

# **TEORIA ULTRADŹWIĘKOWYCH PRZETWORNIKÓW GRZEBIENIOWYCH**

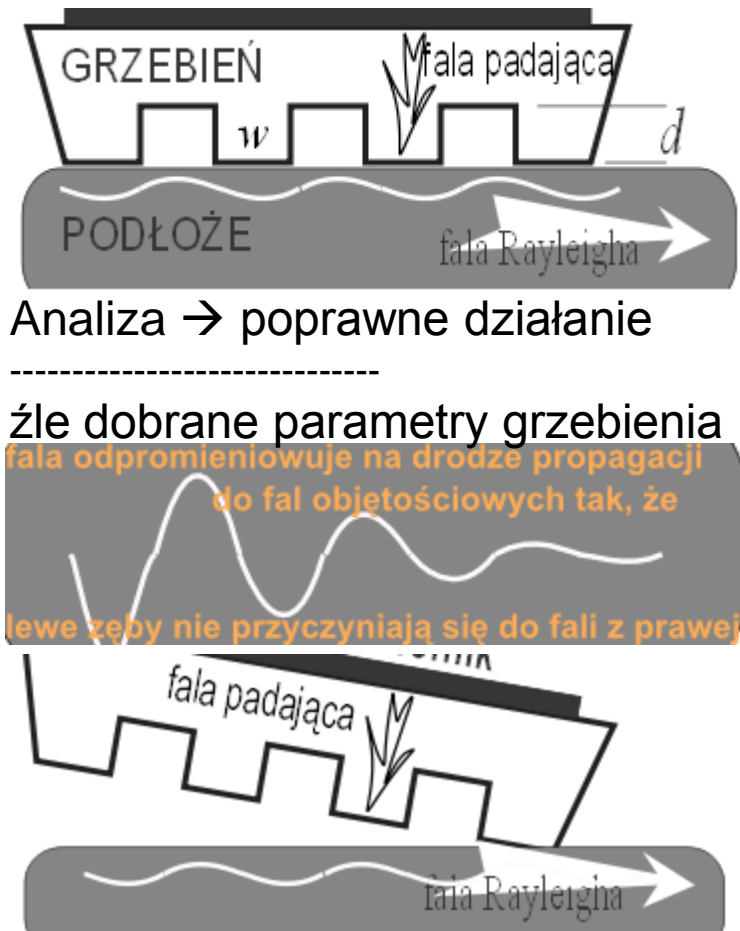
Seminarium Zakładu Ultradźwięków

E. Danicki

<http://www.ippt.gov.pl/~edanicki/tpg.pdf>

# O przetworniku grzebieniowym

- Służy do generacji fal powierzchniowych
- Przez okresową siłę
- Przykładaną do podłoża za pomocą „grzebienia”
- **Zgodność okresu siły z długością fali pobudza ją na drodze propagacji**
- Służy też do odbioru fali powierzchniowej



# Faktycznie – fala kontaktowa

- Pod grzebieniem nie ma swobodnej powierzchni warunkującej propag. fali Rayleigha.
- Układ grzebień-podłoże jest mocno sprzężony – i teoria perturbacyjna jest niewystarczająca,
- Fala kontaktowa się propaguje wzdłuż styku
- Jest ona sprzężona z falami objętościowymi co umożliwia generację,
- Ale i zachodzi zjawisko odwrotne (leaky wave) odpromieniowanie fali do fal objętościowych, co tłumii falę, więc nie ma prostego sum. wkł. od poszczeg. zębów.

# Elementy składowe analizow. ukł.

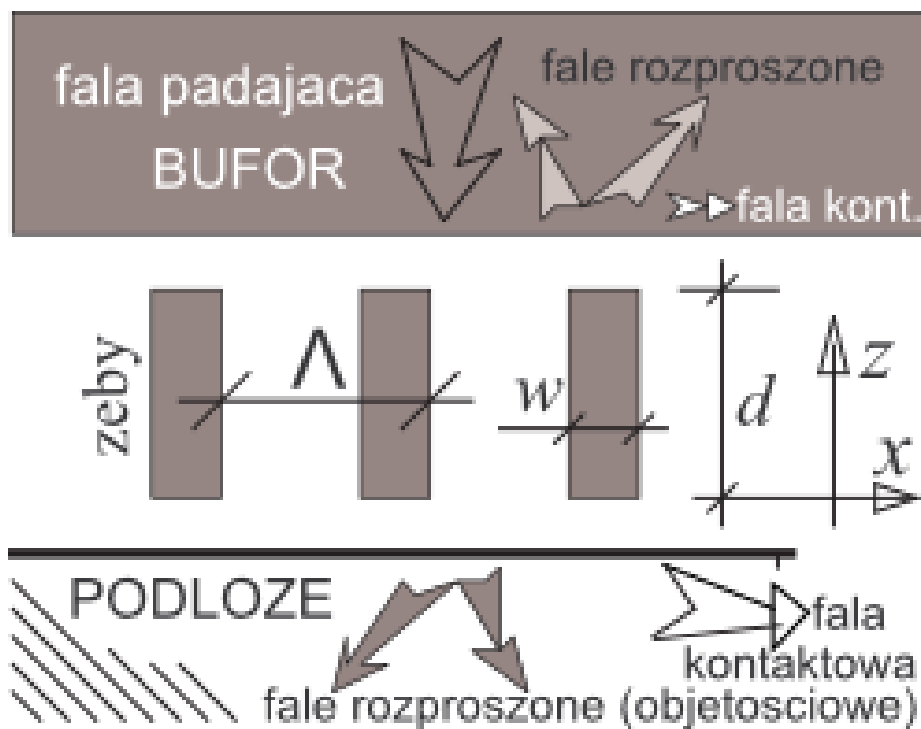
w szyku przetw. każdy ząb pobudzany byłby oddzielnie

## Najpierw układ nieskończony

- opiszemy teoretycznie elementy składowe układu:
- - półprzestrzeń bufora (części przetw. grzebien.)
- - zęby (paski sprężyste)
- - półprzestrzeń podłoża
- Interesuje nas tylko pole na powierzchniach styku:

$$e^{j\omega t} e^{-jpx}$$

## Dekompozycja struktury



# Półprzestrzeń sprężysta

r-nia konstytutywne (stanu):

$$\begin{aligned}T_{11} &= (\lambda + 2\mu)u_{1,1} + \lambda u_{3,3} \\T_{13} &= \mu u_{1,3} + u_{3,1} = T_{31} \\T_{33} &= \lambda u_{1,1} + (\lambda + 2\mu)u_{3,3}\end{aligned}\tag{1}$$

r-nia ruchu (Newtona):

$$-\rho\omega^2 u_i = T_{ij,j}\tag{2}$$

rozwiązanie  $e^{j\omega t} e^{-jpx} e^{-jqz}$  metodą Stroha

- (zauważmy, że  $\partial/\partial z = -jq$ ,  $\partial/\partial x = -jp$ )

