{tr} \mathbf{C} - 15 \operatorname{tr} \mathbf{C}^2 (\operatorname{tr} \mathbf{C})^4 \\
 &\quad + 90 \operatorname{tr} \mathbf{C}^4 \operatorname{tr} \mathbf{C}^2 + 40 \operatorname{tr} \mathbf{C}^3 (\operatorname{tr} \mathbf{C})^3 - 15 (\operatorname{tr} \mathbf{C}^2)^3 - 90 \operatorname{tr} \mathbf{C}^4 (\operatorname{tr} \mathbf{C})^2 \\
 &\quad + 40 (\operatorname{tr} \mathbf{C}^3)^2 + 45 (\operatorname{tr} \mathbf{C}^2)^2 (\operatorname{tr} \mathbf{C})^2 - 120 \operatorname{tr} \mathbf{C}^6] = \det(\mathbf{C}).
 \end{aligned} \tag{P.25}$$

W innej notacji jawne wzory na współczynniki $a_i(\mathbf{C})$ równania charakterystycznego tensora symetrycznego czwartego rzędu są podane w pracy J. Bettena [P1].

W przypadku gdy ślad tensora sztywności sprężystej jest równy zeru ($\operatorname{tr}(\mathbf{C})=0$), wyrażenia na współczynniki równania charakterystycznego znacząco się upraszczają i można je przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \mathbf{C} = 0 &\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^6 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0, \\ a_2 &= -\frac{1}{2}\operatorname{tr} \mathbf{C}^2, \quad a_3 = \frac{1}{3}\operatorname{tr} \mathbf{C}^3, \quad a_4 = -\frac{1}{4}\operatorname{tr} \mathbf{C}^4 + \frac{1}{2}a_2^2, \\ a_5 &= \frac{1}{5}\operatorname{tr} \mathbf{C}^5 + a_2a_3, \quad a_6 = -\frac{1}{6}\operatorname{tr} \mathbf{C}^6 - \frac{1}{3}a_2^3 + \frac{1}{2}a_3^2 + a_2a_4. \end{aligned} \quad (\text{P.26})$$

W przypadku materiałów wykazujących symetrię wyższe niż pełna anizotropia – patrz rys. 10 raportu, równanie charakterystyczne daje się zredukować do równania niższego stopnia. Równanie charakterystyczne (P.25)₁ dla materiałów całkowicie anizotropowych jest ogólnie równaniem szóstego stopnia i nie da się go uprościć, dla materiałów monoklinicznych i trygonalnych można je efektywnie zredukować do równania czwartego stopnia (poprzez zapisanie składowych tensora \mathbf{C} w układzie naturalnych osi symetrii materiału), w przypadku materiałów ortotropowych, tetragonalnych, o izotropii poprzecznej (cylindrycznej), o symetrii kubicznej można je zredukować do równania trzeciego stopnia, patrz np. A. Bona *et al.* [P2].

Sekwencyjne wzory na współczynniki równania charakterystycznego dla tensorów *drugiego rzędu n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej* wyrażone przez ślady potęg tego tensora można znaleźć na przykład w książce M. Itskowa [6], wzory (4.23) i (4.30), s. 102–105. Mają one następującą postać:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= 0, \\ p_A(\lambda) &= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} I_A^{(1)} + \dots + (-1)^{n-k} \lambda^{n-k} I_A^{(k)} \\ &\quad + \dots + (-1)^0 \lambda^0 I_A^{(n)}, \\ I_A^{(0)} &= 1, \quad I_A^{(k)} \equiv \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} I_A^{(k-i)} \operatorname{tr}(\mathbf{A}^i), \\ I_A^{(n)} &= \det(\mathbf{A}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} I_A^{(n-i)} \operatorname{tr}(\mathbf{A}^i), \end{aligned} \quad (\text{P.27})$$

gdzie $p_A(\lambda)$ oznacza wielomian charakterystyczny, $I_A^{(k)}$ oznaczają liniowo niezależne niezmienniki główne tensora \mathbf{A} . Równanie to znajduje zastosowanie do *symetrycznych tensorów czwartego rzędu wektorowej przestrzeni 3-wymiarowej*, gdyż tensory takie można równoważnie traktować, jako *tensory drugiego rzędu przestrzeni 6-wymiarowej*; podobnie ogólne tensory czwartego rzędu można równoważnie traktować jako *tensory drugiego rzędu przestrzeni 9-wymiarowej*.

W szczególności rozpisując wzory (P.27) dla tensora symetrycznego czwartego rzędu jest:

$$\begin{aligned}
 p_A(\lambda) &= I_A^{(0)}\lambda^6 - I_A^{(1)}\lambda^5 + I_A^{(2)}\lambda^4 - I_A^{(3)}\lambda^3 + I_A^{(4)}\lambda^2 - I_A^{(5)}\lambda + I_A^{(6)} = 0, \\
 I_A^{(1)} &= \operatorname{tr} \mathbf{A}, \quad I_A^{(2)} = \frac{1}{2}[I_A^{(1)}\operatorname{tr} \mathbf{A} - \operatorname{tr} \mathbf{A}^2], \\
 I_A^{(3)} &= \frac{1}{3}[I_A^{(2)}\operatorname{tr} \mathbf{A} - I_A^{(1)}\operatorname{tr} \mathbf{A}^2 + \operatorname{tr} \mathbf{A}^3], \\
 I_A^{(4)} &= \frac{1}{4}[I_A^{(3)}\operatorname{tr} \mathbf{A} - I_A^{(2)}\operatorname{tr} \mathbf{A}^2 + I_A^{(1)}\operatorname{tr} \mathbf{A}^3 - \operatorname{tr} \mathbf{A}^4], \\
 I_A^{(5)} &= \frac{1}{5}[I_A^{(4)}\operatorname{tr} \mathbf{A} - I_A^{(3)}\operatorname{tr} \mathbf{A}^2 + I_A^{(2)}\operatorname{tr} \mathbf{A}^3 - I_A^{(1)}\operatorname{tr} \mathbf{A}^4 + \operatorname{tr} \mathbf{A}^5], \\
 I_A^{(6)} &= \frac{1}{6}[I_A^{(5)}\operatorname{tr} \mathbf{A} - I_A^{(4)}\operatorname{tr} \mathbf{A}^2 + I_A^{(3)}\operatorname{tr} \mathbf{A}^3 - I_A^{(2)}\operatorname{tr} \mathbf{A}^4 + I_A^{(1)}\operatorname{tr} \mathbf{A}^5 - \operatorname{tr} \mathbf{A}^6] = \det(\mathbf{A}).
 \end{aligned}
 \tag{P.28}$$

Po użyciu wskazanej powyżej równoważności tensora Hooke'a \mathbf{C} z 6-wymiarowym tensorem symetrycznym drugiego rzędu, sekwencyjnym podstawieniu wyrażeń na niezmienniki $I_A^{(i)}$ i zamianie symbolu \mathbf{A} na \mathbf{C} odzyskuje się wzory (P.25).

