

# Delaminacja wiotkich ustrojów sprężystych – modelowanie, identyfikacja, sterowanie

Anita Orłowska

---

# Spis treści

---

<b>1. Wstęp</b>	<b>3</b>
1.1. Podstawowe cele pracy . . . . .	3
1.2. Zakres pracy . . . . .	4
1.3. Zarys literatury . . . . .	5
<b>2. Modelowanie dystorsjami modyfikacji parametrów konstrukcyjnych – podstawy teoretyczne</b>	<b>7</b>
2.1. Podstawowe pojęcia Metody Dystorsji Wirtualnych (MDW) . . . . .	7
2.2. Test modelowania zmiany parametrów konstrukcji kratowej obciążonej statycznie . . .	11
2.3. Metoda Impulsowych Dystorsji Wirtualnych (MIDW) . . . . .	13
2.4. Test modelowania zmiany parametrów sztywnościowych konstrukcji kratowej obciążonej dynamicznie . . . . .	16
<b>3. Zastosowanie MDW i IMDW w zadaniu modelowania delaminacji</b>	<b>18</b>
3.1. Uzasadnienie przyjętego modelu belki dwuwarstwowej . . . . .	18
3.2. Wykorzystanie podejścia dystorsyjnego do modelowania odpowiedzi konstrukcji zde laminowanej obciążonej statycznie . . . . .	21
3.3. Test modelowania delaminacji w statyce . . . . .	23
3.4. Weryfikacja podejścia dystorsyjnego za pomocą elementów kontaktowych . . . . .	28
3.5. Wykorzystanie podejścia dystorsyjnego do modelowania odpowiedzi konstrukcji zde laminowanej obciążonej dynamicznie . . . . .	29
3.6. Test modelowania delaminacji w dynamice . . . . .	34
3.7. Doświadczalna weryfikacja algorytmu modelowania delaminacji w zadaniu dynamicznym . . . . .	35
3.7.1. Opis stanowiska doświadczalnego . . . . .	35
3.7.2. Opis badanego elementu konstrukcyjnego . . . . .	37
<b>4. Identyfikacja delaminacji</b>	<b>41</b>
4.1. Identyfikacja delaminacji na podstawie odpowiedzi statycznej konstrukcji . . . . .	41
4.1.1. Algorytm identyfikacji wykorzystujący MDW . . . . .	41
4.1.2. Gradient funkcji celu . . . . .	43
4.1.3. Test identyfikacji delaminacji w statyce . . . . .	46
4.2. Identyfikacja delaminacji w konstrukcji obciążonej dynamicznie . . . . .	47
4.2.1. Gradient funkcji celu . . . . .	48
4.2.2. Test algorytmu identyfikacji delaminacji w dynamice . . . . .	51

---

4.2.3. Weryfikacja eksperymentalna algorytmu identyfikacji . . . . .	54
4.3. Identyfikacja delaminacji w czasie rzeczywistym . . . . .	54
4.3.1. Analiza zmian odpowiedzi odkształceniowej spowodowanych powstaniem pęknięcia . . . . .	55
<b>5. Pół-aktywne tłumienie drgań w konstrukcji dwuwarstwowej</b>	<b>60</b>
5.1. Strategia PAR dla układu dwóch sprężyn z masą . . . . .	61
5.2. Przykład numeryczny weryfikujący efektywność PAR w układzie dwóch sprężyn z masą	64
5.3. Realizacja strategii PAR w belce dwuwarstwowej . . . . .	65
5.4. Strategia PAR w sformułowaniu MIDW . . . . .	68
5.5. Test efektywności PAR w układzie belki dwuwarstwowej . . . . .	70
5.6. Doświadczalna weryfikacja możliwości tłumienia drgań w konstrukcji dwuwarstwowej	70
<b>Oryginalne koncepcje i osiągnięcia pracy</b>	<b>75</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>77</b>
<b>Załącznik CD</b>	<b>83</b>

# ROZDZIAŁ 1

---

## Wstęp

---

### 1.1. Podstawowe cele pracy

Defekty delaminacji kompozytowych elementów konstrukcyjnych stanowią poważne zagrożenie w licznych obszarach inżynierii. Dlatego też modelowanie oraz identyfikacja delaminacji tworzą aktywnie rozwijaną w ostatnich latach grupę problemów badawczych w ramach dziedziny monitorowania stanu technicznego konstrukcji („*Structural Health Monitoring*”, SHM).

Głównym celem niniejszej rozprawy doktorskiej jest zaproponowanie nowego, efektywnego podejścia, bazującego na Metodzie Dystorsji Wirtualnych (MDW) do modelowania zjawiska delaminacji (uwzględniając problem kontaktowy) oraz identyfikacji defektów z nim związanych. Drugim celem rozprawy jest wykorzystanie tego samego podejścia do efektywnego tłumienia drgań w wiotkich ustrojach dwuwarstwowych, co stanowi problem z dziedziny tzw. konstrukcji inteligentnych.

Algorytmy oparte na Metodzie Dystorsji Wirtualnych były już z powodzeniem stosowane w problemie identyfikacji uszkodzeń powierzchniowych, manifestujących się zmianą sztywności danego elementu konstrukcji. W pracy Zielińskiego [78] przedstawiona została Metoda Impulsowych Dystorsji Wirtualnych pozwalająca na konsekwentne wykorzystanie podejścia dystorsyjnego dla zagadnień dynamiki konstrukcji. Opracowane w ramach wymienionej powyżej pracy doktorskiej dynamiczne ujęcie Metody Dystorsji Wirtualnych (MIDW) zostało wykorzystane do modelowania oddziaływań kontaktowych zachodzących w strefie zdelaminowanej.

Oprócz mającego podstawowe znaczenie dla badań prowadzonych w ramach niniejszej pracy algorytmu modelowania odpowiedzi konstrukcji zdelaminowanej zaprezentowa-

ne zostaną również:

- algorytm identyfikacji delaminacji oparty na analizie propagacji fali sprężystej w konstrukcji uszkodzonej
- eksperymentalna weryfikacja zarówno samego algorytmu modelowania delaminacji jak i jej identyfikacji
- algorytm identyfikacji delaminacji w czasie rzeczywistym wykorzystujący dane z siatki sensorów umieszczonych na powierzchni konstrukcji
- algorytm pół-aktywnego sterowania delaminacją w celu wytłumienia drgań (tzw. strategia PAR)
- eksperymentalna weryfikacja efektywności wykorzystania metody PAR w procesie tłumienia drgań.

Wszystkie przedstawione w pracy obliczenia numeryczne wykonane zostały przy pomocy stworzonego w celu implementacji opracowanych algorytmów oprogramowania. Programy: PreFEM (obliczenia wstępne dla VDMlamina i VDMbop), VDMlamina (modelowanie delaminacji), VDMbop (identyfikacja delaminacji) napisane zostały w FORTRANIE, przy czym do obliczeń MES stanowiących podstawę MDW i MIDW wykorzystany został komercyjny program ANSYS. Wymienione powyżej programy zostały załączone wraz z opisem sposobu ich użycia na płycie CD.

## 1.2. Zakres pracy

Praca została podzielna na cztery części:

1. Na część pierwszą, którą stanowi w całości rozdział II składa się opis Metody Dystorsji Wirtualnych oraz Metody Impulsowych Dystorsji Wirtualnych wraz z prostymi przykładami numerycznymi dokumentującymi ich przydatność do modelowania modyfikacji sztywnościowych konstrukcji mechanicznych (ta własność MDW i MIDW stanowi podstawę rozważań prowadzonych w pozostałych częściach pracy).
2. W części drugiej (rozdział III) opracowano algorytmy modelowania delaminacji w przypadku statycznego obciążenia konstrukcji, jak i w przypadku obciążenia siłą zależną od czasu. Ponadto starano się zweryfikować działanie modelu stworzonego na bazie podejścia dystorsyjnego za pomocą elementów kontaktowych dostępnych w komercyjnym programie ANSYS, jak również zamieszczono wyniki weryfikacji eksperymentalnej opracowanego modelu.
3. Część trzecia (rozdział IV) została w całości poświęcona zagadnieniu identyfikacji delaminacji. Zaproponowano trzy niezależne metody identyfikacji, dwie oparte na gradientowej minimalizacji funkcji celu stanowiącej miarę odstępstwa hipotetycznej odpowiedzi konstrukcji uszkodzonej (z pęknięciem opisanym przez znany wektor współczynników uszkodzenia) od odpowiedzi mierzonej w realnym eksperymencie, oraz metodę trzecią bazującą na odpowiedziach uzyskiwanych z siatki czujników umieszczonych na powierzchni konstrukcji
4. Część czwarta (rozdział V) została poświęcona propozycji wykorzystania możliwości

kontrolowanego sterowania delaminacją w celu wytłumienia drgań w konstrukcjach dwuwarstwowych (strategia ta będzie nazywana w dalszej części pracy strategią PAR, z ang. *Prestress Accumulation Release*). Na bazie modelu dystorsyjnego opracowano algorytm sterowania konstrukcją na podstawie którego przeprowadzono testy numeryczne umożliwiające ocenę efektywności tłumienia drgań metodą PAR oraz zaprezentowano stanowisko eksperymentalne zbudowane w celu weryfikacji działania tegoż algorytmu w warunkach laboratoryjnych.

W pracy ograniczono rozważania do liniowej teorii sprężystości oraz pęknięć pozostających w równowadze, tzn. nie rozwijających się.

### 1.3. Zarys literatury

Jedną z pierwszych prac prezentujących ideę dystorsji sprężystych jest opublikowana w 1970 r. praca Nowackiego [45]. Jeden z jej rozdziałów poświęcony jest w całości zagadnieniu dystorsji. Autor omawia tu zasady wariacyjne oraz twierdzenie o wzajemności prac w kontekście dystorsyjnym.

W latach późniejszych powstały monografie Holnickiego-Szulca [12, 17, 15, 16] oraz Holnickiego-Szulca i Gierlińskiego [11]. W pracach tych zaprezentowano zastosowanie dystorsji do modelowania modyfikacji konstrukcyjnych oraz strategii optymalnego sterowania i przeprojektowywania bazujące na podejściu dystorsyjnym.