zgrupujemy pochodne po  $z$  po lewej stronie:

$$q \begin{bmatrix} 0 & r\lambda & 1 & 0 \\ r\mu & 0 & 0 & 1 \\ \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ jT_1 \\ jT_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g - p^2 c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g - p^2 \mu & 0 & 0 \\ 0 & -p\mu & 1 & 0 \\ -p\lambda & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ jT_1 \\ jT_3 \end{bmatrix}$$

gdzie:  $T_i = T_{3i}$ ,  $i = 1, 3$  oraz  $g = \rho\omega^2$ ,  $c = \lambda + 2\mu$ , czyli: (2)

$$q\mathbf{A}\mathbf{F} = \mathbf{B}\mathbf{F}, \text{ gdzie } \mathbf{F} = [\hat{\mathbf{F}}; \check{\mathbf{F}}]; \hat{\mathbf{F}} = [u_1; u_3]$$

co po lewostronnym podzieleniu przez lewą macierz da zagadnienie własne macierzy  $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$  ( $\mathbf{F} = [u_i, u_3, jT_1, jT_3]^T$ ):

# Wart. własne = mody objętościowe

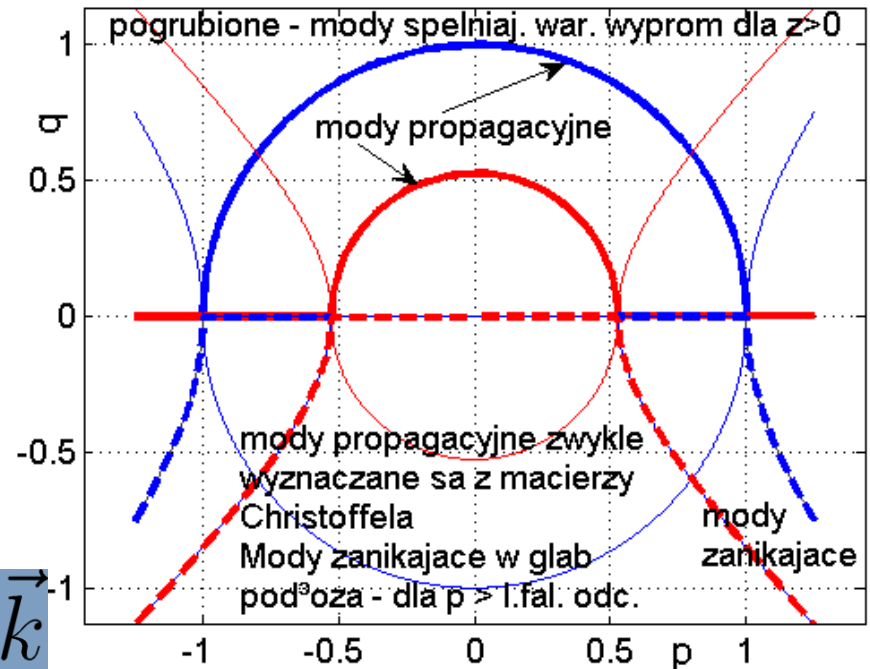
- Moc – wekt. Poyntinga decyduje o wyborze modów
- $\Pi_3 = -.5\text{Re}\{T_{3i}(j\omega u_i)^*\}$  do rozwiązania w półprz.

obl.:  $= -\omega\text{Re}\{\hat{\mathbf{F}}\check{\mathbf{F}}^*\}/2$

- Półprzestrzeń  $z>0$  war. wypromieniowania:

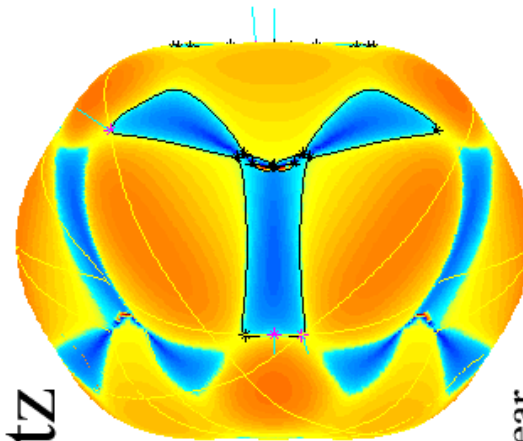
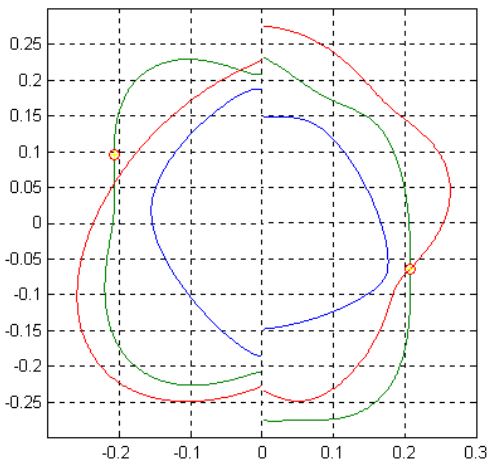
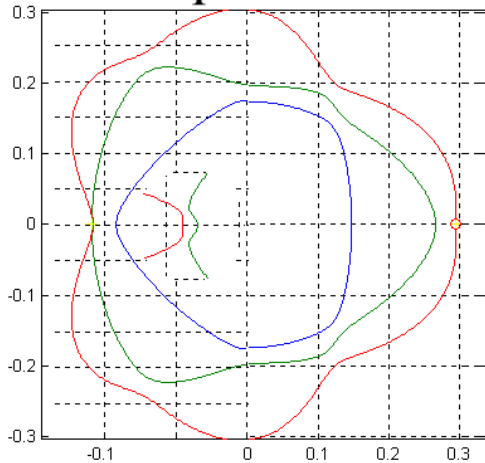
$\Pi_z > 0$ , jeśli  $\text{Im}\{q\} = 0$ ,  
albo  $\text{Im}\{q\} < 0$ ,