Równanie charakterystyczne zdefiniowane wzorem (3.33) raportu jest szczególnym przypadkiem uogólnionego równania Cayleya–Hamiltona:

$$\mathbf{C}^6 - I_A^{(1)}\mathbf{C}^5 + I_A^{(2)}\mathbf{C}^4 - I_A^{(3)}\mathbf{C}^3 + I_A^{(4)}\mathbf{C}^2 - I_A^{(5)}\mathbf{C} + I_A^{(6)}\mathbf{I}^{(4)} = 0. \tag{P.29}$$

Problem na wartości własne i wektory własne dla tensorów m -tego rzędu przestrzeni n -wymiarowej jest złożony i stanowi otwarty problem naukowy. Na przykład nie jest wcale oczywiste, jaka jest maksymalna liczba różnych *wartości własnych* albo, co równoważne, *niezmienników głównych* tensora m -tego rzędu przestrzeni n -wymiarowej – co z kolei determinuje stopień wielomianu charakterystycznego. W celu przybliżenia problemu weźmy, jako przykład tensor Hooke'a. Jest to symetryczny tensor czwartego rzędu. Ogólnie posiada on 18 liniowo niezależnych niezmienników, lecz tylko sześć niezmienników głównych, które wchodzi jak współczynniki do równania charakterystycznego – jak to pokazał na przykład Rychlewski w niniejszym raporcie. Jego rozwiązanie prowadzi ogólnie do sześciu liniowo niezależnych wartości własnych. Pozostałe 12 niezmienników charakteryzuje stany własne tensora Hooke'a, które są tensorami drugiego rzędu.

Przystępne omówienie problemu na wartości własne tensorów wyższego rzędu i pewne ciekawe wyniki można znaleźć w pracy L. Qi [P11].

Przypis 3

Ad. Dodatek C, Podejście macierzowe, s. 87 – Zagadnienia związane z przedstawieniem prawa Hooke’a w zapisie macierzowym Voigta i w reprezentacji Kelvina.

W dodatku C raportu zasygnalizowano istnienie *problemu nierównoważności zapisów prawa Hooke’a przedstawionego w postaci związków macierzowych*. Jako przesłankę wskazującą na obecność problemu podano nierównoważność zagadnienia wyznaczania wartości własnych i stanów własnych tensora Hooke’a przy wykorzystaniu jego pełnej 9-wymiarowej tensorowej reprezentacji macierzowej i przy wykorzystaniu jego zwartego 6-wymiarowego macierzowego zapisu Voigta. Jednocześnie wskazano, że równoważność tensorowych zapisów macierzowych istnieje, gdy zamiast w zapisie Voigta prawo Hooke’a zostanie zapisane w zwartej 6-wymiarowej reprezentacji macierzowej Kelvina. W raporcie nie podano jednak w przejrzysty sposób fundamentalnej przyczyny nierównoważności różnych zapisów macierzowych prawa Hooke’a. Tym problemem jest w istocie uzyskanie *równoważnej tensorowej reprezentacji* prawa Hooke’a, gdy występujące w nim symetryczne tensory drugiego rzędu (naprężenia, odkształcenia) i tensor czwartego rzędu (tensor Hooke’a) są interpretowane jako tensory z przestrzeni 3-wymiarowej oraz wtedy, gdy są one interpretowane jako wektory i tensor drugiego rzędu, odpowiednio z przestrzeni 6-wymiarowej, i na odwrót. Zagadnienie to zostanie omówione tutaj bardziej szczegółowo, aby ułatwić zrozumienie podanych w raporcie wyników, a także ich przekształcanie na własne potrzeby.

Uogólnione prawo Hooke’a będące jednorodnym, liniowym związkiem tensorowym ($\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$, $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_2$, $\mathbf{A} \in T_4$) bez skorzystania z jakichkolwiek uproszczeń wynikających z symetrii występujących w nim tensorów można przedstawić w postaci macierzowej reprezentacji tensorowej – rozpisanej w bazie (P.1)₃, następująco:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3332} & C_{3313} & C_{3331} & C_{3312} & C_{3321} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2332} & C_{2313} & C_{2331} & C_{2312} & C_{2321} \\ C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3223} & C_{3232} & C_{3213} & C_{3231} & C_{3212} & C_{3221} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1332} & C_{1313} & C_{1331} & C_{1312} & C_{1321} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3132} & C_{3113} & C_{3131} & C_{3112} & C_{3121} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1232} & C_{1213} & C_{1231} & C_{1212} & C_{1221} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2132} & C_{2113} & C_{2131} & C_{2112} & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \sim \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, \dots, 3,$$

$$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{S} = T_{2(n=3)}^s, \quad \mathbf{C} \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{S} = T_{4(n=3)}^s, \quad (\text{P.30})$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}$ oznacza tensor naprężenia Cauchy'ego, $\boldsymbol{\varepsilon}$ to tensor małych odkształceń, \mathbf{C} oznacza tensor współczynników sztywności sprężystych.

Przesłanki fizyczne oparte na wynikach doświadczalnych prowadzą do wniosku, iż dla przeważającej większości wykorzystywanych wspólnie w inżynierii materiałów dobrym przybliżeniem modelowym jest przyjęcie, że tensory naprężenia i odkształcenia są symetryczne, tj. że ich składowe reprezentacji w bazie ortogonalnej $(P.1)_3$ są takie same przy zamianie kolejności wskaźników. Podobnie, że składowe reprezentacji tensora Hooke'a w tej samej bazie wykazują wewnętrzne symetrie przy zamianie miejscami pierwszego i drugiego wskaźnika, przy zamianie miejscami trzeciego i czwartego wskaźnika, oraz przy zamianie pierwszej i drugiej pary wskaźników, tj.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ji}, & \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ji}, & \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} &\in \mathcal{S}, \\ C_{ijkl} &= C_{jikl} = C_{klij}, & \mathbf{C} &\in \mathcal{S} \otimes \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (P.31)$$

Istnieje obszerna literatura doświadczalna i modelowa, wskazująca na racjonalność przyjmowanych założeń o symetrii wewnętrznej tensorów występujących w prawie Hooke'a, która tutaj nie będzie przywoływana.