Metoda Dystorsji Wirtualnych znalazła zastosowanie w analizie wrażliwości konstrukcji kratowych. Omówienie tego tematu wraz z zagadnieniem optymalnego przeprojektowywania zaprezentowane zostało w pracach Kołakowskiego i Holnickiego-Szulca [35, 37] oraz Kołakowskiego [34]. W ostatniej z wymienionych prac autor przedstawił również sposoby wyznaczania wrażliwości takich parametrów jak granica plastyczności i współczynnik wzmocnienia materiału, oraz projektowania konstrukcji adaptowalnych na ekstremalne obciążenie, gdzie dystorsje były wykorzystywane do modelowania aktywnych dysypatorów energii. Kontynuację tematów związanych z aktywnym rozpraszaniem energii modelowanym dystorsyjnie podjęto w pracach Wikły, Holnickiego-Szulca i Pawłowskiego [27, 25, 73]. Natomiast zagadnienie przeprojektowywania ustrojów ramowych przy pomocy MDW prezentowane było również w pracach Makodego, Ramireza i Corotisa [42] oraz Putreszy [54].

Dystorsje wykorzystano również do modelowania postępującego rozwoju rys. Zagadnień tych dotyczą publikacje Wiącka i Holnickiego-Szulca [72] oraz Wiącka [71].

Publikacje Holnickiego-Szulca i Zielińskiego [28, 29] zawierają propozycję metody identyfikacji uszkodzeń opartej na analizie zaburzeń propagacji fal sprężystych. Praca Zielińskiego [78] zawiera obszerny opis tzw. Impulsowej Metody Dystorsji Wirtualnych, która może być wykorzystana do opisu dynamiki konstrukcji.

Ciekawym zastosowaniem MDW jest prezentowane przez Holnickiego-Szulca, Kołakowskiego i Nashera [20] modelowanie i analiza sieci wodnych bazująca na analogiach pomiędzy równaniami równowagi, związkami geometrycznymi oraz konstytutywnymi mechaniki konstrukcji i hydrauliki.

Pierwsze próby opracowania analitycznego modelu konstrukcji zdelaminowanej poja-

wiają się pod koniec lat 70-tych w pracach Ramkumara [55]. Określił on częstości drgań własnych i kształty modalne na podstawie rozwiązania problemu warunków brzegowych dla układu czterech belek Timoshenki połączonych na brzegach delaminacji. Metodę podziału na podobszary stosowali również Tracy i Pardon [66] oraz Luo i Hanagud [41]. Shen i Grady [53] zaproponowali dwa modele bazujące na Metodzie Elementów Skończonych: pierwszy zakładający że sublaminaty w obszarze pęknięcia pozostają cały czas w kontakcie oraz drugi model całkowicie pomijający kontakt. Do modelowania zachowania konstrukcji z delaminacją stosowano również metodę podatności zastępczych (Krawczuk [39]), technikę podwójnych węzłów (Zastran [76]) a także elementy skończone z osobliwą funkcją kształtu Ostachowicz i Krawczuk [48] oraz specjalne elementy skończone umożliwiające modelowanie obszaru wokół pęknięcia (Żak, Krawczuk, Ostachowicz [75]).

Pierwsze prace dotyczące metod identyfikacji delaminacji uwzględniające jej nieliniowy charakter pojawiają się po roku 1996, kiedy to w związku z szybkim rozwojem konstrukcji kompozytowych autorzy prac poświęconych zagadnieniom SHM (Structural Health Monitoring) zaczęli dostrzegać znaczenie tego typu uszkodzenia. Zainteresowanie tematem identyfikacji delaminacji zaowocowało powstaniem wielu publikacji dotyczących m. in. możliwości zastosowania metod bazujących na propagacji fali Lamba (Cawley [4], Badcock i Birt [2]), systemów opartych na włóknach optycznych (Furrow, Brown i Mott [8]) lub na sieciach czujników piezoelektrycznych pracujących jednocześnie jako aktywator i sensor (Wang i Chang [69]) bądź też w sposób pasywny, tzn. tylko jako sensor (Osmond [46]) a także metod opartych na emisji akustycznej (Zhang [77]) oraz pomiarze impedancji elektrycznej czujników piezoelektrycznych (Park, Cudney, Imman [50]). Maeck oraz Williams i Messina [74] badali możliwość zastosowania techniki aktualizacji modelu (ang. modal updating) w celu oszacowania degradacji sztywności związanej z wystąpieniem delaminacji w konstrukcji belkowej. Wiele prac poświęconych zostało możliwości wykorzystania sieci neuronowych (Staszewski [62]) oraz algorytmów genetycznych. Wiele uwagi poświęcono również możliwości aplikacji wymienionych technik w warunkach realnych, w których konieczne jest uwzględnienie wpływu czynników zewnętrznych na zachowanie konstrukcji (Cawley [4]).

Literatura dotycząca problemów sterowania konstrukcją jest bardzo obszerna. Pod kątem tłumienia drgań w konstrukcjach belkowych badano min. rozwiązania oparte na zastosowaniu aktywnego oddziaływania na konstrukcję elementów piezoelektrycznych (dell'Isola [6], Pietrzakowski [52]), aktywatorów magnetoreologicznych (Ruangrassamee [57]) oraz możliwości zastosowania pół-aktywnej generacji sił (Kamopp [31]).

---

## Modelowanie dystorsjami modyfikacji parametrów konstrukcyjnych – podstawy teoretyczne

---

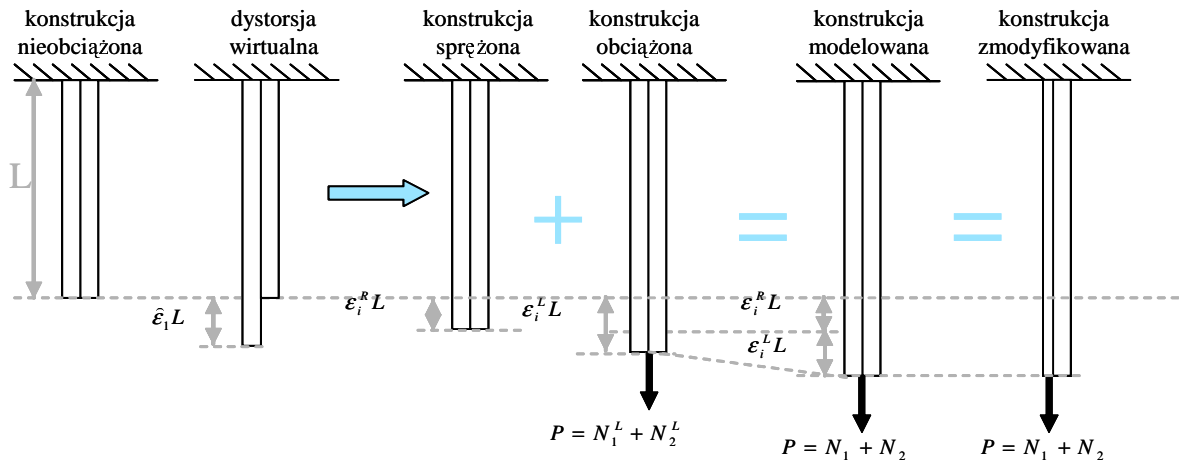
Metoda Dystorsji Wirtualnych wywodzi się z podejścia wykorzystującego pola deformacji wstępnych do modelowania zmian materiałowych [45]. Była z powodzeniem stosowana do opisu możliwych stanów sprężeń w jedno- i wielofazowych ośrodkach sprężystych [13, 14]. Ten sam aparat formalny wykorzystany został również do optymalnego przeprojektowywania ustrojów sprężystych oraz opisu odcinkami liniowo modelowanych nieliniowości fizycznych. Uogólnienie klasycznej Metody Dystorsji Wirtualnych na zagadnienia dynamiki konstrukcji znacznie rozszerzyło zakres potencjalnych zastosowań podejścia dystorsyjnego.

Przedstawione w niniejszej pracy algorytmy modelowania i identyfikacji delaminacji oraz sterowania konstrukcją rozwarstwowaną oparte są również na podejściu dystorsyjnym. Wynika stąd konieczność omówienia w pierwszej kolejności Metody Dystorsji Wirtualnych oraz Metody Impulsowych Dystorsji Wirtualnych. Poniżej przedstawiony zostanie formalny opis wspomnianych metod oraz przykłady modelowania odpowiedzi prostej konstrukcji kratowej poddanej modyfikacji sztywności.

### 2.1. Podstawowe pojęcia Metody Dystorsji Wirtualnych (MDW)

Metoda Dystorsji Wirtualnych opiera się na wykorzystaniu pól wstępnych deformacji do modelowania zmian materiałowych w konstrukcji. Podstawowe pojęcia związane z oma-





RYS. 2.1. Schemat ideowy Metody Dystorsji Wirtualnych.

wianą techniką (takie jak dystorsja jednostkowa, dystorsja wirtualna, macierz wpływu, siły kompensacyjne) najłatwiej omówić posługując się przykładem bardzo prostej konstrukcji, złożonej z dwu złączonych razem prętów (rys. 2.1).

Przyjmijmy że swobodny element nr 1 został poddany wstępnemu wydłużeniu, np. wskutek ogrzania (odkształcenie odpowiadające temu wstępnemu wydłużeniu będziemy nazywać dystorsją wirtualną). Ponieważ element ten jest wmontowany w konstrukcję, zatem wprowadzenie w nim dystorsji spowoduje powstanie w obu prętach rezydualnego pola odkształceń ( $\varepsilon_i^R$ ,  $i = 1, 2$ ) oraz stowarzyszonego z nim pola naprężeń ( $\sigma_i^R$ ,  $i = 1, 2$ ). Zależność tych pól od wywołujących je dystorsji opisują następujące wzory:

$$\varepsilon_i^R = \sum_j D_{ij} \hat{\varepsilon}_j, \quad (2.1)$$

$$\sigma_i^R = E_i A_i \sum_j (D_{ij} - \delta_{ij}) \hat{\varepsilon}_j. \quad (2.2)$$

Występująca w powyższych wzorach macierz  $D_{ij}$  jest tzw. macierzą wpływu zawierającą informację o odkształceniach w  $i$ -tym elemencie konstrukcji wywołanych wprowadzeniem jednostkowej dystorsji wirtualnej  $\hat{\varepsilon}_j = 1$  w  $j$ -tym elemencie.