podł.:  $\vec{u} \parallel \vec{k}$  poprz.:  $\vec{u} \perp \vec{k}$

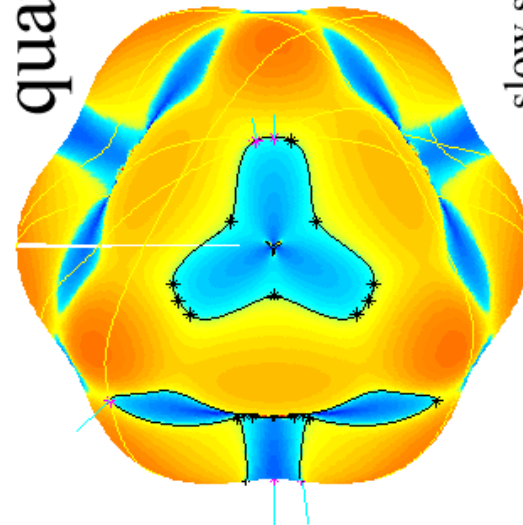


# Ciekawe pow. powolności – kryształy anizotropowe

quartz



quartz



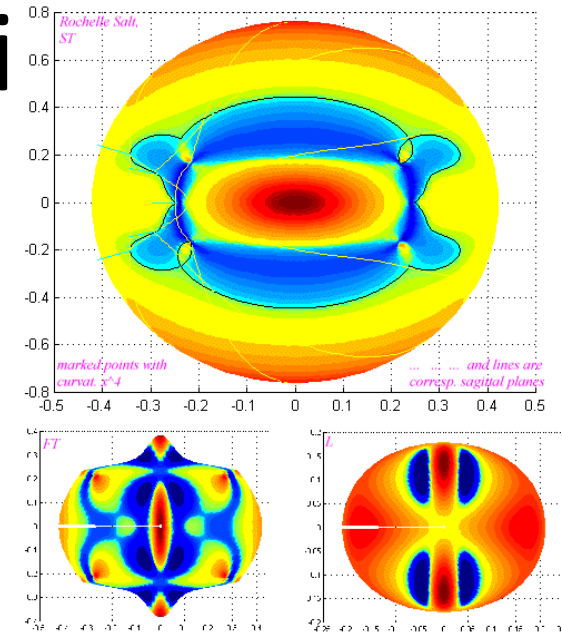
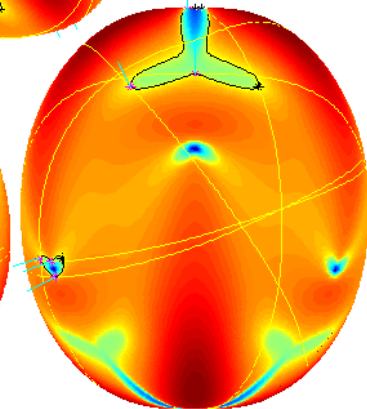
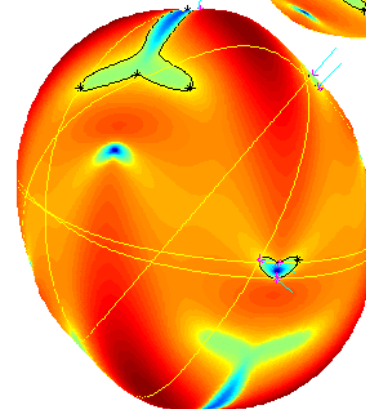
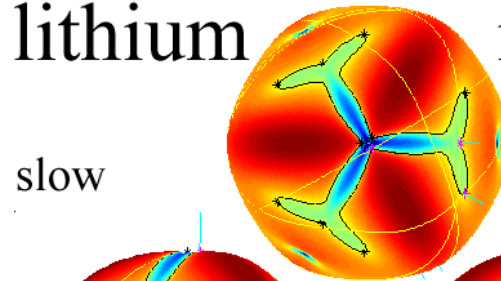
slow shear

lithium

slow

niobate

shear





# Planarna harmon. $(e^{-jpx})$ f. Greena

• Uwzgl. mody spełn. war. wypr. o ampl.  $a_{n=1,2}$

- wyznacz. przem.  $\mathbf{U}$  i napr.  $\mathbf{T}$  na pow.  $z=0$ :

$$\mathbf{U} = [\hat{\mathbf{F}}^{(n)}][a_n], \mathbf{T} = [\check{\mathbf{F}}^{(n)}][a_n] \quad \text{skąd wyznaczymy:}$$

$$\mathbf{U}|_{z=0} = \mathbf{G}(p)\mathbf{T}|_{z=0} \Rightarrow \mathbf{G} = [\hat{\mathbf{F}}^{(n)}]/[\check{\mathbf{F}}^{(n)}]$$

Dla  $z>0$  i pola  
zanikaj.  $z \rightarrow \infty$ ,  
wymuszonego  
tylko poprzez  
powierzchnię.

analitycznie, dla  $T_{33} = \mathbf{t}$ ,  $u_3 = \mathbf{u}$ :

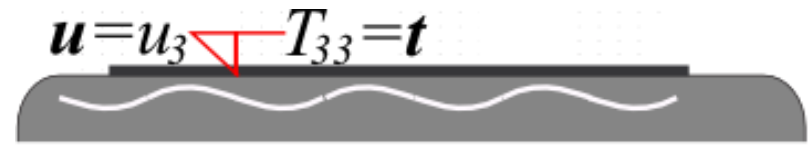
$$\mathbf{u} = \frac{jk_t^2 q_l}{\mu[(k_t^2 - 2p^2)^2 + 4p^2 q_l q_t]} \mathbf{t}$$
$$k_t^2 = \omega^2 \rho / \mu, k_l^2 = \omega^2 \rho / (\lambda + 2\mu)$$
$$q_n = \sqrt{k_n^2 - p^2}, n = l, t$$



# Moc fali powierzchni. $\Pi_R = |a_R|^2/2$

- $\mathbf{G}$  jest osobliwe w  $p = k_R$
- Podłoże obciąż. warstwą:

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}' \frac{\mathbf{t}}{p - k_R}, \text{ gdzie } D(k_R) = 0$$



$$\mathbf{t} = -j\epsilon\mathbf{u}, \epsilon \rightarrow 0, \text{ moc tracona } P = \epsilon|\mathbf{u}|^2\omega/2$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}' \frac{-j\epsilon\mathbf{u}}{p - k_R} \Rightarrow p = k_R - j\epsilon\mathbf{G}'$$

$$\text{fala: } \mathbf{u}e^{-jpx} \Rightarrow e^{-\epsilon\mathbf{G}'x}, \text{ moc: } \Pi_R e^{-2\epsilon\mathbf{G}'x}$$

Zasada zachowania energii (dla  $p \approx k_R$ ):

$$\frac{d\Pi}{dx} = \Pi_R(-2\epsilon\mathbf{G}') = P \Rightarrow \Pi_R = \frac{\omega|\mathbf{u}|^2}{4\mathbf{G}'}$$

$$a_R = \mathbf{u} \sqrt{.5\omega / \mathbf{G}'}$$

# Opis sprężystych pasków

- Przeprowadz. analizę dla pola niezal. od  $y$ :

$$e^{j\omega t} e^{\mp jqx - jpz}$$

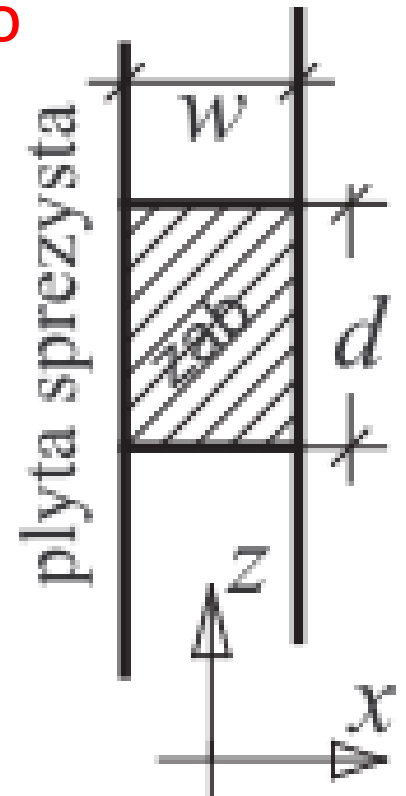
szukając przem.  $\mathbf{u}$  zal. od napr.  $\mathbf{T}$  na pow.  $\pm d/2$  przy swob. pow. boczn.