Po uwzględnieniu warunków symetrii (P.31) liczba różnowartościowych składowych tensora naprężenia i odkształcenia zmniejsza się z 9 do 6, zaś różnowartościowych składowych tensora Hooke'a zmniejsza się z 81 do 21, co pozwala zapisać prawo Hooke'a w znacznie bardziej zwartych zapisach macierzowych:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}^{Vo} \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 2C_{14} & 2C_{15} & 2C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 2C_{24} & 2C_{25} & 2C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 2C_{34} & 2C_{35} & 2C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & 2C_{44} & 2C_{45} & 2C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & 2C_{54} & 2C_{55} & 2C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 2C_{64} & 2C_{65} & 2C_{66} \end{bmatrix}^{Vo} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (P.32)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{Vo} = C_{\alpha\beta} \gamma_{\beta} \quad (C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}) \leftrightarrow \sigma_K = C_{KL}^{Vo} \varepsilon_L \quad (C_{KL}^{Vo} \neq C_{LK}^{Vo}), \\ \varepsilon_{11}^{Vo} &\equiv \varepsilon_{11} = \gamma_1, & \varepsilon_{22}^{Vo} &\equiv \varepsilon_{22} = \gamma_2, & \varepsilon_{33}^{Vo} &\equiv \varepsilon_{33} = \gamma_3, \\ \varepsilon_{23}^{Vo} &\equiv \gamma_4 = 2\varepsilon_{23}, & \varepsilon_{13}^{Vo} &\equiv \gamma_5 = 2\varepsilon_{13}, & \varepsilon_{12}^{Vo} &\equiv \gamma_6 = 2\varepsilon_{12}, \end{aligned}$$

gdzie $\gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ oznaczają tzw. inżynierskie odkształcenia postaciowe.

Uwaga. Macierzowe zapisy prawa Hooke'a (P.32) nie stanowią *reprezentacji tensorowych prawa Hooke'a* rozpisanych w pewnych zupełnych (kompletnych) bazach tensorowych.

Relacje (P.32) znane są powszechnie pod nazwą *zapisu Voigta*. Współczynniki „2” występujące w (P.32)₁ przy składowych postaciowych odkształcenia, pojawiły się na skutek symetrii występujących w prawie Hooke'a tensorów, np. $C_{2323}\varepsilon_{23} + C_{2332}\varepsilon_{32} = C_{2323}2\varepsilon_{23} = C_{2323}\gamma_4 = 2C_{44}\varepsilon_4$. Często współczynniki „2” są wprowadzane do macierzowej reprezentacji tensora Hooke'a, co jawnie pokazano w zapisie macierzowym (P.32)₂. W relacjach (P.32)_{2,3,4} skorzystano z mapowania wskaźników (P.13), przy czym zakres zmienności wskaźników α, β, K, L , został ograniczony do 6, gdyż jak łatwo zauważyć, ze względu na symetrię (P.31), równania dla składowych naprężenia 7, 8, 9 z (P.30) stanowią odpowiednio powtórzenie równań dla składowych 4, 5, 6, i z tego względu można je w zwartych zapisach macierzowych (P.32) pominąć.

Uwaga. W literaturze przedmiotu panuje pewien brak konsekwencji (nieporządek), gdyż zarówno do zapisu macierzowego (P.32)₁ jak i do zapisu (P.32)₂ jest używana nazwa *zapis/notacja Voigta*. Występująca we wzorze (P.32)₁ macierz współczynników to ukazana w jawnej postaci macierz $C_{\alpha\beta} = C_{ijkl}$ występująca we wzorze (C.4) raportu. W swojej oryginalnej pracy Voigt nie stosował do tensora odkształcenia mapowania (P.13), lecz mapowanie $V_1 = \varepsilon_{11} = \varepsilon_1, V_2 = \varepsilon_{22} = \varepsilon_2, V_3 = \varepsilon_{33} = \varepsilon_3, 2W_1 = 2\varepsilon_{23} \neq \varepsilon_4, 2W_2 = 2\varepsilon_{13} \neq \varepsilon_5, 2W_3 = 2\varepsilon_{12} \neq \varepsilon_6$, patrz np. wzór (100), s. 156 w rozdziale 7 oryginalnej pracy W. Voigta [P13]. W raporcie we wzorze (C.2) podtrzymana jest konwencja oznaczeń składowych odkształcenia zastosowana przez Voigta, niezgodna z mapowaniem (P.13).

W niniejszym przypisie konsekwentnie jest stosowane mapowanie (P.13) do *wszystkich* obiektów tensorowych. Z tego właśnie powodu to zwarta reprezentacja macierzy sztywności (P.32)₂ jest traktowana jako macierzowa reprezentacja Voigta (lecz nie tensorowa) tensora sztywności sprężystych \mathbf{C} i opatrzona etykietą C_{KL}^{Vo} . Jak widać, jest ona *niesymetryczna*.

Aby poglądowo zilustrować korzyści wynikające z wprowadzonej przez Voigta notacji, rozważmy prawo Hooke'a *dla liniowo sprężystego materiału izotropowego*, które w zapisie absolutnym ma następującą postać:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{iso} \boldsymbol{\varepsilon} = [\lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I}^{(4s)}] \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (\text{P.33})$$

$$\mathbf{C}^{iso} \sim C_{ijkl}^{iso} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}),$$

gdzie indeksowa reprezentacja tensora sztywności sprężystej (P.33)₂ rozpisana jest w 9-wymiarowej bazie (P.1)₃.

Najczęściej pojawiająca się w literaturze zwarta *macierzowa postać prawa Hooke'a dla materiału izotropowego w zapisie Voigta* odpowiada postaci (P.32)₂ i przyjmuje formę:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}, \quad (\text{P.34})$$

$$C_{12}^{Vo} = C_{1122} = \lambda, \quad C_{66}^{Vo} = 2C_{1212} = 2\mu,$$

$$C_{11}^{Vo} = C_{22}^{Vo} = C_{33}^{Vo} = C_{12}^{Vo} + C_{66}^{Vo},$$

gdzie λ , μ to stałe Lamégo, por. także (P.32)₂.

Macierzowa reprezentacja tensora podatności \mathbf{S}^{iso} odwrotnego do tensora sztywności \mathbf{C}^{iso} ($\mathbf{C}^{iso} \circ \mathbf{S}^{iso} = \mathbf{I}^{(4)} \sim C_{ijmn}^{iso} S_{mnl}^{iso} = \delta_{ik}\delta_{jl}$) ma identyczną postać, jak ta występująca we wzorze (P.34)₂, przy czym w miejsce współczynników λ , 2μ należy dokonać podstawień $\lambda \rightarrow -\lambda/[(3\lambda + 2\mu)2\mu] = -\nu/E$, $2\mu \rightarrow 1/2\mu = (1 + \nu)/E$, gdzie E oznacza moduł Younga, ν to współczynnik Poissona, ($\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}^{iso} \boldsymbol{\sigma} = [(-\nu/E) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + (1/2\mu) \mathbf{I}^{(4s)}] \boldsymbol{\sigma}$).