Wyrażone wzorami (2.1), (2.2) pola odkształceń i naprężeń rezydualnych opisują tzw. konstrukcję sprężoną (rys. 2.1). Superponując odpowiedzi konstrukcji sprężonej oraz konstrukcji obciążonej (obciążenie zewnętrzne konstrukcji siłą powoduje wygenerowanie pola deformacji  $\varepsilon_i^L$  i towarzyszącego mu pola naprężeń  $\sigma_i^L$ ) otrzymamy w wyniku odpowiedź konstrukcji modelowanej dystorsjami. Wzory opisujące stany naprężeń i odkształceń w takiej konstrukcji przyjmują postać:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^L + \varepsilon_i^R = \varepsilon_i^L + \sum_j D_{ij} \hat{\varepsilon}_j, \quad (2.3)$$

$$\sigma_i = E_i A_i (\varepsilon_i - \hat{\varepsilon}_i) = \sigma_i^L + \sigma_i^R = E_i A_i \varepsilon_i^L + E_i A_i \sum_j (D_{ij} - \delta_{ij}) \hat{\varepsilon}_j. \quad (2.4)$$

Dalsze rozważania oparte będą na założeniu, że konstrukcja modelowana dystorsjami i konstrukcja zmodyfikowana są identyczne w sensie równości ich pól odkształceń i naprężeń. Zatem wprowadzenie odpowiedniej dystorsji wirtualnej w elemencie, w którym dokonano zmiany sztywności jest równoważne wprowadzonej modyfikacji.

Zdefiniujmy teraz bardzo ważne dla dalszych rozważań prowadzonych w niniejszej pracy pojęcie wektora modyfikacji parametrów konstrukcyjnych (wektora modyfikacji sztywności). Zgodnie ze wspomnianym postulatem równości pól odkształceń i naprężeń konstrukcji modelowanej i zmodyfikowanej możemy zapisać następującą równość:

$$\hat{E}_i \hat{A}_i \varepsilon_i = E_i A_i (\varepsilon_i - \hat{\varepsilon}_i), \quad (2.5)$$

gdzie  $A_i, E_i$  opisują sztywność elementów konstrukcji przed modyfikacją,  $\hat{A}_i, \hat{E}_i$  natomiast konstrukcji zmodyfikowanej. Zatem zmiana sztywności może być wyrażona przez dystorsje wirtualne w następujący sposób:

$$\mu_i = \frac{\hat{E}_i \hat{A}_i}{E_i A_i} = \frac{\varepsilon_i - \hat{\varepsilon}_i}{\varepsilon_i}. \quad (2.6)$$

Znając wartości składowych wektora  $\mu_i$ , możemy obliczyć odpowiadające im dystorsje wirtualne, które, zgodnie z równaniem (2.6) są związane z wektorem modyfikacji sztywności prostą zależnością:

$$\hat{\varepsilon}_i = (1 - \mu_i) \varepsilon_i. \quad (2.7)$$

Reasumując, algorytm modelowania odpowiedzi konstrukcji zmodyfikowanej dla rozważanego układu dwu prętów obejmował będzie następujące etapy:

- obliczenie odpowiedzi liniowej konstrukcji  $\varepsilon_i^L$  na zadane obciążenie  $P$ ,
- obliczenie macierzy wpływu  $D_{ij}$ , zawierającej informacje o odkształceniach wywołanych w każdym z elementów poprzez wprowadzenie jednostkowej dystorsji wirtualnej (w omawianym przypadku będzie to macierz  $2 \times 2$ ),
- podanie wektora modyfikacji sztywności  $\mu_i$ ,
- rozwiązanie układu równań:

$$\sum_j [\delta_{ij} - (1 - \mu_i) D_{ij}] \hat{\varepsilon}_j = (1 - \mu_i) \varepsilon_i^L \quad (2.8)$$

ze względu na zmienną  $\hat{\varepsilon}_i$ ,

- obliczenie odkształceń w elementach konstrukcji zgodnie z równaniem:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^L + \varepsilon_i^R = \varepsilon_i^L + \sum_j D_{ij} \hat{\varepsilon}_j. \quad (2.9)$$

Bardzo istotnym elementem algorytmu bazującego na podejściu dystorsyjnym jest obliczanie macierzy wpływu, w której przechowywane są tzw. wektory wpływu określające odkształcenia (lub inną liniową odpowiedź konstrukcji, np. przemieszczenia [73]) wywołane wprowadzeniem jednostkowej dystorsji wirtualnej. Zgodnie z przyjętą definicją dystorsji wirtualnej, jest ona efektem oddziaływania pozastatycznego analogicznego do imperfekcji geometrycznej lub obciążenia termicznego. Zatem stan dystorsji jednostkowej (tzn. takiej, która

powoduje jednostkowe odkształcenie swobodnego elementu konstrukcji), może być w Metodzie Elementów Skończonych zrealizowany poprzez wprowadzenie ekwiwalentnego obciążenia statycznego, w dalszej części pracy nazywanego obciążeniem kompensacyjnym. W przypadku elementu kratowego mamy do czynienia tylko z jednym typem odkształceń (są to odkształcenia osiowe), a co za tym idzie, również z jednym typem dystorsji wirtualnej – wstępnym wydłużeniem pręta, realizowanym poprzez wprowadzenie obciążenia kompensacyjnego w postaci samorównoważającej się pary sił rozciągających pręt. Tak więc w przypadku konstrukcji prętowych wymiar macierzy wpływu (zakładając że chcemy opracować algorytm umożliwiający wprowadzenie modyfikacji w dowolnym elemencie konstrukcji a nie tylko w wybranym jej fragmencie) jest równy  $n \times n$ , gdzie  $n$  stanowi liczbę elementów tejże konstrukcji. Nieco inaczej wygląda macierz wpływu w przypadku konstrukcji ramowych. Jak wiadomo, w ramowym elemencie skończonym występują trzy typy odkształceń: odkształcenie podłużne, krzywiznowe i postaciowe. Nawet jeśli pominiemy deformacje postaciowe (wpływ odkształcenia postaciowego można zazwyczaj zaniedbać przyjmując założenia Bernoulliego<sup>1)</sup>), to i tak pozostanie nam rozważenie dwu śladowych wektora dystorsji, którymi będą dystorsje podłużne (opisujące wprowadzenie w danym elemencie wstępnego odkształcenia podłużnego) oraz dystorsja krzywiznowa (opisująca stan czystego zginania). Zagadnienie obliczania macierzy wpływu dla konstrukcji ramowych zostało bardzo dokładnie przedyskutowane w [78].

Jak to zostało wykazane w rozdziale I, algorytmy bazujące na MDW okazały się użytecznym narzędziem pozwalającym na rozwiązanie co najmniej kilku istotnych zagadnień mechaniki konstrukcji. Niemniej jednak stosując MDW należy zdawać sobie sprawę zarówno z zalet opartego na niej rozwiązania, jak i z pewnych ograniczeń. Podsumowując część rozdziału dotyczącą podstawowych pojęć i założeń MDW, zestawmy więc korzyści wynikające z zastosowania tej techniki oraz argumenty przemawiające na jej niekorzyść.

Do najbardziej istotnych zalet MDW należą:

- możliwość efektywnego wykorzystania modelu konstrukcji (raz zbudowany model MES może zostać wykorzystany do symulacji zachowania obiektu z różnego typu modyfikacjami sztywnościowymi),
- możliwość beziteracyjnego rozwiązywania zagadnień rozwiązywanych metodami klasycznymi w sposób iteracyjny (np. badanie wrażliwości ustrojów w zakresie sprężysto-plastycznym),
- możliwość analitycznego obliczania gradientu funkcji odpowiedzi (rozumianej jako odpowiedź danego elementu konstrukcji na określone obciążenie) ze względu na wektor modyfikacji  $\bar{\mu}_i$ , co może być wykorzystane np. do efektywnej analizy wrażliwości [34] wykazano przewagę MDW nad MRS<sup>2)</sup>) lub do identyfikacji uszkodzeń.

Obszar zastosowań MDW ograniczają:

- założenie liniowości geometrycznej (w przypadku dużych przemieszczeń stosowanie

<sup>1)</sup> Założenie Bernoulliego mówi, że przekroje poprzeczne belki pozostają po deformacji nie tylko płaskie ale również prostopadłe do osi odkształconego pręta. Przyjęcie tego założenia jest uzasadnione w przypadku cienkich konstrukcji belkowych.

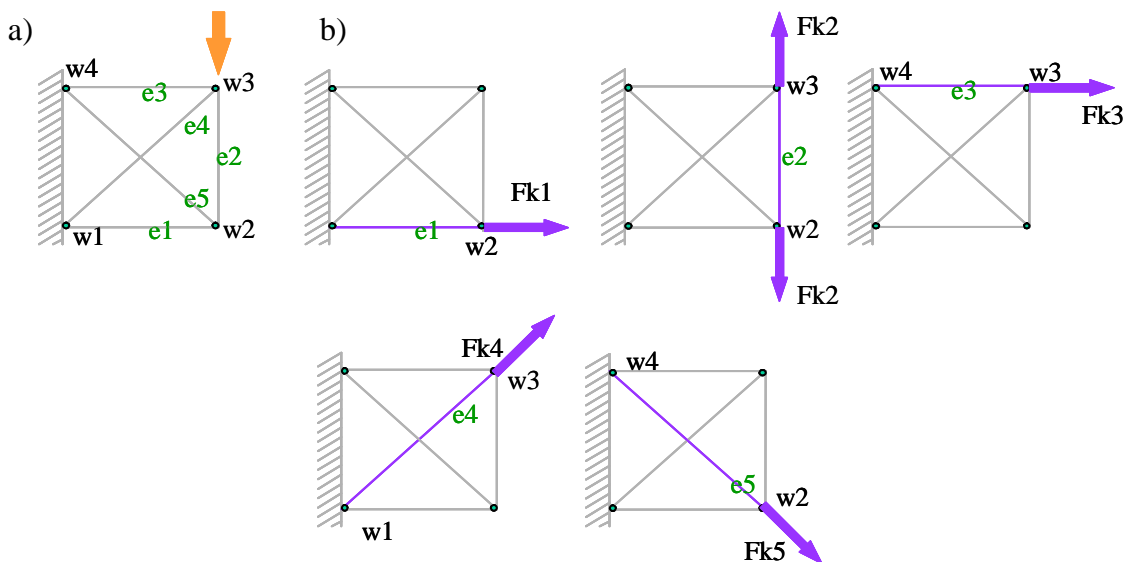
<sup>2)</sup> MRS – Metoda Różnic Skończonych

MDW wymaga aktualizacji macierzy wpływu na kolejnych przyrostach, co znacznie obniża efektywność metody),

- problem rozmiaru macierzy wpływu.