zakładamy wewn. paska (!! polaryz. mod. obj.):

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} q_l & p \\ p & -q_t \end{bmatrix} \text{diag}\{e^{-j[q_l, q_t]x}\} \mathbf{a}^+ + \begin{bmatrix} -q_l & p \\ p & q_t \end{bmatrix} \text{diag}\{e^{j[q_l, q_t]x}\} \mathbf{a}^-$$

- Model paska to fragment płyty sprężystej

o swobodnych od naprężeń powierzchniach bocznych.



# Mody płytowe

- Podst.  $\mathbf{u}$  do  $r$ -ń stanu:

$$T_{1i}(x) = T_i^\pm e^{\mp j q_{l,t} x} a_{l,t}^\pm$$

co ma znikać dla  $x = \pm w/2$

dając 4 jednor.  $r$ -nia na  $a_{l,t}^\pm$

$$\det\{[T_i^\pm e^{\pm j q_{l,t}(\pm w/2)}]\} = 0$$

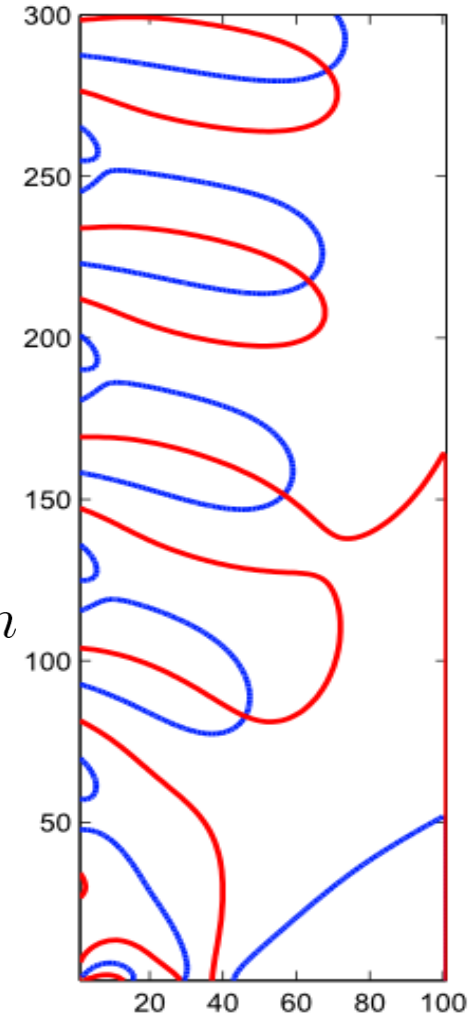
spełnione dla  $p = p_m$  i też  $-p_m, \pm p_m^*$

- tj. dla liczb falowych fal płytowych,  
kilku real (propagac.) i  $\infty$  cmplx.

Znajd. odpowied. rozwiązania na  $a_{l,t}^\pm|_m$

i wyznacz. pole przem. i napr. modu

$$\{u_i; T_{3i}\}^{(m)} = [\dots] e^{\mp j q_{l,t}^{(m)} x} a_{l,t}^{\pm(m)} e^{-j p_{\pm m} z}, p_{-m} = -p_m$$



# Pole w rozkł. Fouriera $x \in (-w/2, w/2)$

$$e^{\pm jq_{lt}x} \Big|_{x \in (-w/2, w/2)} = \sum_n \frac{\sin q_{l,t}w/2}{n\pi \mp q_{l,t}w/2}, \text{ obcięte do } n \in [-N, N]$$

więc wektor amplitud harmon. pola w przekroju  $z$  :

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{u}_{i;n}]^{(m)} &= \mathbf{U}^{(m)} \\ [\mathbf{T}_{3i;n}]^{(m)} &= \mathbf{T}^{(m)} \end{aligned} \right\} \times e^{-j\rho_m z} a_m \text{ gdzie amplitudy modów dowolne}$$

Założymy znane

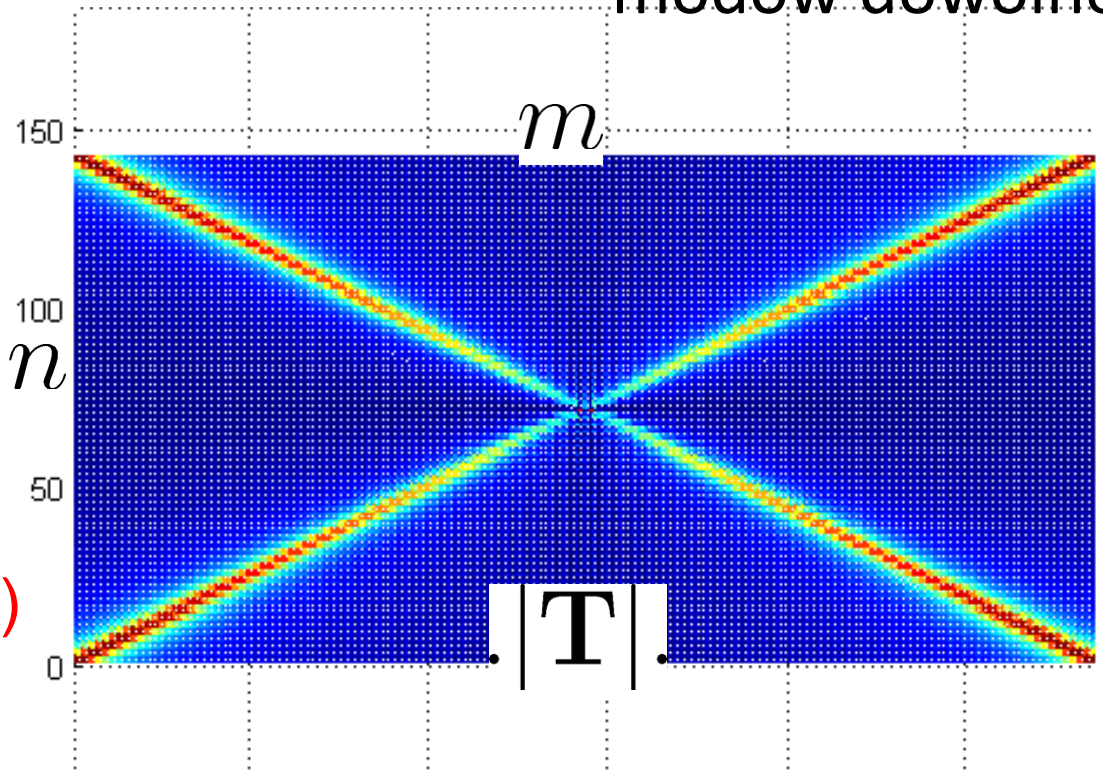
$T_{3i;n}$  na  $z = \pm d/2$

więc musimy mieć

2x więcej ampl.  $a_m$

niż harmon.  $2N + 1$

**(WŁAŚCIWE OBCIĘCIE)**



# Macierz „impedanc.” paska spręż.

$$\sum_m \mathbf{T}^{(m)} \{e^{\mp j p_m d/2}\} a_m = \mathbf{T}_{g,d} \Rightarrow a_m$$