Najczęściej spotykany w literaturze przedmiotu tensorowy zapis prawa Hooke'a dla materiału izotropowego (P.33) ma taką postać matematyczną, że wymusza on istnienie wzajemnej symetrii tensorów naprężenia i odkształcenia (poprzez symetryzację tensora odkształcenia projektorem $\mathbf{I}^{(4s)}$). Jednakże jeżeli z góry wiadomo – zakłada się istnienie symetrii tensora odkształcenia (naprężenia), to *nie ma potrzeby by go jeszcze dodatkowo symetryzować*. Wtedy całkowicie równoważny do zapisu (P.33)₁ jest tensorowy zapis *izotropowego prawa Hooke'a*, w którym zamiast tensora $\mathbf{I}^{(4s)}$ występuje tensor $\mathbf{I}^{(4)}$ – por. (P.18),

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{iso} \boldsymbol{\varepsilon} = [\lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I}^{(4s)}] \boldsymbol{\varepsilon} = [\lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I}^{(4)}] \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (\text{P.35})$$

Relacja (P.35)₂ wskazuje jednocześnie, że mogą istnieć takie materiały, które wykazują izotropowe zachowanie nawet wtedy, gdy ich wewnętrzne oddziaływania siłowe (odkształceniowe) nie mogą być wiarygodnie modelowane za pomocą *symetrycznych tensorów odkształcenia i naprężenia*.

Związki w postaci relacji macierzowych (P.32)_{1,2} w pełni odpowiadają prawu Hooke'a wyrażonemu związkiem tensorowym i jego macierzową reprezentacją tensorową (P.30), jeśli chodzi o ich *poprawność matematyczną i treść fizyczną*. W związku z tym całkowicie poprawne jest ich wykorzystywanie w obliczeniach analitycznych/numerycznych do wyznaczania naprężeń na podstawie

odkształceń lub odwrotnie. Jednakże w relacjach (P.32) *utracony został pierwotny tensorowy charakter związku* (P.30), przy próbie interpretacji relacji (P.32), jako reprezentacji tensorowej związku tensorowego rozpisanego w pewnej bazie. Nietrudno zauważyć, że w zwartym 6-wymiarowym zapisie macierzowym Voigta pewne składowe tensorowe, np. ε_{32} , ε_{31} , ε_{21} przynależne do pominiętych elementów pełnej 9-wymiarowej bazy tensorowej, zostały przypisane nieodpowiadającym im elementom 6-wymiarowej ograniczonej bazy, tj. $\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$, odpowiednio, co narusza formalne zasady rachunku tensorowego.

O braku tensorowej równoważności związków (P.30) i (P.32) świadczy kilka przesłanek. Na przykład norma 6-wymiarowego wektora naprężenia traktowanego, jako odpowiednik symetrycznego tensora drugiego rzędu liczona zgodnie z zasadami rachunku wektorowego jest różna od normy tensora naprężenia policzonej zgodnie z zasadami rachunku tensorowego tensorów drugiego rzędu $\|\sigma_K\|^2 \neq \|\sigma_{ij}\|^2$. Analogiczna sytuacja ma miejsce dla wektora odkształcenia $\|\varepsilon_K\|^2 \neq \|\varepsilon_{ij}\|^2$ oraz dla wektora odkształcenia wprowadzonego przez Voigta $\|\varepsilon_K^{Vo}\|^2 \neq \|\varepsilon_{ij}\|^2$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \sim \sigma_{ij} &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\|\boldsymbol{\sigma}\|^2 = \|\sigma_{ij}\|^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2(\sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2), \\ \boldsymbol{\sigma} \sim \sigma_\alpha &= [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6]^T \rightarrow \\ &\|\sigma_K\|^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2, \\ \boldsymbol{\varepsilon} \sim \varepsilon_\alpha &= [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6]^T \rightarrow \\ &\|\varepsilon_K\|^2 = \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{12}^2, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{Vo} \sim \gamma_\alpha &= [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6]^T \rightarrow \\ &\|\gamma_K\|^2 = \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 4\varepsilon_{23}^2 + 4\varepsilon_{13}^2 + 4\varepsilon_{12}^2. \end{aligned} \tag{P.36}$$

Warto wskazać, że przy oryginalnym zapisie wektorowym Voigta tensorów naprężenia i odkształcenia – (P.32)₁, zachowana jest wartość energii sprężystej $\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{Vo} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_K \gamma_K$.

Również norma $\|C_{ijkl}\|^2$ macierzy współczynników reprezentacji tensora Hooke'a \mathbf{C} – por. (P.30), wykazującego symetrię (P.31), jest różna od normy reprezentacji macierzowej Voigta $\|C_{\alpha\beta}\|^2$ – por. (P.32)₁, tensora \mathbf{C} ($\|C_{\alpha\beta}\|^2 \neq \|C_{ijkl}\|^2$), i tak samo w przypadku normy reprezentacji macierzowej $\|C_{\alpha\beta}^{Vo}\|^2$ –

por. (P.32)₂, ($\|C_{\alpha\beta}^{Vo}\|^2 \neq \|C_{ijkl}\|^2$). Jest to dobrze znany tzw. „problem dwójek”. W związku z tym, problemy na wartości własne dla C_{ijkl} , tj. relacji (P.30) z symetriami (P.31) i dla $C_{\alpha\beta}$, tj. relacji (P.32)₁ lub dla $C_{\alpha\beta}^{Vo}$, tj. relacji (P.32)₂, odpowiednio, nie są równoważne.

Aby uzyskać *tensorową równoważność*: i) prawa Hooke’a (P.30) wyrażonego poprzez 3-wymiarowe tensory drugiego rzędu (*naprężenia, odkształcenia*) i tensor czwartego rzędu (*Hooke’a*) – wykazujące wewnętrzne symetrie (P.31), oraz ii) prawa Hooke’a wyrażonego poprzez te same tensory interpretowane jako odpowiednie obiekty tensorowe 6-wymiarowe, konieczne jest wprowadzenie symetrycznych baz tensorowych ($\mathcal{S} \leftrightarrow T_{1(n=6)}$, $\mathcal{S} \otimes \mathcal{S} \leftrightarrow T_{2(n=6)}^s$).

W przypadku tensorów symetrycznych drugiego rzędu $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{S}$, ($\omega_{ij} = \omega_{ji}$), można zauważyć, że obowiązują następujące relacje dla składowych mieszanych:

$$\begin{aligned} \omega_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \omega_{ji}\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i &\equiv \omega_{ij}^{Ke} \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i] = \omega_{ij}^{Ke} \mathbf{t}_K, \quad K!, \quad (i, j)!, \quad i \neq j, \\ \omega_4^{Ke} = \omega_{23}^{Ke} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_{23} + \omega_{32}) = \sqrt{2}\omega_4, \quad \mathbf{t}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2], \\ \omega_5^{Ke} = \omega_{13}^{Ke} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_{13} + \omega_{31}) = \sqrt{2}\omega_5, \quad \mathbf{t}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1], \\ \omega_6^{Ke} = \omega_{12}^{Ke} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_{12} + \omega_{21}) = \sqrt{2}\omega_6, \quad \mathbf{t}_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1]. \end{aligned} \quad (\text{P.37})$$

Symbol „!” oznacza zawieszenie konwencji sumowania po powtarzających się wskaźnikach, tj. ! oznacza nie sumować.