## 2.2. Test modelowania zmiany parametrów konstrukcji kratowej obciążonej statycznie

Poniżej zamieszczono bardzo prosty przykład modelowania odpowiedzi konstrukcji o zmodyfikowanej sztywności. Rozważana konstrukcja składa się z 5 elementów kratowych (ponumerowanych zgodnie z rys. 2.2), o jednakowej wartości modułu Younga  $E = 100 \cdot 10^9$  Pa i przekroju poprzecznego  $A = 1.759 \cdot 10^{-4}$  m<sup>2</sup>.



RYS. 2.2. Pięcioelementowa kratownica sprężysta obciążona: (a) siłą skupioną, (b) układem sił kompensacyjnych realizujących kolejne stany dystorsyjne.

Obliczenie pełnej odkształceniowej macierzy wpływu będzie polegało na obliczeniu deformacji wywołanych w elementach konstrukcji wskutek wprowadzenia odpowiednich dystorsji jednostkowych, a w rezultacie wskutek przyłożenia w węzłach  $w_2$ ,  $w_3$  odpowiednich sił kompensacyjnych  $F_{k1}$ ,  $F_{k2}$ ,  $F_{k3}$ ,  $F_{k4}$ ,  $F_{k5}$  (przy czym  $F_{k1} = F_{k3} = F_{k4} = F_{k5} = \frac{1}{2}F_{k2} = \frac{1}{2}EA$ ).

Założmy że chcemy zmodyfikować sztywność elementu 4 o 50% ( $\mu_4 = 0.5$ ) i obliczyć odpowiedź tak zmodyfikowanej konstrukcji na obciążenie siłą skupioną  $P = 30$  kN. Wykorzystanie do tego celu związków (2.3) i (2.4), wymaga znajomości wektora wpływu wywołanego wprowadzeniem jednostkowej dystorsji wirtualnej w elemencie 4. Wprowadzenie dystorsji w tymże elemencie jest realizowane za pomocą obciążenia kompensacyjnego  $F_{k4}$ , dla którego

siły osiowe w prętach są następujące:

$$\begin{aligned} N_1 &= 0.23103 \cdot 10^{11} \text{ N}, \\ N_2 &= 0.23103 \cdot 10^{11} \text{ N}, \\ N_3 &= 0.23103 \cdot 10^{11} \text{ N}, \\ N_4 &= 0.67327 \cdot 10^{11} \text{ N}, \\ N_5 &= -0.32673 \cdot 10^{11} \text{ N}. \end{aligned}$$

Odształcenia sprężyste w każdym z elementów przyjmują wartości:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 0.23103, \\ \varepsilon_2 &= 0.23103, \\ \varepsilon_3 &= 0.23103, \\ \varepsilon_4 &= 0.67327, \\ \varepsilon_5 &= -0.32673. \end{aligned}$$

Przeprowadzenie analogicznego rozumowania dla dystorsji wprowadzonych w pozostałych elementach konstrukcji prowadzi do obliczenia następującej odkształceniowej macierzy wpływu:

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} 0.884 & -0.058 & -0.116 & 0.232 & 0.232 \\ -0.116 & 0.442 & -0.116 & 0.232 & 0.232 \\ -0.116 & -0.058 & 0.884 & 0.232 & 0.232 \\ 0.162 & 0.082 & 0.164 & 0.674 & -0.326 \\ 0.162 & 0.082 & 0.164 & -0.326 & 0.674 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

W ten sposób otrzymujemy macierz kwadratową, niesymetryczną, na diagonalu występują składniki dodatnie mieszczące się w przedziale (0,1) (jest to cecha charakterystyczna odkształceniowej macierzy wpływu). Odpowiedź liniowa  $\varepsilon_i^L$  konstrukcji obciążonej siłą skupioną  $P = 30 \text{ kN}$  zawiera składowe odpowiadające odkształceniom generowanym w poszczególnych elementach kratownicy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^L &= -0.000754, \\ \varepsilon_2^L &= -0.000754, \\ \varepsilon_3^L &= -0.000951, \\ \varepsilon_4^L &= -0.001345, \\ \varepsilon_5^L &= 0.001066. \end{aligned}$$

Znajomość macierzy wpływu i odpowiedzi liniowej pozwala na wykorzystanie zależności (2.3) do obliczenia odpowiedzi konstrukcji zmodyfikowanej. Wyniki uzyskane za pomocą algorytmu opartego na MDW zaimplementowanego w środowisku MATLAB oraz wyniki uzyskane przy pomocy komercyjnego programu ANSYS zostały zamieszczone w tab. 2.1.

TABLICA 2.1. Porównanie wyników MATLAB/ANSYS

Element	MATLAB	ANSYS
1	-0.0009885131	-0.0009885139
2	-0.0009885131	-0.0009885139
3	0.0007170013	0.0007170005
4	-0.0020279833	-0.0020279836
5	0.0013979729	0.0013979699

### 2.3. Metoda Impulsowych Dystorsji Wirtualnych (MIDW)

Metody dystorsyjne przez długi czas wykorzystywane były w zagadnieniach statyki konstrukcji. Bazująca na statycznej macierzy wpływu Metoda Dystorsji Wirtualnych stosowana była m.in. w zagadnieniach analizy wrażliwości konstrukcji i jej optymalnego przeprojektowania [34, 37], a także w zagadnieniach modelowania elementów aktywnych w konstrukcjach sterowalnych [33, 27].

W pracy [78] przedstawiona została oryginalna koncepcja zastosowania idei dystorsji wirtualnych do problemów dynamiki konstrukcji. Zaproponowano modyfikację MDW polegającą na wprowadzeniu impulsowych dystorsji wirtualnych zależnych od czasu.

Podstawą uogólnienia Metody Dystorsji Wirtualnych na zagadnienia dynamiki konstrukcji jest założenie, że dowolna funkcja wymuszająca może być rozpatrywana jako złożenie sekwencyjnie następujących po sobie elementarnych impulsów o wielkościach równych wartościom tej funkcji w kolejnych chwilach czasowych, oraz że skutek działania tejże funkcji wymuszającej jest równoważny sumie efektów wywołanych przez owe elementarne impulsy. Podejście oparte na wspomnianym założeniu, znane w literaturze jako metoda impulsowej funkcji przejścia zostało omówione w pozycjach [5, 78].

Podstawowym pojęciem którym posługuje się metoda funkcji przejścia jest impuls siły działającej w krótkim czasie  $(t_1, t_2)$ , którego wartość opisuje całka oznaczona:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt. \quad (2.11)$$

Średnia wartość impulsu tej siły w przedziale czasu  $\Delta t$  równa

$$P_{\text{sr}} = \frac{I}{\Delta t}, \quad (2.12)$$

przy  $\Delta t$  dążącym do zera rośnie do nieskończoności, w związku z czym wygodne jest przedstawienie siły impulsowej za pomocą funkcji delta Diraca, określonej jako:

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq \tau \\ \infty & \text{dla } t = \tau \end{cases} \quad (2.13)$$

i posiadającej następujące własności:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = 1 \quad (2.14)$$

oraz

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(t) \delta(t - \tau) dt = q(\tau), \quad (2.15)$$

gdzie  $q(t)$  jest dowolną funkcją ciągłą i ograniczoną. Zatem wartość funkcji  $q(t)$  dla dowolnej chwili czasu  $\tau$  można przedstawić w postaci całki (2.15).

Rozpatrzmy układ dynamiczny opisany klasycznym równaniem ruchu:

$$m \ddot{q}(t) + c \dot{q}(t) + k q(t) = P(t), \quad (2.16)$$

o jednorodnych warunkach początkowych,  $q(t) = 0$ ,  $\dot{q}(t) = 0$ , poddany w chwili  $\tau = 0$  obciążeniu impulsowemu  $P(t) = I \delta(t - \tau)$  o wartości  $I$ . Zadanie to jest równoważne nadaniu układowi nieobciążonemu ( $P(t) \equiv 0$ ) prędkości początkowej równej (zgodnie z zasadą zachowania pędu):

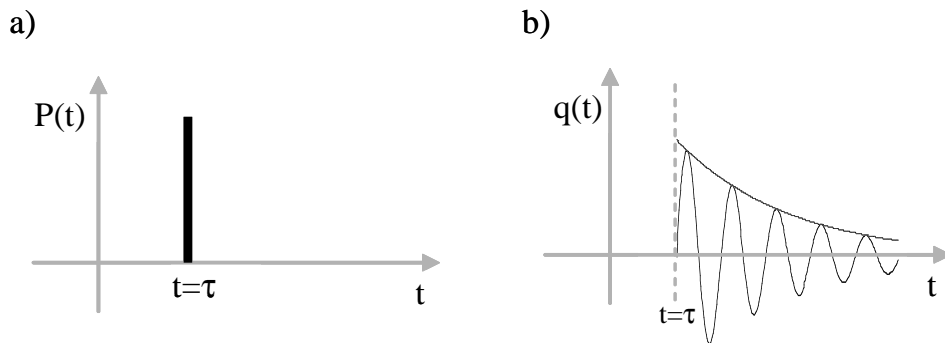
$$\dot{q}(t = \tau) = \frac{I}{m}. \quad (2.17)$$

Mamy zatem do czynienia z następującym zagadnieniem początkowym:

$$m \ddot{q}(t) + c \dot{q}(t) + k q(t) = 0, \quad (2.18)$$

$$q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = \frac{I}{m} = \frac{1}{m}. \quad (2.19)$$

Rozwiązanie tak sformułowanego zadania nazywane jest odpowiedzią impulsową lub impulsową funkcją przejścia. Funkcję delta Diraca dla chwili  $t = \tau$  oraz impulsową funkcję przejścia dla układu tłumionego o jednym stopniu swobody  $h(t - \tau)$  przedstawia rys. 2.3.