$$\mathbf{U}_{g,d} = \sum \mathbf{U}^{(m)} \{e^{\mp j p_m d/2}\} a_m$$

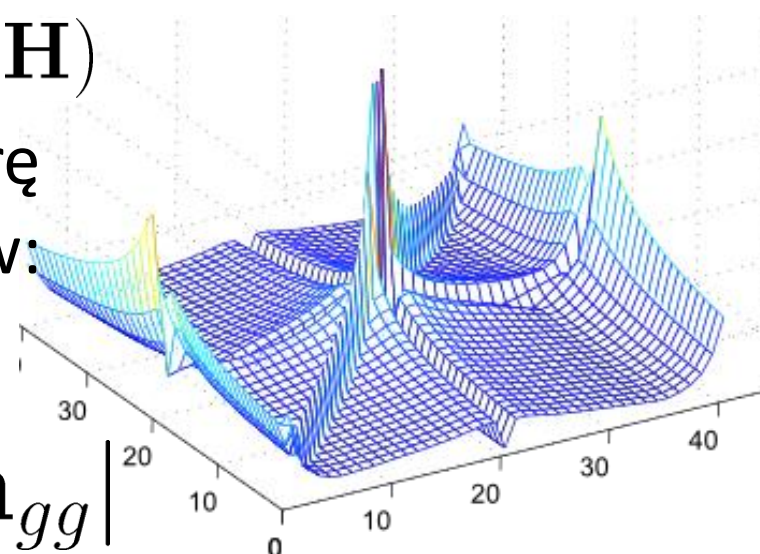
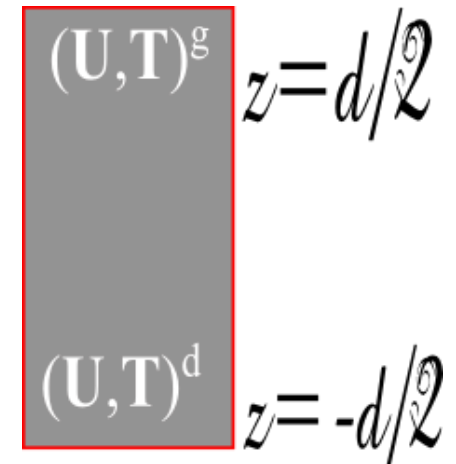
czyli  $\mathbf{U}_\alpha = \mathbf{H}_{\alpha\beta} \mathbf{T}_\beta$ ,  $\alpha, \beta = d, g$

(impedancja =  $j\omega \times$  „impedancja”  $\mathbf{H}$ )

- Dalej rozważamy prostą strukturę z **poślizgowym kontaktem** zębów:

$$[u_{3;n}]_\alpha = \mathbf{h}_{\alpha\beta} [T_{33;k}]_\beta$$

Rys. przedst. obraz macierzy  $|\mathbf{h}_{gg}|$

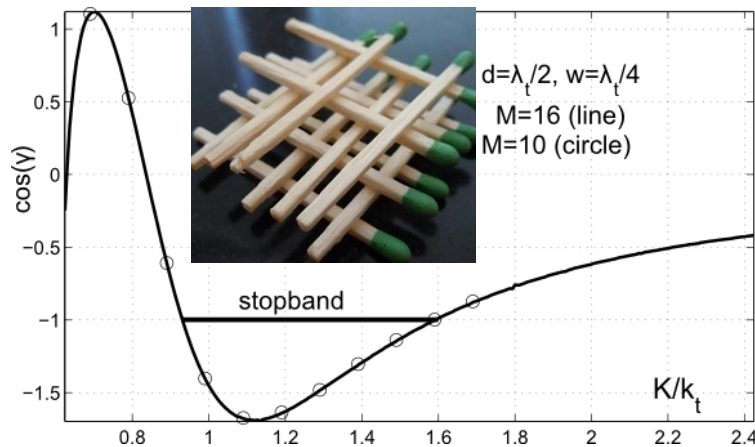


# Weryfikacja i uogólnienie

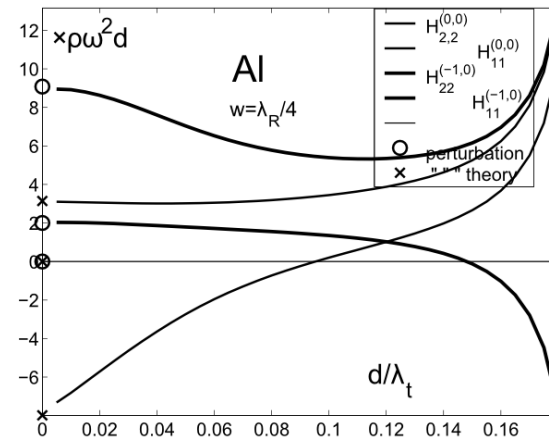
- Kiedy się policzy pełną imped. pasków obejm. wszystk.  $u_i, T_{3i}, i = 1, 2, 3$

Czy teoria jest poprawna – rozstrzyga eksperym., albo inna **zweryfikowana** teoria

to można policzyć fale w „składzie drewna”



z perspektywą zast. jako **warstwa dopasowująca**



tu – perturbac. dla małych  $d$ , co w prezentow. analiz. wymaga uwzgl. b. wielu modów  $\rightarrow$  wynik OK.