Powyższe zależności pozwalają dla tensorów symetrycznych drugiego rzędu efektywnie wprowadzić dla trzech par symetrycznych elementów reprezentacji i odpowiadających im par elementów bazy tensorowej, tylko trzy zsymetryzowane elementy reprezentacji i trzy odpowiadające im elementy (symetryczne) bazy tensorowej. Dostarczają one także wskazówki, jak można wprowadzić 6-wymiarową, zupełną, ortonormalną bazę tensorową odpowiednią dla tensorów symetrycznych $\boldsymbol{\omega} \in T_{1(n=6)}$, mianowicie:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &\equiv \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{t}_2 \equiv \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{t}_3 \equiv \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{t}_4 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2], \\ \mathbf{t}_5 &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1], \quad \mathbf{t}_6 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1], \\ \mathbf{t}_K \cdot \mathbf{t}_L &= \delta_{KL}, \quad \mathbf{t}_K \in T_{1(n=6)}, \quad K, L = 1, \dots, 6, \\ \boldsymbol{\omega} &= \omega_K^{Ke} \mathbf{t}_K = \omega_1 \mathbf{t}_1 + \omega_2 \mathbf{t}_2 + \omega_3 \mathbf{t}_3 + \sqrt{2}\omega_4 \mathbf{t}_4 + \sqrt{2}\omega_5 \mathbf{t}_5 + \sqrt{2}\omega_6 \mathbf{t}_6, \quad \boldsymbol{\omega} \in T_{1(n=6)}. \end{aligned} \quad (\text{P.38})$$

Każdy tensor symetryczny drugiego rzędu $\boldsymbol{\omega}$ można przestawić w bazie \mathbf{t}_K jako wektor – por. (P.38)₈, gdzie współczynniki ω_K^{Ke} oznaczają *współczynniki reprezentacji Kelvina* tensora $\boldsymbol{\omega}$. Baza ortonormalna (P.38) jest najczęściej spotykaną w literaturze i wykorzystywaną w obliczeniach 6-wymiarową, zupełną, ortonormalną bazą symetrycznych tensorów drugiego rzędu.

Zapisać w bazie ortonormalnej (P.38) prawo Hooke’a (P.30) przy skorzystaniu z własności symetrii (P.31) przyjmuje następującą postać macierzową:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \sqrt{2}C_{1123} & \sqrt{2}C_{1113} & \sqrt{2}C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & \sqrt{2}C_{2223} & \sqrt{2}C_{2213} & \sqrt{2}C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & \sqrt{2}C_{3323} & \sqrt{2}C_{3313} & \sqrt{2}C_{3312} \\ \sqrt{2}C_{2311} & \sqrt{2}C_{2322} & \sqrt{2}C_{2333} & 2C_{2323} & 2C_{2313} & 2C_{2312} \\ \sqrt{2}C_{1311} & \sqrt{2}C_{1322} & \sqrt{2}C_{1333} & 2C_{1323} & 2C_{1313} & 2C_{1312} \\ \sqrt{2}C_{1211} & \sqrt{2}C_{1222} & \sqrt{2}C_{1233} & 2C_{1223} & 2C_{1213} & 2C_{1212} \end{bmatrix}^{Ke} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \sim \sigma_{\alpha}^{Ke} = C_{\alpha\beta}^{Ke} \varepsilon_{\beta}^{Ke}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 6, \quad \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \in T_{1(n=6)}, \quad \mathbf{C} \in T_{2(n=6)}^s. \quad (\text{P.39})$$

Macierzowy zapis reprezentacyjny prawa Hooke’a (P.39) znany jest pod nazwą *zapisu Kelvina* (spotykana jest także jako *zapis Mandela*).

Prawo Hooke’a dla materiału izotropowego w reprezentacji macierzowej (zapisie) Kelvina rozpisane w ortonormalnej bazie (P.38) ma postać:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sqrt{2}\sigma_4 \\ \sqrt{2}\sigma_5 \\ \sqrt{2}\sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \sqrt{2}\varepsilon_4 \\ \sqrt{2}\varepsilon_5 \\ \sqrt{2}\varepsilon_6 \end{bmatrix}, \quad (\text{P.40})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{iso} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_{\alpha}^{Ke} \mathbf{t}_{\alpha} = C_{\alpha\beta}^{iso} \mathbf{t}_{\alpha} \otimes \mathbf{t}_{\beta} \cdot \varepsilon_{\beta}^{Ke} \mathbf{t}_{\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 6.$$

Obliczenie norm tensorów naprężenia i/lub odkształcenia zgodnie z zasadami rachunku wektorowego wykorzystując ich składowe Kelvina (σ_{α}^{Ke} , $\varepsilon_{\alpha}^{Ke}$) – por. (P.39), prowadzi do takiej samej wartości, jak przy obliczeniu tych norm zgodnie z zasadami rachunku tensorowego dla tensorów symetrycznych drugiego rzędu przy wykorzystaniu składowych (σ_{ij} , ε_{ij}). Podobnie obliczenie wartości normy tensora własności sprężystych (Hooke’a), wykorzystując jego składowe Kelvina ($C_{\alpha\beta}^{Ke}$ – por. (P.39), da taką samą wartość jak ta wyliczona dla składowych (C_{ijkl}) – por. (P.30), obliczona zgodnie z zasadami rachunku tensorowego dla tensorów czwartego rzędu.

Wprowadzenie 6-wymiarowej, zupełnej, symetrycznej, ortonormalnej bazy $\{\mathbf{t}_K\} \in T_{1(n=6)}$ – por. (P.38), dla tensorów symetrycznych drugiego rzędu umożliwia wygenerowanie zupełnej, symetrycznej, ortonormalnej bazy dla tensorów symetrycznych czwartego rzędu, składającej się z diad $\{\mathbf{t}_J \otimes \mathbf{t}_K\} \in T_{1(n=6)} \otimes T_{1(n=6)}$. Rozpisanie prawa Hooke’a w tych bazach pozwala doprowadzić do pełnej tensorowej równoważności reprezentacji prawa Hooke’a rozpisanego na podstawie trójwymiarowej euklidesowej przestrzeni wektorowej – por. reprezentacja (P.30), i rozpisanego na podstawie 6-wymiarowej euklidesowej przestrzeni wektorowej – por. reprezentacja (P.39). W konsekwencji problemy na wartości własne i stany własne dla związków macierzowych (P.30) i (P.39) – w raporcie odpowiednio (2.8) i (C.5), są całkowicie równoważne:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{\omega} \sim C_{ijkl} \omega_{kl} = \lambda \omega_{ij}\} \\ \Leftrightarrow \{\mathbf{C}^{Ke} \cdot \boldsymbol{\omega}^{Ke} = \lambda \boldsymbol{\omega}^{Ke} \sim C_{\alpha\beta}^{Ke} \omega_{\beta}^{Ke} = \lambda \omega_{\alpha}^{Ke}\}, \end{aligned} \quad (\text{P.41})$$

to jest wartości własne i stany własne otrzymane w wyniku rozwiązania tych problemów są identyczne.