RYC. 2.3. (a) Funkcja delta Diraca oraz (b) impulsowa funkcja przejścia dla układu tłumionego.

Dla układu o wielu stopniach swobody  $h(t - \tau)$  jest macierzą której element  $h_{ij}(t)$  definiujemy jako odpowiedź  $i$ -tej współrzędnej układu spowodowaną działaniem impulsu siły zadanym w chwili  $\tau = 0$  w kierunku współrzędnej  $j$ .

Odpowiedź układu obciążonego siłą zależną w dowolny sposób od czasu (zgodnie z obowiązującą dla układów liniowych zasadą superpozycji) uzyskamy sumując odpowiedzi na wszystkie elementarne impulsy z których składa się funkcja wymuszająca:

$$q(t) = \int_0^t P(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (2.20)$$

Wykorzystując analogię do impulsowych funkcji przejścia, przyjmujemy że elementarnym stanem dystorsyjnym potrzebnym do obliczenia macierzy wpływu jest tzw. impuls dystorsji jednostkowej, czyli wstępne odkształcenie jednostkowe wymuszone dynamicznie w chwili początkowej. Wymuszenie to jest realizowane poprzez przyłożenie w odpowiednich węzłach konstrukcji obciążenia kompensacyjnego o charakterze impulsowym i wielkości odpowiadającej sile  $Q$ , jaką należy obciążyć swobodny element, aby spowodować jego jednostkowe wydłużenie.

W praktyce impulsowe obciążenie kompensacyjne zastępuje się warunkiem na prędkość początkową<sup>3)</sup> dla jednorodnego równania ruchu (2.18) o zerowym przemieszczeniu początkowym, tj.:

$$\dot{q}(0) = v_0 = \frac{Q\Delta t}{m}, \quad q(0) = 0, \quad (2.21)$$

gdzie  $Q$  jest (statycznym) obciążeniem kompensacyjnym. Algorytm wyznaczania impulsowej macierzy wpływu oraz jej własności zostały omówione bardzo szczegółowo w pracy [78]. Istotne znaczenie dla wyników obliczeń numerycznych ma uwzględnienie faktu, iż macierz wpływu uzyskana wskutek całkowania równań ruchu z warunkami początkowymi opisanymi równaniami (2.21) jest tzw. przybliżoną macierzą wpływu. Składowe impulsowej macierzy wpływu, zgodnie z [78] można obliczyć korzystając ze wzoru:

$$D_{ij}(t) = \frac{1}{4}\tilde{D}_{ij}(t-1) + \frac{1}{2}\tilde{D}_{ij}(t) + \frac{1}{4}\tilde{D}_{ij}(t+1). \quad (2.22)$$

Równania opisujące odpowiedź konstrukcji zmodyfikowanej przyjmują następującą formę:

$$\varepsilon_i(t) = \varepsilon_i^L(t) + \sum_{\tau=0}^t \sum_j D_{ij}(t-\tau) \hat{\varepsilon}_j(\tau), \quad (2.23)$$

$$\sigma_i(t) = \sigma_i^L(t) + \sum_{\tau=0}^t \sum_j [D_{ij}(t-\tau) - \delta_{ij}] \hat{\varepsilon}_j(\tau). \quad (2.24)$$

Założenie równości pól odkształceń i naprężeń konstrukcji zmodyfikowanej i konstrukcji modelowanej dystorsjami, pozwala na przekształcenie wzoru (2.23) do postaci:

$$\sum_j [\delta_{ij} - (1 - \mu_i) D_{ij}(0)] \hat{\varepsilon}_j(\tau) = (1 - \mu_i) \left[ \varepsilon_i^L(t) + \sum_{\tau=0}^{t-1} \sum_j D_{ij}(t-\tau) \hat{\varepsilon}_j(\tau) \right]. \quad (2.25)$$

Uzyskujemy więc układ równań macierzowych, z którego podobnie jak to miało miejsce w algorytmie sformułowanym dla zadań bazujących na statycznej Metodzie Dystorsji Wirtualnych, łatwo możemy obliczyć wartości dystorsji wirtualnych dla każdego kroku czasowego.

Występująca we wzorach (2.23), (2.24) i (2.25) macierz  $D_{ij}(t)$  jest macierzą trójwymiarową służącą do superpozycji odpowiedzi uzyskanych od sekwencyjnie następujących w kolejnych chwilach  $\tau$  elementarnych impulsów dystorsyjnych. Wprowadza to konieczność dodatkowego sumowania po czasie, co znacznie spowalnia działanie algorytmu obliczeniowego

<sup>3)</sup> Zgodnie z zasadą zachowania pędu:  $m \frac{v_0 - 0}{\Delta t} = Q$ ; stąd wartość prędkości początkowej:  $v_0 = \frac{Q\Delta t}{m}$ .



w przypadku dużych konstrukcji. Wykorzystanie podejścia dystorsyjnego do modelowania odpowiedzi dynamicznej konstrukcji podlega ponadto ograniczeniom wynikającym z faktu wykorzystania zasady superpozycji (ograniczenie klasy zagadnień do dynamiki małych drgań, układów liniowych bądź nieliniowych rozwiązywanych jako fragmentami liniowe).

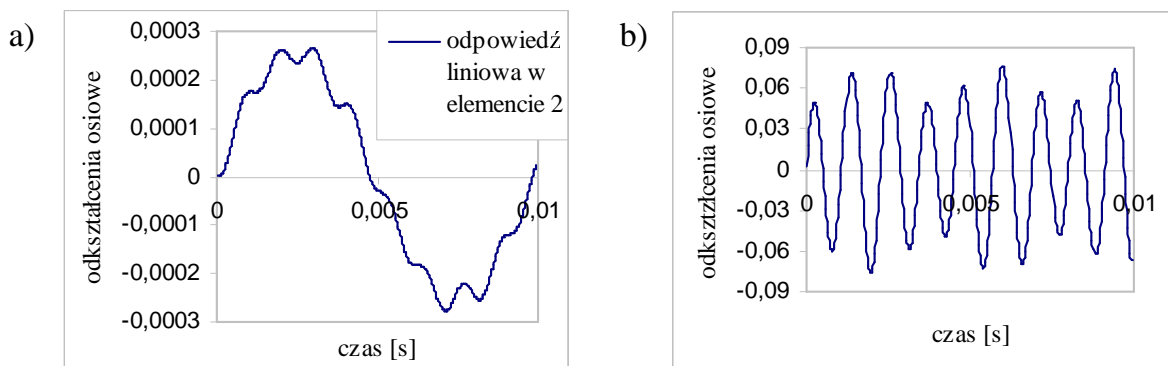
## 2.4. Test modelowania zmiany parametrów sztywnościowych konstrukcji kratowej obciążonej dynamicznie

W celu dokładniejszego prześledzenia algorytmu modelowania odpowiedzi dynamicznej konstrukcji za pomocą dystorsji wirtualnych, rozważmy jeszcze raz przykład opisany w punkcie 2.2, tym razem obciążymy badaną konstrukcję dynamicznie, przy czym funkcja wymuszająca będzie miała następującą postać:

$$P(t) = \begin{cases} \sin(\omega t) & \text{dla } t \in [0, T], \\ 0 & \text{dla } t > T. \end{cases} \quad (2.26)$$

Zgodnie z postępowaniem omówionym w punkcie 2.3 obliczenie pełnej odkształceniowej macierzy wpływu sprowadza się do obliczenia odpowiedzi każdego elementu konstrukcji na wymuszenie impulsowymi dystorsjami jednostkowymi (wprowadzonymi kolejno w elementach 1, 2, 3, 4, 5). Wprowadzenie impulsowej dystorsji jednostkowej w elemencie konstrukcji jest równoważne obciążeniu węzłów ograniczających ten element siłą  $P = EA$  działającą w bardzo krótkim czasie. Może to zostać zrealizowane poprzez wprowadzenie odpowiedniego warunku na prędkość początkową i wykorzystanie do obliczenia odpowiedzi którejkolwiek z procedur całkowania równań ruchu (w omawianym przykładzie wykorzystano metodę Newmarka). Elementy uzyskanej w ten sposób impulsowej macierzy wpływu, odpowiadające wprowadzeniu dystorsji w elemencie 4-tym (sztywność tego elementu chcemy modyfikować) oraz odpowiedź liniową  $\varepsilon_i^L(t)$  przedstawia rys. 2.4.

Odpowiedź konstrukcji zmodyfikowanej ( $\mu_4 = 0.5$ ) uzyskujemy poprzez sekwencyjne rozwiązanie (dla każdej chwili czasowej) równań (2.25). Porównanie wyniku uzyskanego



RYS. 2.4. Odpowiedź liniowa konstrukcji na wymuszenie  $P(t)$ : (a) odpowiedź w elemencie 2, (b) elementy impulsowej macierzy wpływu – odkształcenia wygenerowane w elemencie 2 wskutek wprowadzenia dystorsji w elemencie 4.

przy pomocy algorytmu bazującego na MIDW zaimplementowanego w środowisku MATLAB z wynikami uzyskanymi przy pomocy MES przedstawia rys. 2.5.



Rys. 2.5. Porównanie wyników MIDW/MES.