# Dotarliśmy do tytułowego zagadn.

Możemy teraz poskładać naszą strukturę -

- Podłoże i bufor – ciągłe, - przetwornika o zębach
- więc rozw. w szer. Blocha poślizg.

$$f(x) = \sum_k f_k e^{-j(r+kK)x}$$

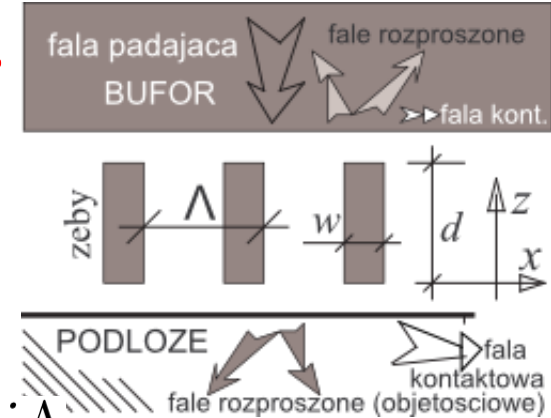
→ uzgodnić przem. i napr. na zębach

zadane odcinkami:  $x \in (-w/2, w/2) + i\Lambda$

$$U_n e^{-jnWx} = u_k e^{-j(r+kK)x} \Leftrightarrow \int_{-w/2}^{w/2} \dots dx \Rightarrow \underline{U_n = V_{nk} u_k}$$

$$t_k e^{-j(r+kK)x} \Big|_{-w/2}^{w/2} = T_n e^{-jnWx} \Leftrightarrow \int_{-w/2}^{w/2} \dots \Rightarrow \underline{t_k = \beta V_{nk} T_n}$$

$$V_{nk} = \frac{\sin(\pi n - (r + kK)w/2)}{n\pi - (r + kK)w/2}, \quad \beta = w/\Lambda, \quad \beta \mathbf{V} \mathbf{V}' = \mathbf{I}$$



# Zagadnienie brzegowe

- To w naszym przyp. sprecyz. **Warunki Brzeg.** :

$$\begin{aligned} x = d/2 : & \begin{bmatrix} \mathbf{U}_g \\ \mathbf{U}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{gg} & \mathbf{h}_{gd} \\ \mathbf{h}_{dg} & \mathbf{h}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_g \\ \mathbf{T}_d \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{szer. Fouriera} \\ e^{-jnWx}, W = 2\pi/w \end{array} \right. \\ x = -d/2 : & \end{aligned}$$

$$\text{podst.: } \begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{V}\mathbf{u} = \mathbf{h}\mathbf{T} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{G}\mathbf{t} + 2\mathbf{u}^I \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}, \mathbf{t} - \text{Bloch ser.} \\ e^{-j(r+kK)x}, K = 2\pi/\Lambda \approx k_R \end{array} \right.$$

$$\text{oraz } \mathbf{t} = \beta \mathbf{V}' \mathbf{T} \Rightarrow \underline{[\beta \mathbf{V} \mathbf{G} \mathbf{V}' - \mathbf{h}] \mathbf{T} = -2\mathbf{u}^I}$$

$$\mathbf{u} = [\cdots; u_{-2}; u_{-1}, u_0; u_1, u_2, \cdots], r \approx 0, \underline{K \approx k_R}$$

Tylko dwie skład. przenoszą moc wzdł. powierz.:

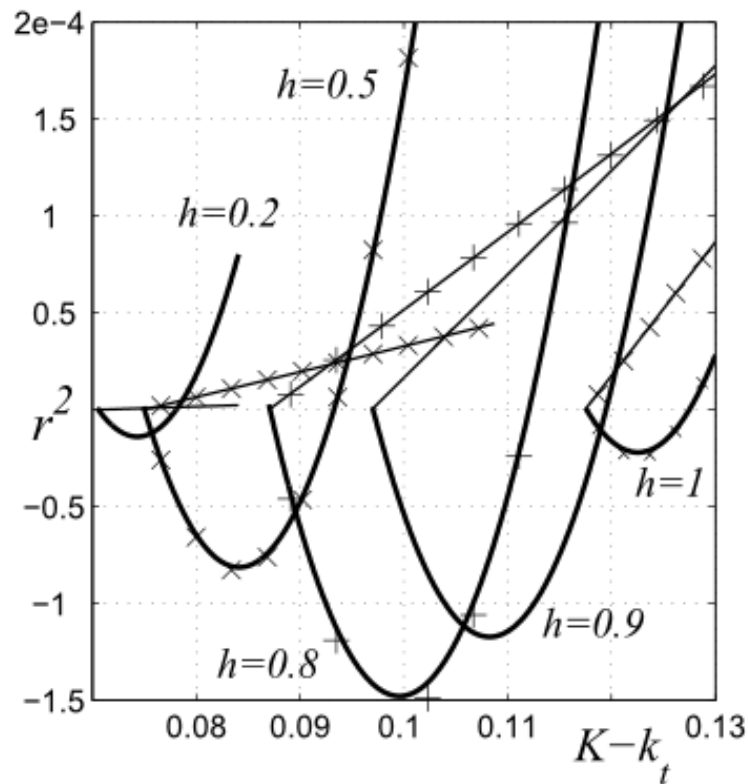
$$\Pi^\pm = \pm |a_{\pm 1}|^2 / 2; a_{\pm 1} \sim u_{\mp 1} \{ e^{-j(r \mp K)x} \}$$

- inne skład. to zlokalizow. drgania pod zębami.

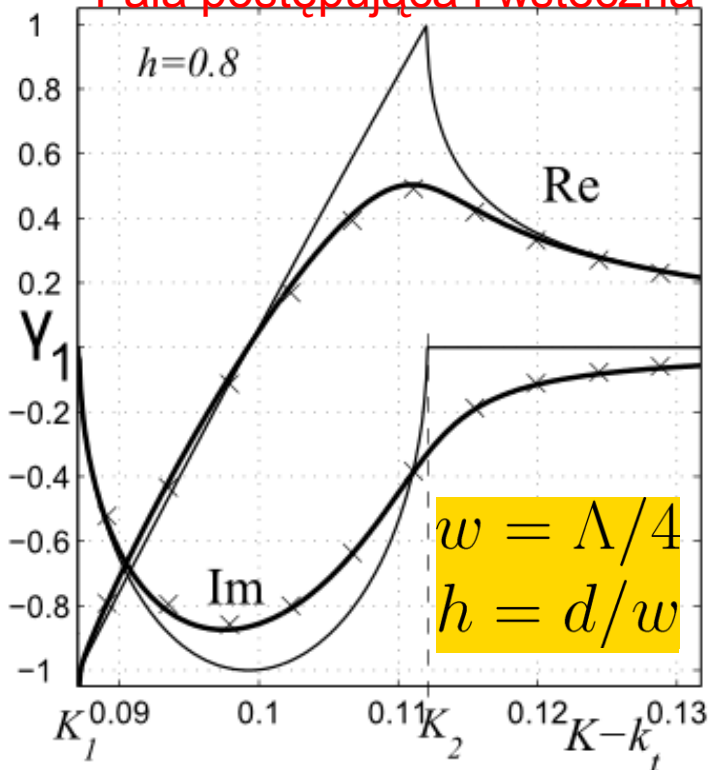
# Fala kont. („interf.”) – analiza rozw.

$$\det([\beta \mathbf{V} \mathbf{G} \mathbf{V}' - \mathbf{h}]) = \tau(r^2 - r_o^2) = 0$$

$$r_o^2 = (K - K_1)(K - K_2 + j\chi), \quad \gamma = \frac{u_1}{u_{-1}} \approx \frac{K - K_1 - r_o}{K - K_1 + r_o}$$



Fala postępująca i wsteczna



$r_o = r_R + jr_I$  zesp.- fala tłumiona – wsk. odpromien. do f. obj.