Tensorowa reprezentacja, zapis macierzowy Kelvina (P.39) ukazuje sposób osiągnięcia *pełnej tensorowej równoważności* interpretacji tensorów symetrycznych drugiego i czwartego rzędu z przestrzeni 3-wymiarowej o symetriach (P.31) jako wektorów i tensorów drugiego rzędu z przestrzeni 6-wymiarowej, i na odwrót:

$$\begin{aligned} \omega_{ij} = \omega_{ji}, \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{S} \leftrightarrow \omega_K, \quad \boldsymbol{\omega} \in T_{1(n=6)}, \quad i, j, k, l = 1, \dots, 3, \quad K, L = 1, \dots, 6, \\ C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}, \quad \mathbf{C} \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{S} \leftrightarrow C_{KL} = C_{LK}, \quad \mathbf{C} \in T_{2(n=6)}^s. \end{aligned} \quad (\text{P.42})$$

Porównując zwarty 6-wymiarowy zapis/notację prawa Hooke’a, Kelvina (P.39) i Voigta (P.32), nietrudno spostrzec, że są one matematycznie (fizycznie) równoważne, jednak tylko macierzowy zapis Kelvina stanowi tensorową reprezentację związku tensorowego wyrażającego prawo Hooke’a (P.30).

Warto zwrócić uwagę, że tensorowa reprezentacja prawa Hooke’a, zwarty zapis, *w ortogonalnej, lecz nie ortonormalnej*, bazie tensorowej $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, \sqrt{2}\mathbf{t}_4, \sqrt{2}\mathbf{t}_5, \sqrt{2}\mathbf{t}_6$ przyjmuje formę:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad (\text{P.43})$$

czyli postać (P.30) z pominiętymi wierszami i kolumnami o numerach 5, 7, 9.

Macierzowy wzór (P.43) dostarcza doskonałej ilustracji tego, że indeksowa postać relacji tensorowej *nie zawiera pełnej informacji* o takiej relacji, oraz że przy analizie reprezentacji indeksowych należy nieustannie pamiętać w jakiej bazie tensorowej zostały one rozpisane. Tensory jako *obiekty niezmiennicze* względem układu współrzędnych stanowią integralną jedność bazy i swojej reprezentacji w tej bazie.

Powróćmy jednak do zagadnienia jednostkowych – izotropowych, tensorów czwartego rzędu dyskutowanego w przypisie 1. W przypadku tensorów symetrycznych czwartego rzędu (por. (P.31)) podprzestrzeń tensorów izotropowych staje się *dwuwymiarowa*, gdyż część anizotropowa jest dla tensorów symetrycznych tożsamościowo równa zeru ($c_1 = 0$) – por. (P.23), i może być przedstawiona np. w postaci $\mathbf{A}^{iso} = a_1 \mathbf{I}_{\mathcal{P}} + b_1 \mathbf{I}_{\mathcal{D}} \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{S} \leftrightarrow T_{2(n=6)}^s$.

Reprezentacje macierzowe izotropowych tensorów czwartego rzędu wykazujących symetrię (P.31), tj. $\mathbf{I}^{(4s)} = \frac{1}{2}[(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(32)} + (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(42)}] = \mathbf{c} \times \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ – por. (P.18)₁, (P.6)₂, oraz $\mathbf{I}_{\mathcal{P}} = \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$, $\mathbf{I}_{\mathcal{D}} \equiv \mathbf{I}^{(4s)} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ – por. (P.23), rozpisane w symetrycznej bazie $\mathbf{t}_K \otimes \mathbf{t}_L \in T_{2(n=6)}^s$ – por. (P.38), mają w tej bazie następujące reprezentacje macierzowe:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{(4s)} &= I_{KL}^{(4s)} \mathbf{t}_K \otimes \mathbf{t}_L, & \mathbf{I}_{\mathcal{P}} &= \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = I_{\mathcal{P}KL} \mathbf{t}_K \otimes \mathbf{t}_L, \\ I_{KL}^{(4s)} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & I_{\mathcal{P}KL} &\sim \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{P.44}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\mathcal{D}} &\equiv \mathbf{I}^{(4s)} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = I_{\mathcal{D}KL} \mathbf{t}_K \otimes \mathbf{t}_L, \\ I_{\mathcal{D}KL} &\sim \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Reprezentacji tensorów $\mathbf{I}^{(4)} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}^{(32)}, \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}^{(42)}, \mathbf{I}^{(4a)}$ w 6-wymiarowej bazie $\mathbf{t}_K \otimes \mathbf{t}_L$ *nie można poprawnie rozpisać*, gdyż baza ta jest do tego celu niewystarczająca (niepełna).

Baza ortonormalna \mathbf{t}_K – por. (P.38), nie jest jedyną możliwą bazą ortonormalną tensorów symetrycznych drugiego rzędu $T_{1(n=6)}$. Zupełną bazę ortonormalną przestrzeni $T_{1(n=6)}$ stanowi też następujący zbiór sześciu tensorów drugiego rzędu:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1 &\equiv \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{1}, & \mathbf{h}_2 &\equiv \frac{1}{\sqrt{6}}[2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3], \\ \mathbf{h}_3 &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3], & \mathbf{h}_4 &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2] = \mathbf{t}_4, \\ \mathbf{h}_5 &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1] = \mathbf{t}_5, & \mathbf{h}_6 &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1] = \mathbf{t}_6, \\ \mathbf{1} &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, & \mathbf{h}_K \cdot \mathbf{h}_L &= \delta_{KL}, \quad \mathbf{h}_K \in T_{1(n=6)}, \quad K, L = 1, \dots, 6. \end{aligned} \quad (\text{P.45})$$

Tensor \mathbf{h}_1 jest tensorem sferycznym, pozostałe zaś tensory \mathbf{h}_α ($\alpha = 2, \dots, 6$) są dewiatorami. Przy interpretacji tensorów \mathbf{h}_α jako wektorów z przestrzeni 6-wymiarowej $\mathbf{h}_K \in T_{1(n=6)}$ ich reprezentacje w bazie \mathbf{t}_K mają postać:

$$\begin{aligned} h_1 &= \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0, 0 \right], & h_2 &= \left[\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, 0, 0 \right], \\ h_3 &= \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0 \right], & h_4 &= [0, 0, 0, 1, 0, 0], \\ h_5 &= [0, 0, 0, 0, 1, 0], & h_6 &= [0, 0, 0, 0, 0, 1]. \end{aligned}$$

Łatwo pokazać wprost przez wykonanie rachunków, że tensory \mathbf{h}_K stanowią *stany własne izotropowego tensora Hooke'a* (P.33), tj. stanowią rozwiązanie równania na wartości własne (P.41) dla tensora Hooke'a \mathbf{C}^{iso} ,

$$\mathbf{C}^{iso} \mathbf{h}_\alpha = \lambda_\alpha \mathbf{h}_\alpha, \quad \lambda_1 = 3K = 3\lambda + 2\mu, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 2\mu, \quad (\text{P.46})$$

czyli stanowią elementy spektralnego (nieliniowego) rozkładu tensora Hooke'a.

