Rozwiązania równań zlinearyzowanej hydrodynamiki w obszarach ograniczonych

dr Marek Dudyński

Oznaczenia:

$\rho(x,t) - gęstość$

$(\bar{u})(x,t) - wektor\ prędkości$

$T(x,t) - temperatura$

$$definiujemy: \bar{\Phi}(x,t) = \begin{matrix} \rho(x,t) \\ u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \\ u_3(x,t) \\ T(x,t) \end{matrix}$$

Równania zlinearyzowanej hydrodynamiki przyjmują postać:

$$\partial + \bar{\Phi} = L\bar{\Phi} \qquad (1)$$

Gdzie:

$$L\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} -m\bar{\nabla}\bar{u} \\ -\alpha\bar{\nabla}\rho - \beta\nabla T + \upsilon\delta\bar{u} + \delta\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\bar{u}) \\ \rho\Delta T - \mu_1\bar{\nabla}\bar{u} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Równanie (1) *rozważamy w obszarze* $\Omega \subset \mathbb{R}^3\ d(\Omega) < \infty$

Z warunkami brzegowymi :

$$\begin{bmatrix} \bar{n}\bar{\nabla}\rho = 0 \\ \bar{n}\bar{u} = 0 \\ \bar{n}\bar{\nabla}T = 0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

I. Możemy pokazać , że istnieje operator ewolucji $T(t)$ *, dla którego operator* L *jest generatorem ciagłej półgrupy* $\bar{\Phi}(t) = e^{Lt}\bar{\Phi}(0)$ *, dla* $\bar{\Phi}(0)$ *spełniających warunki* (2)

II. Możemy wykonać transformaty Laplace' a równania (1) *i badać własności operatora* $(L - z)^{-1}$ *i wtedy badamy problem własny operatora* L

$$L\bar{\Phi} = \lambda\bar{\Phi}\ w\,\Omega \qquad (4)$$

Z warunkami brzegowymi (3).

Lemat 1. *Załóżmy , że istnieją funkcje* ρ , $\bar{u}$, T $W^{1,2}(\Omega)$ *spełniające równanie* (4) *z warunkami brzegowymi* (3) *wtedy* :

$$R_e\lambda \leq 0$$

Twierdzenie 1. *Operator* $(L - \lambda)^{-1}$ *jest zwartym operatorem w* $L^2_\beta(\Omega)$.

Szkic dowodu

Lemat :

$$\frac{-\alpha}{m}\lambda^{¿}\int_{\Omega}\rho*\rho-\beta\frac{\lambda^{¿}}{\mu_1}\int_{\Omega}T*\Delta T-\mu\int_{\Omega}\bar{u}*\Delta\bar{u}+\delta\int_{\Omega}u*\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\bar{u})=\lambda\int_{\Omega}\bar{u}*\bar{u}$$

Z części urojonej dostajemy tożsamość :

$$\int_{\Omega}u*u=\frac{\alpha}{m}\int_{\Omega}\rho*\rho+\frac{\beta}{\mu_1}\int_{\Omega}T*T$$

W rezultacie dostajemy dla części rzeczywistej następujące wyrażenie :

$$\Re\lambda=\frac{-1}{2}\left[\int_{\Omega}u*u\right]^{-1}\left[\frac{\xi_1\beta}{\mu_1}\int_{\Omega}\nabla T^{¿}\nabla T+\delta\int_{\Omega}(\bar{\nabla}\bar{u})\right]+\nu\int_{\Omega}\bar{\nabla}u^{¿}\nabla\bar{u}$$

$$\Re\lambda<0$$

Równość zachodzi dla ***T = const i u = const***

Szkic dowodu twierdzenia

Twierdzenie 1. *Rozważamy rodzinę operatorów* :

$$\left(\alpha m \frac{\lambda^{¿}}{|\lambda|^2}\right)\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\,\bar{u}) - \beta \nabla T + \nu \Delta \bar{u} = \lambda \bar{u}$$

$$-\nu \bar{\nabla} \bar{u} + \xi \Delta T = \lambda T$$

$$\begin{matrix} (\bar{n}\,\bar{u} = 0) \\ (\bar{n}\,\bar{\nabla}\,T = 0) \end{matrix} \qquad na\, \partial \Omega$$

$jeżeli\, \bar{u}_1 T\; należy\; do\; L^2(\Omega)$

$$\left[-(\nu+\delta) + \alpha m \frac{\lambda^{¿}}{|\lambda|^2}\right] \int_\Omega \bar{\nabla} u * \bar{\nabla} u - \xi \frac{\beta}{\mu} \int_\Omega \nabla T * \nabla T = \frac{\lambda \beta}{\mu} \int_\Omega T * T + \lambda \int_\Omega \bar{u} * \bar{u}$$