# Odpromieniowanie – interpret.

- Ponieważ  $u_0 = u_z e^{-r_I x}$  odpowiada fali podłużnej prop. się prostop. do pow.

( $r_o \approx 0$ ) to moc tej fali jest:

$$P = Z_I |\omega u_0|^2 / 2$$

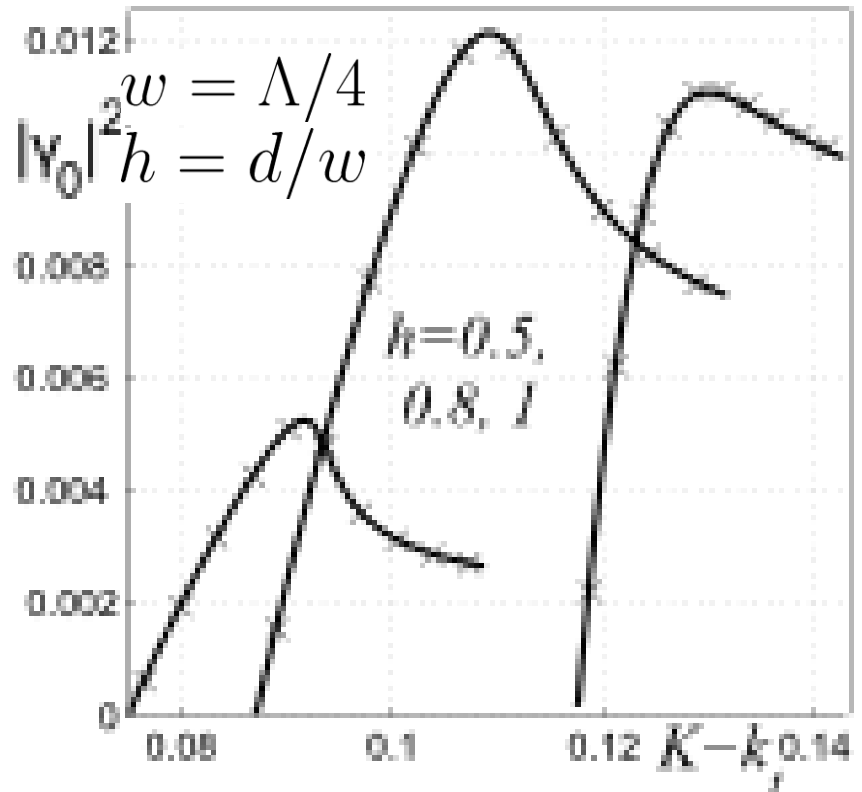
- na koszt fali powierzch.

Bilans mocy daje:

$$2r_I (\Pi^- - \Pi^+) = P$$

gdzie  $\Pi^\pm \sim |u_\pm|^2$  skąd można wyznaczyć  $\gamma_0$

- weryfik. interpr. odprom wykorzyst. w teorii przetw. odbiorczego.

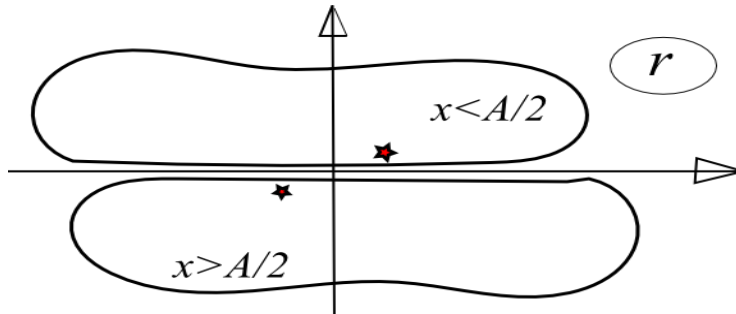
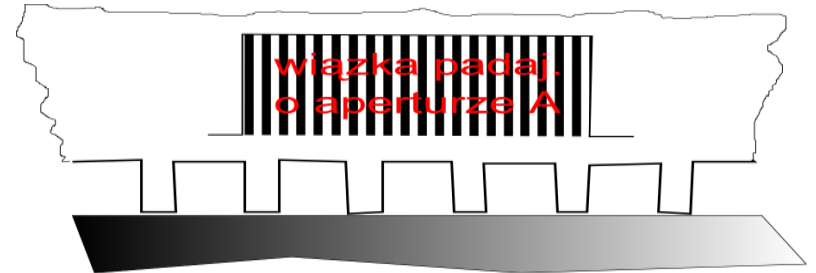


# Generacja FP w $\infty$ układzie

$$\mathbf{M}(r)\mathbf{T}(r) = \beta\mathbf{V}'\mathbf{u}^I$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}(r) = \frac{2r}{r^2 - r_0^2} \bar{\mathbf{M}}\mathbf{V}'\mathbf{u}^i(r)$$

$$\mathbf{u}(r) = \beta\mathbf{V}\mathbf{G}\mathbf{V}'\mathbf{T} \Rightarrow u_0(r)$$



$$u^I(x) = 1, x \in \left(-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right)$$

$$u^I(r) = u^I \frac{\sin \pi r A}{\pi r}$$

$$\mathbf{u}^I = [\dots, u^i(r), \dots]$$

$$u_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(r) e^{-jr x} dx \Rightarrow \text{calk. przez residua, } x < A/2 :$$

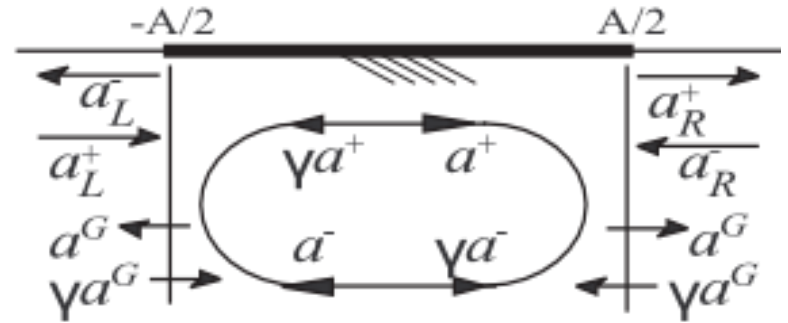
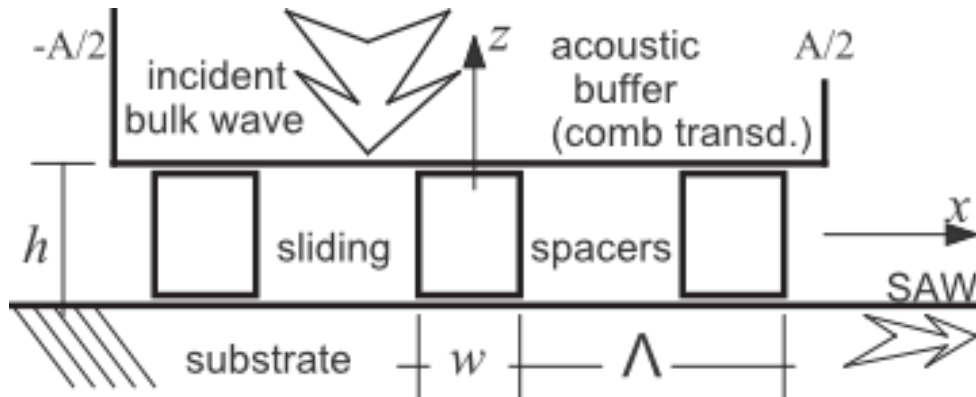
$$u_0 = \tau u^I \Rightarrow u_{-1} = \frac{\tau}{\gamma_0} u^I e^{-jr_0 - Kx}, u_1 = \gamma u_{-1} e^{-j(r_0 + K)x}$$