Ważną własnością bazy ortonormalnej \mathbf{h}_K jest to, że nie jest ona izometryczna z bazą ortonormalną \mathbf{t}_K , por. (P.10). Bazy \mathbf{h}_K *nie można otrzymać* z bazy \mathbf{t}_K poprzez jakikolwiek obrót ortogonalny \mathbf{Q} wektorów bazy \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$, wektorowej przestrzeni euklidesowej E_3 generującej obróconą bazę tensorową \mathbf{t}_K^Q ,

($\mathbf{t}_K = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \rightarrow \mathbf{t}_K^Q = \mathbf{Q}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{Q}\mathbf{e}_j$), tj. dla dowolnego \mathbf{Q} jest $\mathbf{t}_K^Q \neq \mathbf{h}_K$. Z tego powodu reprezentacje tensora jednostkowego drugiego rzędu $\mathbf{1}$, który jest tensorem izotropowym, są różne w bazach \mathbf{t}_K i \mathbf{h}_K , i mają postacie:

$$\mathbf{1} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3 \sim [1, 1, 1, 0, 0, 0], \quad \mathbf{1} = \sqrt{3}\mathbf{h}_1 \sim [\sqrt{3}, 0, 0, 0, 0, 0]. \quad (\text{P.47})$$

Z tej samej przyczyny objaśnionej powyżej reprezentacje izotropowych tensorów $\mathbf{I}_{\mathcal{P}}$, $\mathbf{I}_{\mathcal{D}}$ w bazach ortonormalnych $\mathbf{t}_K \otimes \mathbf{t}_L$ i $\mathbf{h}_K \otimes \mathbf{h}_L$ są różne:

$$\mathbf{I}^{(4s)} = I_{KL}^{(4s)} \mathbf{h}_K \otimes \mathbf{h}_L, \quad \mathbf{I}_{\mathcal{P}} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = I_{\mathcal{P}KL} \mathbf{h}_K \otimes \mathbf{h}_L,$$

$$I_{KL}^{(4s)} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_{\mathcal{P}KL} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{P.48})$$

$$\mathbf{I}_{\mathcal{D}} \equiv \mathbf{I}^{(4s)} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = I_{\mathcal{D}KL} \mathbf{h}_K \otimes \mathbf{h}_L,$$

$$I_{\mathcal{D}KL} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

co łatwo stwierdzić, porównując wzory (P.44) i (P.48).

Reprezentacja tensora $\mathbf{I}^{(4s)}$ jest w tych bazach taka sama ze względu na prawdziwość następującej tożsamości:

$$\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_3 = \mathbf{h}_1 \otimes \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 \otimes \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3 \otimes \mathbf{h}_3, \quad (\text{P.49})$$

którą można otrzymać, wykorzystując wzory (P.38) i (P.45).

Na zakończenie warto wspomnieć o własności *absolutnej (całkowitej) wewnętrznej symetrii tensora czwartego rzędu*. Dowolny tensor Hooke'a zgodnie z jego definicją wykazuje *symetrie wewnętrzne* (P.31)₃. Jednak warunki te są niewystarczające, by był on absolutnie symetryczny. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby tensor Hooke'a był absolutnie symetryczny, jest, by był on również symetryczny przy zamianie miejscami 2 i 3 indeksu, tj. po zastosowaniu operacji permutacji $\langle 1 \ 3 \ 2 \ 4 \rangle$. Warunek ten oznacza, że musi być spełnionych sześć dodatkowych warunków symetrii:

$$C_{2233} = C_{2323}, \quad C_{1133} = C_{1313}, \quad C_{1122} = C_{1212} \leftrightarrow C_{23} = C_{44}, \quad C_{13} = C_{55}, \quad C_{12} = C_{66},$$

$$C_{2313} = C_{3312}, \quad C_{2312} = C_{2213}, \quad C_{1312} = C_{1123} \leftrightarrow C_{45} = C_{36}, \quad C_{46} = C_{25}, \quad C_{56} = C_{14}. \quad (\text{P.50})$$

Po uwzględnieniu tych warunków wewnętrznej symetrii liczba niezależnych (różnych, co do wartości) składowych tensora Hooke'a w najogólniejszym przypadku (pełnej anizotropii) spada z 21 do 15, tj. tensor o symetrii absolutnej jest w pełni scharakteryzowany maksymalnie 15 niezależnymi parametrami. Materiał liniowo sprężysty, którego tensor Hooke'a wykazuje własność absolutnej symetrii, jest znany jako *materiał sprężysty Cauchy'ego*, por. wzór (2.14) w pracy Rychlewskiego [P12]. Dowolny tensor Hooke'a można zsymetryzować tak, aby posiadał on własność absolutnej symetrii, stosując permutacyjny *operator absolutnej symetryzacji* \mathfrak{s} – por. (P.6)₃, który rzutuje ortogonalnie tensory Hooke'a do podprzestrzeni absolutnie symetrycznych tensorów Hooke'a $\mathbf{H} \rightarrow \mathfrak{s} \times \mathbf{H}$.

W przypadku zapisów macierzowych Voigta i Kelvina, warunki absolutnej wewnętrznej symetrii tensora Hooke'a narzucają następujące relacje więzów pomiędzy poszczególnymi składowymi reprezentacji macierzowych w bazie $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, por. (P.32)₂ i (P.39):

$$\begin{aligned}
 & C_{KL}^{Vo} \\
 & \left[\begin{array}{cccccc}
 C_{11} & M & L & 2N & 2C_{15} & 2C_{16} \\
 M & C_{22} & K & 2C_{24} & 2O & 2C_{26} \\
 L & K & C_{33} & 2C_{34} & 2C_{35} & 2P \\
 N & C_{42} & C_{43} & 2K & 2P & 2O \\
 C_{51} & O & C_{53} & 2P & 2L & 2N \\
 C_{61} & C_{62} & P & 2O & 2N & 2M
 \end{array} \right], \\
 & C_{KL}^{Ke} \\
 & \left[\begin{array}{cccccc}
 C_{11} & M & L & \sqrt{2}N & \sqrt{2}C_{15} & \sqrt{2}C_{16} \\
 & C_{22} & K & \sqrt{2}C_{24} & \sqrt{2}O & \sqrt{2}C_{26} \\
 & & C_{33} & \sqrt{2}C_{34} & \sqrt{2}C_{35} & \sqrt{2}P \\
 & & & 2K & 2P & 2O \\
 sym. & & & & 2L & 2N \\
 & & & & & 2M
 \end{array} \right], \\
 & C_{44} = K = C_{23}, \quad C_{55} = L = C_{13}, \quad C_{66} = M = C_{12}, \\
 & C_{14} = N = C_{56}, \quad C_{25} = O = C_{46}, \quad C_{36} = P = C_{45}.
 \end{aligned} \tag{P.51}$$

Jak z tego wynika, dla absolutnie symetrycznego tensora Hooke'a jego współczynniki reprezentacji macierzowych, rozpisanych w bazie $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, na przykład muszą spełniać następujące relacje: $2C_{23}^{Vo} = C_{44}^{Vo}$, $C_{45}^{Vo} = C_{36}^{Vo}$ ($2C_{23}^{Ke} = C_{44}^{Ke}$, $C_{45}^{Ke} = \sqrt{2}C_{36}^{Ke}$).