$\bar{u}(\boldsymbol{T})\; należy\; do\, (\boldsymbol{W}^{1,2})\; więc\, (\bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{T})\; jest\; elementem\, (\boldsymbol{W}^{2,2})$

$Podobnie\; dalej\; u\; jest\; elementem\, (\boldsymbol{W}^{3,2}(\boldsymbol{\Omega}), \boldsymbol{T})\; jest\; elementem\, (\boldsymbol{W}^{3,2}(\boldsymbol{\Omega}))$

$więc, z\; twierdzenia\; Sobolewa: (\boldsymbol{u})\; jest\; elementem\, (\boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{\Omega}), \boldsymbol{T})\; jest\; elementem\, (\boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{\Omega})), a\; operator\, ((\boldsymbol{T}_\lambda - \boldsymbol{\lambda})^{-1})\; jest\; zwarty\; w\, (\boldsymbol{L}^2)$

Własności operatora *L*

Wniosek 1. *Widmo operatora L jest czysto punktowe.*
Wniosek 2. *Operator ewolucji można zapisać w następującej postaci* :

$$T(t)\Phi(0)=\sum_{1}^{N} e^{\lambda i t}(\psi_i, \Phi(0)*\Phi_i)$$

gdzie Ψ_i − *lewe funkcje własne*
a Φ_i *prawe funkcje własne , odpowiadające wartości własnej* λ_i

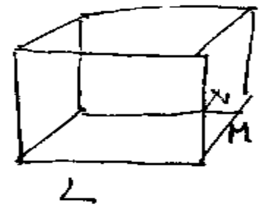
Poszukujemy teraz bardziejh szczegółowych informacji dotyczących widma operatora $(\boldsymbol{L})$.

1. *Ile jest wartości własnych i od czego zależy*
2. *Jak wygląda przejście graniczne do hydrodynamiki w* R^3 *tzn. dla* $(\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\Omega})\to\infty)$ *czy* $\lim \left\| T_{\omega}(t)\Phi(0)\right\|=0$

Operator w pudle

wspólnymi rozwiązanie w pudle prostopadłościennym

$L \times N \times M$



Takie rozwiązanie możemy aby zbudować dla jednego z dwóch warunków:

$$(A)\quad \left.\begin{array}{l} \bar{n}\,\bar{\nabla}\rho = 0 \\ \bar{n}\cdot\bar{u} = 0 \\ \bar{n}\,\bar{\nabla}T = 0 \end{array}\right\}$$

lub

$$\left\{\begin{array}{l} \rho = 0 \\ \bar{n}\bar{\nabla}(\bar{n}\bar{u}) = 0 \\ T = 0 \end{array}\right. \quad (B)$$

Poszukujemy rozwiązań typu funkcji periodycznych

$\rho = A\cos \bar{k}\bar{x}$

$\bar{u} = \bar{v}\sin \bar{k}x$ dla (A)

$T = B\cos kx$

lub

$\rho = A\sin \bar{k}\bar{x}$

$\bar{u} = \bar{w}\cos \bar{k}x$ dla (B)

$T = B\sin k\bar{x}$

$$\bar{k}_{l,m,n} = \left[\frac{2\pi}{L} l, \frac{\pi}{M} m, \frac{\pi}{N} n\right] \quad (l,m,n) = 1,2,3 \ldots$$

$$\lambda_i^{l,m,n} = \lambda_i\left(\bar{k}_{l,m,n}\right)$$

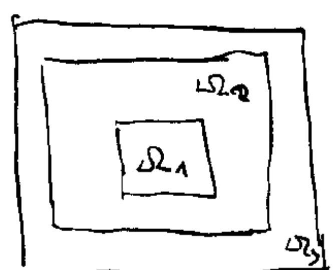
$$\bar{\phi}_i = \bar{\phi}_i\left(\bar{k}_{l,m,n}\right)$$

$$\sigma\left(L^{\Omega}\right) \subset \sigma\left(L^{\mathbb{R}^3}\right)$$

dla zbioru funkcji $\bar{\Phi}$ spełniających warunki brzegowe (3)

$$\lim_{(l,m,n)\to\infty} \left\| T^{\Omega}(t) - T^{\mathbb{R}^3}(t) \right\|_2 = 0$$

dla



$$\mathrm{Re}\,\lambda_i^{\Omega_3} \leq \mathrm{Re}\,\lambda_i^{\Omega_2} < \mathrm{Re}\,\lambda_i^{\Omega_2}$$

przynajmniej dla dostatecznie dużych prędkości.

Widmo operatora w pudle