---

## Zastosowanie MDW i IMDW w zadaniu modelowania delaminacji

---

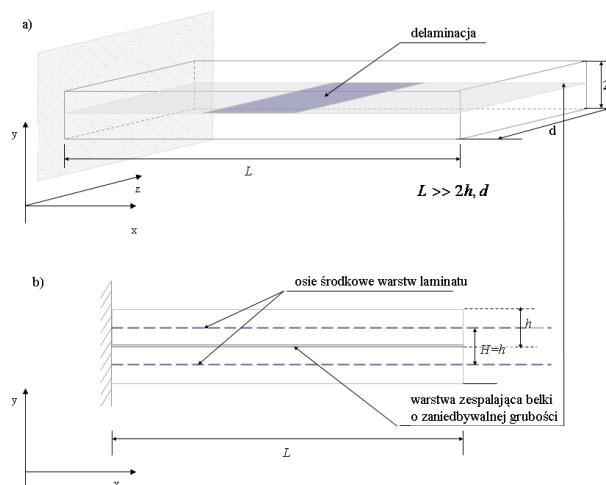
W rozdziale 2 wykazano iż MDW oraz IMDW umożliwiają modelowanie modyfikacji sztywności w elementach konstrukcji kratowej. W przedstawionych w bieżącym rozdziale rozważaniach wykazemy że wykorzystanie podejścia dystorsyjnego do modelowania całkowitego osłabienia sztywności w wybranych elementach konstrukcji przedstawionej w 3.1, umożliwia efektywne modelowanie zachowania konstrukcji zdelaminowanej.

### 3.1. Uzasadnienie przyjętego modelu belki dwuwarstwowej

W grupie szeroko wykorzystywanych w przemyśle materiałów kompozytowych ważne miejsce zajmują laminaty. Są to materiały zbudowane z elementów warstwowych traktowanych jako jednorodne ciała ortotropowe. Zakłada się że poszczególne warstwy pracują pozostając w płaskim stanie naprężenia i płaskim stanie odkształcenia, natomiast przestrzenne przemieszczenia laminatu wynikają z różnic stanów płaskich wzdłuż jego grubości. Często wykorzystywaną w przemyśle grupę laminatów stanowią tzw. laminaty cienkie. Są to laminaty złożone z cienkich warstw o zbliżonych właściwościach. Połączenia międzywarstwowe są na tyle silne, że można uznać, iż laminat wielowarstwowy pracuje tak jak jedna warstwa. W konsekwencji mamy do czynienia z ciągłością odkształceń przy przejściu z warstwy do warstwy i nieciągłością naprężeń wskutek skokowej zmiany sztywności. Laminat cienkościenny, pod względem opisu odkształceń zachowuje się jak płyta lub powłoka izotropowa, w związku z czym teoria laminatów cienkościennych opiera się na podobnych założeniach jak teoria

plyt i powłok cienkich [68]. Zakłada się że:

- grubość laminatu jest znacznie mniejsza od jego wymiarów w płaszczyźnie,
- rozpatrywane są małe ugięcia,
- warstwy nie przemieszczają się względem siebie, tzn. punkty, które stykały się przed odkształceniem stykają się również po odkształceniu,
- naprężenia normalne w kierunku grubości laminatu są pomijalnie małe,
- prosta normalna do powierzchni geometrycznie średniej laminatu pozostaje do niej normalna po jej odkształceniu.

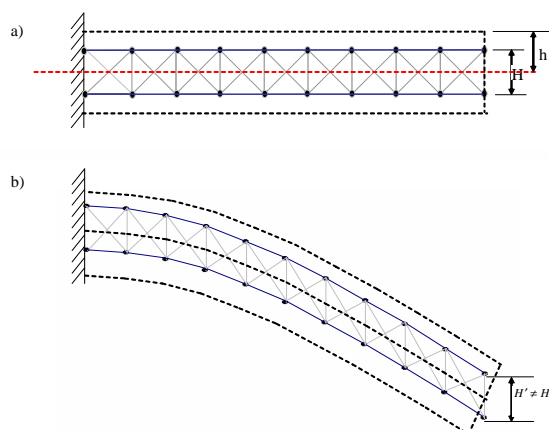


RYS. 3.1. Dwuwarstwowa belka laminowana. Geometria belki z delaminacją (a); przekrój w płaszczyźnie  $xy$  (b).

Wprowadzenie ostatniego z wymienionych założeń umożliwia sprowadzenie trójwymiarowego pola przemieszczeń laminatu do dwuwymiarowego pola przemieszczeń jego powierzchni średniej. Związki pomiędzy składowymi płaskiego stanu odkształcenia w dowolnym punkcie laminatu a przemieszczeniami i w tym punkcie można wyprowadzić na podstawie analizy przemieszczeń i odkształceń prostokątnego elementu płaskiego [68]. Zarówno przemieszczenia dowolnego punktu jak i odkształcenia można wyrazić poprzez przemieszczenia i odkształcenia powierzchni średniej laminatu. W niniejszej pracy ograniczono się do analizy dwuwarstwowej belki laminowanej (3.1). Przyjęto założenia teorii laminatów cienkich, oraz uproszczono zadanie do zagadnienia dwuwymiarowego.

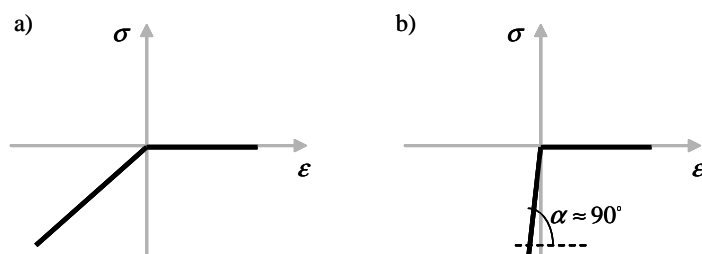
Zastosowanie podejścia dystorsyjnego do modelowania odpowiedzi konstrukcji zdelaminowanej (omówione w punkcie 3.2) uzasadnia wprowadzenie modelu MES przedstawionego na rys.3.2. Do budowy tego modelu wykorzystano dwa typy elementów skończonych. Warstwy laminatu zbudowane zostały z dwuwęzłowych elementów belkowych spełniających założenia Bernoulliego<sup>1)</sup> (linie oznaczone na rys. 3.2 reprezentują osie środkowe tych

<sup>1)</sup> Założenie Bernoulliego mówi, że przekroje poprzeczne belki pozostają po deformacji nie tylko płaskie ale również prostopadłe do osi odkształconego pręta. Przyjęcie tego założenia jest uzasadnione w przypadku cienkich konstrukcji belkowych.



Rys. 3.2. Model MES konstrukcji dwuwarstwowej przyjęty do obliczeń (a); konstrukcja w konfiguracji odkształconej (b). Czarna przerywana linia przedstawia rozwiązanie uzyskane dla modelu reprezentowanego przez pojedynczą warstwę belkową o odpowiednio dobranej sztywności.

warstw). Wprowadzone dodatkowo do modelu elementy kratowe (na rys. 3.2 oznaczone kolorem szarym) modelują połączenia międzywarstwowe w konstrukcji nieuszkodzonej oraz nieuszkodzonych fragmentach belki częściowo zdelaminowanej. W obszarze delaminacji (**rozumianej jako istniejące uszkodzenie a nie proces jego powstawania**) będą modelować oddziaływania kontaktowe, stąd też w dalszej części pracy nazywane będą warstwą kontaktową. Rozwiązanie równań ruchu otrzymane na bazie takiego modelu stanowi przybliżenie rozwiązania otrzymanego na bazie modelu belki jednowarstwowej o odpowiednio dobranej sztywności zastępczej. Wyniki obliczeń zaprezentowane w dalszej części pracy uzyskane zostały na bazie modelu w którym z góry założono określoną, arbitralnie przyjętą sztywność elementów warstwy kontaktowej (rys.3.3a), dopuszczając tym samym pewną penetrację powierzchni sublaminatów, oraz umożliwiając takie dobranie sztywności warstwy kontaktowej aby odpowiedź numeryczna była zbliżona do eksperymentalnej.

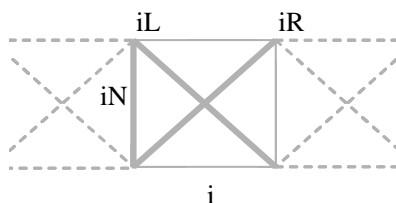


Rys. 3.3. Zależność odkształcenie-naprężenie przyjęta w zadaniu(a); zależność odkształcenie-naprężenie optymalna ze względu na ograniczenie dopuszczalnej penetracji(b).

### 3.2. Wykorzystanie podejścia dystorsyjnego do modelowania odpowiedzi konstrukcji zdelaminowanej obciążonej statycznie

Modele delaminacji nie uwzględniają zazwyczaj problemu kontaktowego związanego z więzami jednostronnymi występującymi na styku dwóch odspojonych warstw wiotkiego laminatu. Uwzględnienie oddziaływań kontaktowych w obszarach, w których odspojone warstwy są dociskane do siebie komplikuje zasadniczo algorytm analizy odpowiedzi układu i znacznie zwiększa jego koszty numeryczne. Z drugiej strony, pozwala to na bardziej realistyczne zamodelowanie zjawiska uwzględniające efekt przechodzenia obszaru delaminacji ze stanu „zamkniętej” do stanu „otwartej” szczeliny oraz tarcia pomiędzy warstwami, zależnego od siły docisku w chwilach zetknięcia.

Celem tego rozdziału jest zaprezentowanie **możliwie najprostszego modelu opisującego zjawisko delaminacji i uwzględniającego problem kontaktowy**, pozwalającego na efektywne rozwiązanie kosztownego numerycznie zagadnienia odwrotnego identyfikacji defektów (lokalizacja oraz zasięg stref zdelaminowanych) na podstawie lokalnych pomiarów deformacji ustroju (piezo-sensory). Możliwość taką daje metoda MDW zastosowana do hipotetycznej warstwy kontaktowej zamodelowanej przez skratowanie pokazane na rys. 3.4.



RYS. 3.4. Pojedyncza „sekcja” warstwy kontaktowej.