Stosując permutacyjny *operator absolutnej symetryzacji* \mathfrak{s} – por. (P.6)₃ do tensora $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$, można uzyskać absolutnie symetryczny tensor izotropowy:

$$\mathbf{I}^{(4ts)} \equiv \frac{1}{3}[\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(32)} + (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})^{(42)}] = \frac{1}{3}[\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mathbf{I}^{(4s)}] = \mathfrak{s} \times (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}),$$

$$\mathbf{I}^{(4ts)} = I_{ijkl}^{(4ts)} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = I_{KL}^{(4ts)} \mathbf{t}_K \otimes \mathbf{t}_L = I_{KL}^{(4ts)} \mathbf{h}_K \otimes \mathbf{h}_L,$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \tag{P.52}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \sim \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Tensor (P.52)₁ jest generatorem 1-wymiarowej podprzestrzeni izotropowych, absolutnie symetrycznych tensorów czwartego rzędu $\mathbf{A}^{iso-ts} = a \mathbf{I}^{(4ts)} \sim A_{ijkl}^{iso-ts} = \frac{1}{3}a (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj})$.

Zgodnie z wymogami *absolutnej symetrii*, tj. symetrii wewnętrznej tensorów czwartego rzędu por. (P.5), w najogólniejszym przypadku, aby tensor Hooke'a był tensorem absolutnie symetrycznym, maksymalna liczba różnych co do war-

tości (liniowo niezależnych) składowych w jego reprezentacji nie może być większa niż 15 – por. (P.50) i (P.51). W przypadku materiału wykazującego *symetrię monokliniczną*, symetrię zewnętrzną por. (P.9), maksymalna liczba różnych, co do wartości (liniowo niezależnych) składowych reprezentacji jego tensora Hooke’a również nie może być większa od 15. Jednakże, więzy narzucane przez *warunki absolutnej symetrii* są inne, niż więzy narzucane przez *warunki materiałowej/płaszczyznowej symetrii*. Na przykład, tensor Hooke’a może wykazywać *symetrię monokliniczną*, lecz niekoniecznie musi jednocześnie być tensorem *absolutnie symetrycznym*.

Aby tensor Hooke’a dla materiału o określonej *symetrii materiałowej* był *absolutnie symetryczny*, na ogół muszą być spełnione pewne dodatkowe relacje więzów pomiędzy składowymi jego reprezentacji. Na przykład tensor Hooke’a dla *materiału izotropowego* będzie *absolutnie symetryczny*, jeśli współczynnik $C_{44} = \mu$ będzie równy współczynnikowi $C_{23} = \lambda$, tj. wtedy gdy $\lambda = \mu$. Ale to oznacza, że *izotropowy* materiał sprężysty *absolutnie symetryczny* według nomenklatury podanej w rozdziale 10 raportu oznacza materiał *idealnie sprężysty*, por. wzór (10.1).

Zarysowany powyżej problem konieczności istnienia *różnych więzów* pomiędzy składowymi tensora wynikających z narzucenia wymogu posiadania przez dany tensor różnych *typów symetrii* oraz analiza wynikających stąd konsekwencji stanowi otwarty problem naukowy i zgodnie z najlepszą wiedzą autora przypisu problem ten stosunkowo rzadko jest dyskutowany w literaturze przedmiotu. Warto też podkreślić, że własność określonej symetrii jest własnością tensora, nie zaś własnością reprezentacji tensora.

Podstawy teoretyczne i algebraiczne rzemiosło rachunku tensorowego w pewien całościowy i stosunkowo przystępny sposób zostało przedstawione w podręczniku akademickim Janiny Ostrowskiej-Maciejewskiej [P10]. Wiele szczegółowych wyprowadzeń wzorów w zapisie indeksowym znajduje się w 1 rozdziale „Tensors”, obszernego podręcznika Eduardo Chaveza [P3].

Literatura do przypisów tłumacza

- P1. J. Betten, *Irreducible invariants of fourth order tensors*, Mathematical Modelling, Vol. 8, pp. 29–33, 1987.
- P2. A. Bona, I. Bucataru, A. Slawinski, *Coordinate-free characterization of the symmetry classes of elasticity tensors*, Journal of Elasticity, pp. 1–24, April 2007.

- P3. E. Chavez, *Notes on Continuum Mechanics*, Springer, Barcelona, 2013, <https://previa.uclm.es/profesorado/evieira/ftp/apuntes/tensors.pdf>.
- P4. S. Forte, M. Vianello, *Symmetry Classes for Elasticity Tensors*, Journal of Elasticity, Vol. 43, pp. 81–108, 1996.
- P5. S. Gołąb, *Rachunek tensorowy*, PWN, Warszawa, 1966.
- P6. M. Itskov, *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers*, 5th ed., Springer, 2019.
- P7. H. Jeffreys, *Cartesian Tensors*, Cambridge University Press, 1931.
- P8. M. Moakher, *Fourth-order Cartesian tensors: old and new facts, notions and applications*, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, pp. 1–23, 2008.
- P9. R. Ogden, *Nonlinear Elastic Deformations*, Dover Publications, New York, 1997, (pierwsze wydanie Ellis Harwood, 1984).
- P10. J. Ostrowska-Maciejewska, *Podstawy i zastosowania rachunku tensorowego*, Raporty IPPT PAN, Warszawa, 2007, http://prace.ippt.gov.pl/IFTR_Reports.1_2007.pdf.
- P11. L. Qi, *Eigenvalues and invariants of tensors*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 325, pp.1363–1377, 2007.
- P12. J. Rychlewski, *A qualitative approach to Hooke's tensors, Part I*, Archives of Mechanics, Vol. 52, No. 4–5, pp. 737–759, 2000, <https://am.ippt.pan.pl/am/article/viewFile/v52p737/pdf>.
- P13. W. Voigt, *Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Kristalle in elementarer Darstellung*, Verlag von Veit & Comp., Leipzig, 1898, https://archive.org/details/bub_gb_Ps4AAAAMAAJ.
- P14. A. Ziółkowski, *Parametrization of Cauchy stress tensor treated as autonomous object using isotropy angle and skewness angle*, Engineering Transactions, Vol. 70, No. 3, pp. 239–286, 2022, doi: 10.24423/EngTrans.2210.2022.0809.