Skąd gener. ampl. fali kontakt. postępuj. i wstecznej:

$$a^G \sim u_{-1}, a_1 = \gamma a_{-1}; \Pi = |a^G|^2 (1 - |\gamma|^2) / 2$$

I podobnie dla fali z prawej,  $x > A/2$ .

# Ograniczony grzeb. na podłożu



„optyczne” W.Brzeg.

$x = -A/2$  :      ( $x = A/2$  podobnie)

$$a^G e^{j(r_o - K)A/2} + a^- e^{j(r_o - K)A/2} + \gamma a^+ e^{j(r_o + K)A/2} = \tilde{a}_L^-,$$

$$\gamma a^G e^{j(r_o + K)A/2} + \gamma a^- e^{j(r_o + K)A/2} + a^+ e^{j(r_o - K)A/2} = \tilde{a}_L^+$$

$$\bar{\eta}_g = \sqrt{\left| \frac{\tilde{a}_L^-|^2 / 2}{PI} \right|} \sim \frac{(1 - e^{jr_o A})(1 + \gamma)}{r_o \sqrt{A}(1 + \gamma e^{jr_o A})} w \infty$$

( $Im(r_o) > 0$ ).

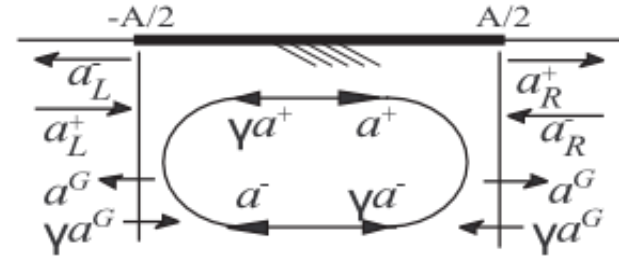
Skąd widać, że  $\eta_g \rightarrow 0$  gdy  $A \rightarrow \infty$ .

# Przetwornik odbiorczy

- Jak poprz. wyznaczamy:

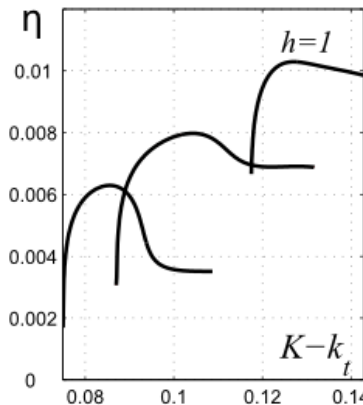
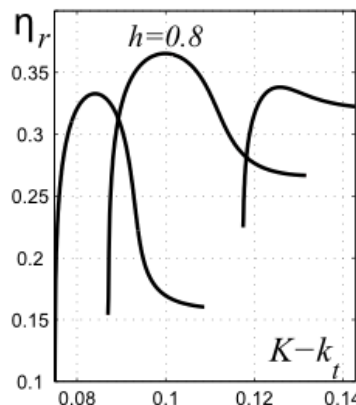
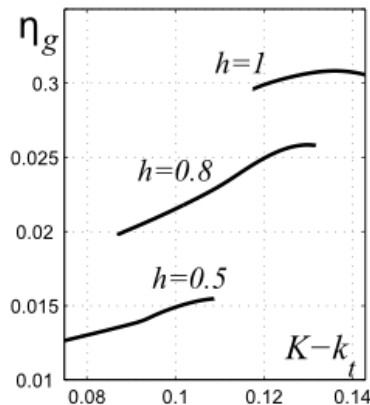
$$a_L^- = \gamma \tilde{a}_L^+ \frac{e^{j r_0 A} - e^{-j r_0 A}}{\gamma^2 e^{j r_0 A} - e^{-j r_0 A}},$$

$$a_R^+ = \tilde{a}_L^+ \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 e^{j r_0 A} - e^{-j r_0 A}} \quad \text{tj. falę odbitą i przechodz.}$$



- i liczymy co brak. – to są fale obj. odprom. do bufora (co mierzymy) i podłoża (strata), stąd:

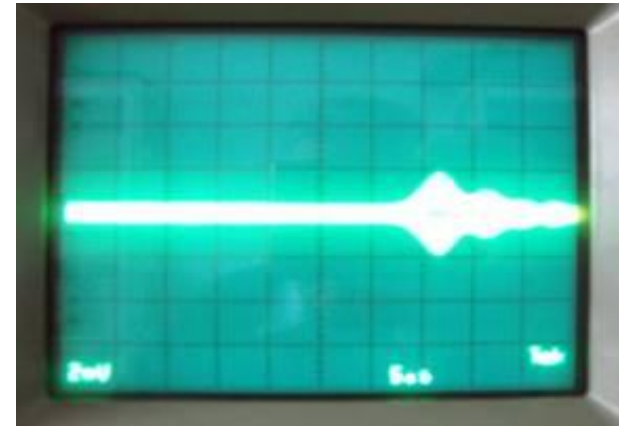
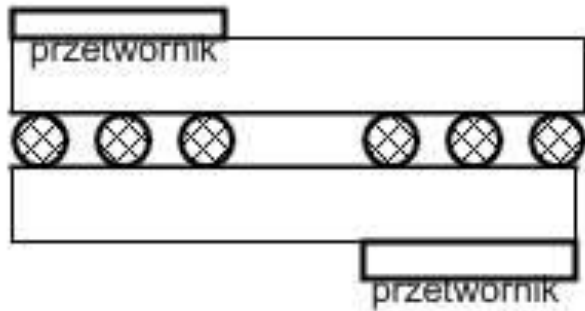
$$2\eta_r^2 = 1/2 - |a_L^- / a_L|^2 - |a_R^+ / a_L|^2$$



12 zęb.

# Podsumowanie

- A oto prosty eksperyment:



- Jak widać:
- Teoria zębatego przetwornika jest „prosta”
- Korzystne wąskie zęby – dopas. f. kont. i Rayl.
- Dla szerokich – nie ma f. kontak.– tylko straty
- Dużo zębów obniża sprawn. ale ampl. rośnie