Wprowadzenie w elementach  $R$  i  $L$  wybranych sekcji „ $i$ ” warstwy kontaktowej dystorsji równych:

$$\hat{\varepsilon}_{iR} = (1 - \mu_i) \varepsilon_{iR}, \quad (3.1)$$

$$\hat{\varepsilon}_{iL} = (1 - \mu_i) \varepsilon_{iL}, \quad (3.2)$$

dla ( $\mu_i = 0$ ) odpowiada redukcji ich sztywności do zera, a tym samym symuluje lokalną delaminację, co wynika ze znikania sił w elementach w których  $\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i$ , a zatem ze znikania oddziaływań stycznych przenoszonych przez warstwę kontaktową.

Powyższy warunek znikania oddziaływań w elementach pionowych  $\varepsilon_{iN}$ , symulowany dystorsjami:

$$\hat{\varepsilon}_{iN} = (1 - \mu_i) \varepsilon_{iN}, \quad (3.3)$$

$$\mu_i = 0, \quad (3.4)$$

modeluje rozwarstwienie z pojawieniem się szczeliny tam gdzie  $\varepsilon_{iN} > 0$ . W sekcjach, w których elementy normalne są ściskane ( $\varepsilon_{iN} \leq 0$ ) należy przyjąć dystorsje zerowe  $\hat{\varepsilon}_{iN} = 0$ , co od-

powiada pełnemu przenoszeniu sił docisku pomiędzy warstwami przez powierzchnię kontaktową (pomimo lokalnej delaminacji).

Zjawisko pęknięcia powodujące powstanie delaminacji nie jest przedmiotem rozważań. Odspojenie warstw laminatu traktowane jest w niniejszej rozprawie na dwa sposoby: jako defekt wywołany wcześniej w ustroju i poddany procedurze identyfikacji lub jako określone, pożądane rozwarstwienie, wymuszone w drgającej konstrukcji. W obu tych przypadkach operujemy końcowym, ustalonym stanem delaminacji i proces pęknięcia do niego doprowadzający nie jest dla nas istotny.

Dalsze rozważania wykażą, że symulacja opisanymi wyżej polami dystorsji w warstwie kontaktowej pozwoli na efektywną numerycznie, szybką reanalizę odpowiedzi (statycznej lub dynamicznej) ustroju po dokonaniu modyfikacji stanu rozwarstwienia laminatu. Ponadto, wykorzystanie metodologii MDW pozwala na wyznaczenie gradientów stanu odpowiedzi bez konieczności modyfikacji globalnych macierzy sztywności ustroju. W konsekwencji, prowadzi to do efektywnie działających algorytmów optymalizacji stosowanych w rozwiązywaniu zagadnienia odwrotnego identyfikacji defektów.

Reasumując, algorytm modelowania delaminacji w konstrukcji obciążonej statycznie składał się będzie z dwu etapów. W etapie pierwszym wyznaczane będą dystorsje modelujące osłabienie sztywności w elemencie prawym  $R$  i lewym  $L$  każdej sekcji należącej do obszaru pęknięcia.

Zgodnie z równaniem (2.3) modyfikację odpowiedzi dowolnego elementu omawianej konstrukcji dwuwarstwowej wywołaną wprowadzeniem dystorsji w elementach ukośnych  $R$  i  $L$  określonej sekcji opisuje następujące wyrażenie:

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha^L + \left[ \sum_j D_{\alpha_j}^R \hat{\varepsilon}_{jR} + \sum_j D_{\alpha_j}^L \hat{\varepsilon}_{jL} \right], \quad (3.5)$$

gdzie  $i$  indeksuje kolejne sekcje strefy kontaktowej, zaś  $\alpha$  – kolejne elementy całej konstrukcji.

Podstawiając do zależności (3.1), (3.2) równanie (3.5) otrzymujemy układ równań na podstawie których możemy wyznaczyć wartości dystorsji wirtualnych  $\hat{\varepsilon}_{iR}$ ,  $\hat{\varepsilon}_{iL}$  modelujących stan uszkodzenia opisany przez określony wektor współczynników modyfikacji sztywności  $\mu_i$ :

$$\begin{cases} \sum_j \left[ \delta_{ij} - (1 - \mu_i) D_{iRj}^R \right] \hat{\varepsilon}_{jR} - (1 - \mu_i) \sum_j D_{iRj}^L \hat{\varepsilon}_{jL} = (1 - \mu_i) \varepsilon_{iR}^L, \\ - (1 - \mu_i) \sum_j D_{iLj}^R \hat{\varepsilon}_{jR} + \sum_j \left[ \delta_{ij} - (1 - \mu_i) D_{iLj}^L \right] \hat{\varepsilon}_{jL} = (1 - \mu_i) \varepsilon_{iL}^L. \end{cases} \quad (3.6)$$

Macierze  $D_{ik}^k$ , gdzie  $k = R, L$  są to macierze wpływu, przy czym macierz opisana przez indeks górny  $R$  opisuje wpływ wprowadzenia dystorsji jednostkowych w kolejnych elementach prawych warstwy kontaktowej, natomiast macierz oznaczona indeksem górnym  $L$  zawiera odkształcenia wywołane w elementach konstrukcji wprowadzeniem dystorsji jednostkowych w elementach lewych warstwy kontaktowej. Wprowadzenie dodatkowego indeksu dolnego  $k = R, L$  (przy indeksie  $i$  numerującym kolejne sekcje warstwy kontaktowej) ma na

celu oznaczenie wierszy macierzy wpływu w których przechowywane są odkształcenia kolejnych elementów  $R$  i  $L$  wywołane wprowadzeniem dystorsji  $\hat{\varepsilon}_{iR}$ ,  $\hat{\varepsilon}_{iL}$ . Wzór (3.6) jest analogiczny do równania (2.8), stanowiącego ogólne sformułowanie MDW, podział na dwie mniejsze macierze wpływu (można zastosować jedną macierz  $D_{ij}$  będącą złożeniem macierzy  $D_{ik}^R$  i  $D_{ik}^L$  i odpowiednio wypełniony wektor modyfikacji sztywności) został wprowadzony w celu uproszczenia programu numerycznego stworzonego w oparciu o omawiany algorytm.

Układ równań (3.6) wygodnie jest zapisać w postaci systemu równań macierzowych typu  $Ax = b$  (w takiej formie został on przedstawiony w tab. 3.1 prezentującej algorytm modelowania delaminacji).

Następnym krokiem będzie obliczenie odkształceń w elementach pionowych należących do obszaru o zmodyfikowanej sztywności, zgodnie z równaniem:

$$\varepsilon_{iN} = \varepsilon_{iN}^L + \sum_{k=R,L} \sum_j D_{ij}^k \hat{\varepsilon}_{jk}. \quad (3.7)$$

W przypadku kiedy  $\varepsilon_{iN} < 0$  możemy uznać że  $\hat{\varepsilon}_{iN} = 0$  (wyznaczone w efekcie rozwiązania równań (3.6) dystorsje wirtualne prawidłowo modelują zachowanie konstrukcji zdelaminowanej obciążonej statycznie) i przejść do obliczania odkształceń w dowolnie wybranych elementach konstrukcji.

Jeśli  $\varepsilon_{iN} > 0$  uznajemy że rozwiązanie jest błędne, nie uwzględnia bowiem znikania oddziaływań normalnych w obszarze pęknięcia. Uwzględnienie wspomnianego faktu wymaga naniesienia poprawki w postaci zastąpienia układu (3.6) układem spełniającym zarówno równania (3.1),(3.2) jak i (3.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_j \left( \delta_{ij} - (1 - \mu_i) D_{ij}^R \right) \hat{\varepsilon}_{jR} - (1 - \mu_i) \sum_j D_{ij}^L \hat{\varepsilon}_{jL} - (1 - \mu_{iN}) \sum_j D_{ij}^N \hat{\varepsilon}_{jN} = (1 - \mu_i) \varepsilon_{iR}^L, \\ (1 - \mu_i) \sum_j D_{ij}^R \hat{\varepsilon}_{jR} + \sum_j \left( \delta_{ij} - (1 - \mu_i) D_{ij}^L \right) \hat{\varepsilon}_{jL} - (1 - \mu_{iN}) \sum_j D_{ij}^N \hat{\varepsilon}_{jN} = (1 - \mu_i) \varepsilon_{iL}^L, \\ (1 - \mu_i) \sum_j D_{ij}^R \hat{\varepsilon}_{jR} - (1 - \mu_i) \sum_j D_{ij}^L \hat{\varepsilon}_{jL} + \sum_j \left( \delta_{ij} - (1 - \mu_{iN}) D_{ij}^N \right) \hat{\varepsilon}_{jN} = (1 - \mu_{iN}) \varepsilon_{iN}^L. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

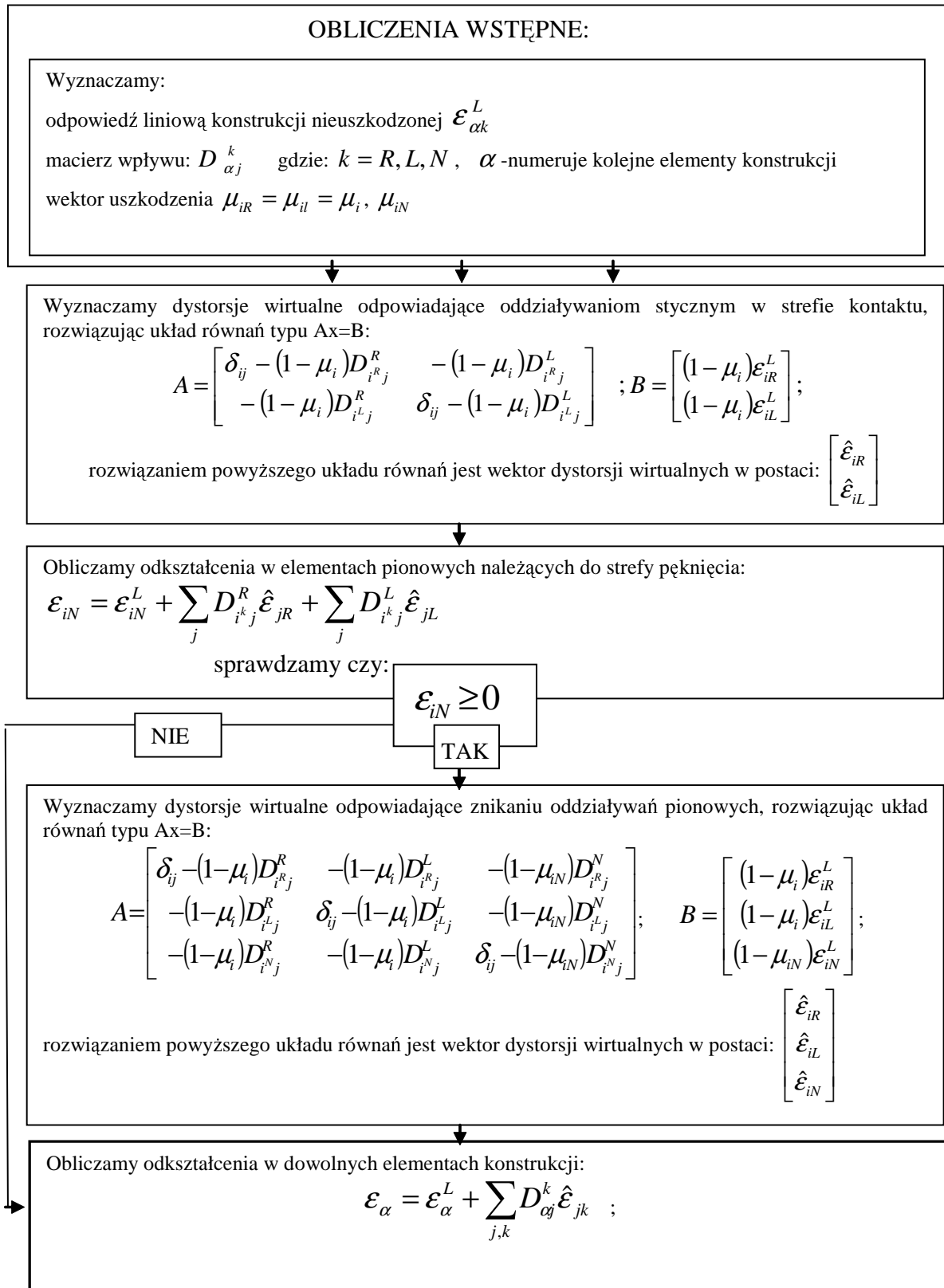
Występująca w powyższych równaniach macierz  $D_{ij}^N$  przechowuje informacje o wpływie na układ dystorsji wprowadzonych w elementach pionowych warstwy kontaktowej. Rozwiązanie powyższego układu równań stanowi drugi etap algorytmu modelowania odpowiedzi konstrukcji zdelaminowanej obciążonej statycznie.

### 3.3. Test modelowania delaminacji w statyce

Poniżej przedstawione zostaną dwa przykłady modelowania delaminacji w konstrukcji dwuwarstwowej obciążonej statycznie (przykład I: rys. 3.5, przykład II: rys.3.8). W obydwu przypadkach rozpatrywać będziemy tę samą konstrukcję kratową (właściwości materiałowe i geometryczne omawianego modelu opisane są w tab. 3.2), w ten sam sposób uszkodzoną



TABLICA 3.1. Algorytm modelowania odpowiedzi konstrukcji zdelaminowanej obciążonej statycznie.



TABLICA 3.2.

	belki	warstwa kontaktowa
moduł Younga [N/m <sup>2</sup> ]	70e9	30e9
gęstość [kg/m <sup>3</sup> ]	3.3e3	1
pole przekroju poprzecznego [m <sup>2</sup> ]	5e-5	5e-5
moment bezwładności przekroju elementu belkowego $J$ [m <sup>4</sup> ]	4.17e-10	-

(pęknięcie zajmujące obszar ok. 1/3 długości wspornika), różny będzie jednak sposób obciążenia (rys. 3.5 i 3.8).

W przykładzie pierwszym swobodny koniec belki został obciążony siłą prostopadłą do jej osi obojętnej. Przy tym sposobie obciążenia odkształcenia elementów pionowych w warstwie kontaktowej, która pokrywa się z osią obojętną wspornika są bardzo małe (rzędu  $10^{-15}$ ). Uzasadnia to przyjęcie założenia że szczelina pozostaje zamknięta przez cały czas analizy, nie ma więc potrzeby modelowania modyfikacji sztywności w elementach pionowych należących do obszaru delaminacji.

Dodatkowe uzasadnienie przyjętego założenia stanowi fakt iż zadanie modelowania dystorsjami odkształceń w elementach pionowych jest w omawianym przypadku źle uwarunkowane numerycznie. Zgodnie z przyjętym algorytmem modelowania delaminacji uwzględnienie wpływu jaki niesie ze sobą wprowadzenie modyfikacji sztywności w elementach oznaczonych indeksami  $R$  i  $L$  należących do obszaru pęknięcia wymaga przyjęcia wyrażenia opisującego odkształcenia w elementach pionowych w następującej formie:

$$\varepsilon_i N = \varepsilon_i N^L + \sum_j D_{iNj}^R \hat{\varepsilon}_{jR} + \sum_j D_{iNj}^L \hat{\varepsilon}_{jL}. \quad (3.9)$$

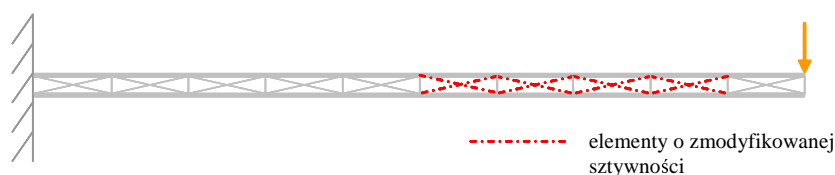
W omawianym przypadku wartości bezwzględne odkształceń osiowych w elementach ukośnych warstwy kontaktowej (rys. 3.6) są dla elementów należących do tej samej sekcji bardzo bliskie, zaś ich znaki przeciwne. Możemy zatem zapisać:

$$\varepsilon_{iR} \approx -\varepsilon_{iL}. \quad (3.10)$$

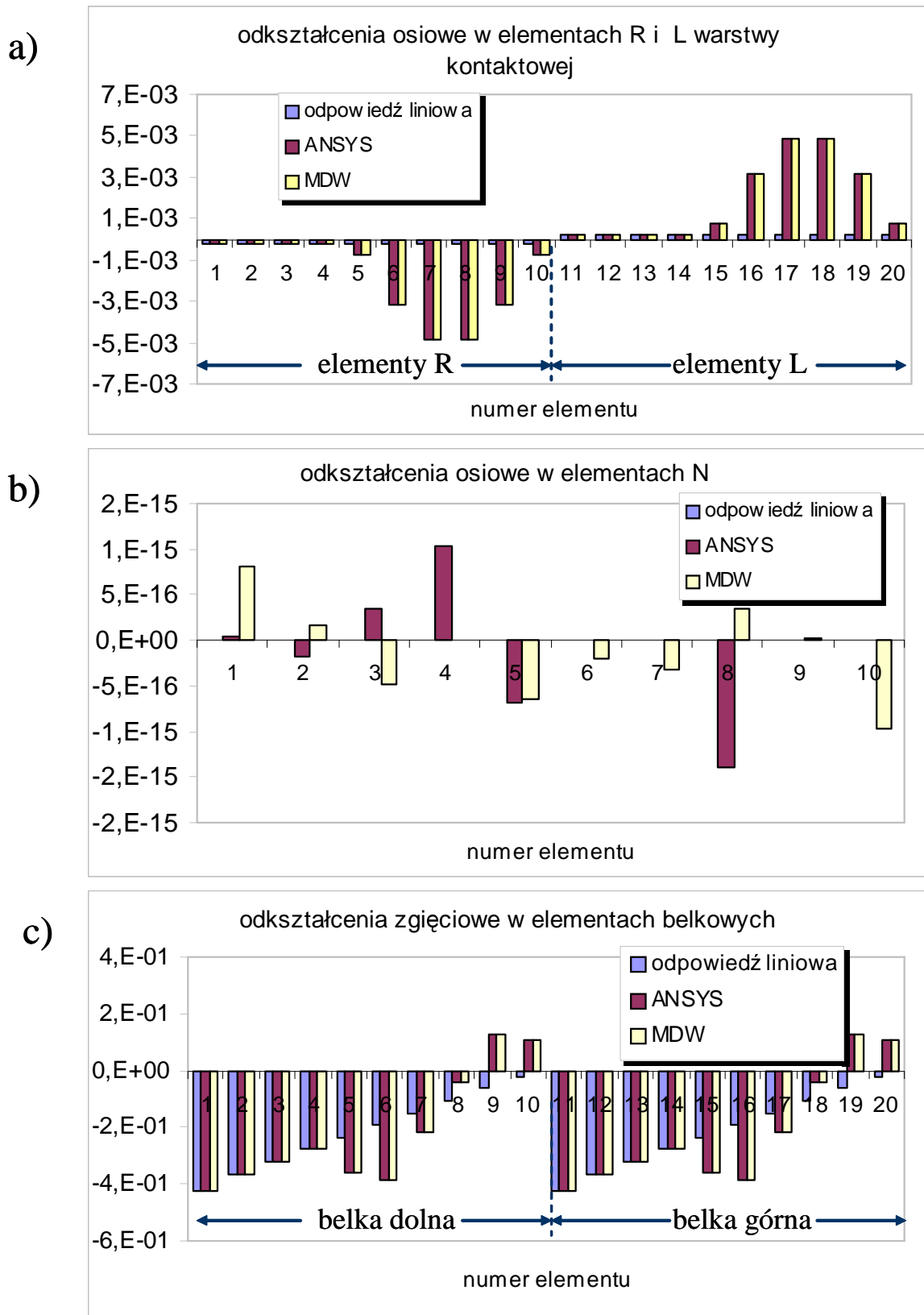
Zgodnie z (3.1) i (3.2) również dystorsje  $\varepsilon_i^R, \varepsilon_i^L$  będą antysymetryczne:

$$\hat{\varepsilon}_{iR} \approx -\hat{\varepsilon}_{iL}. \quad (3.11)$$

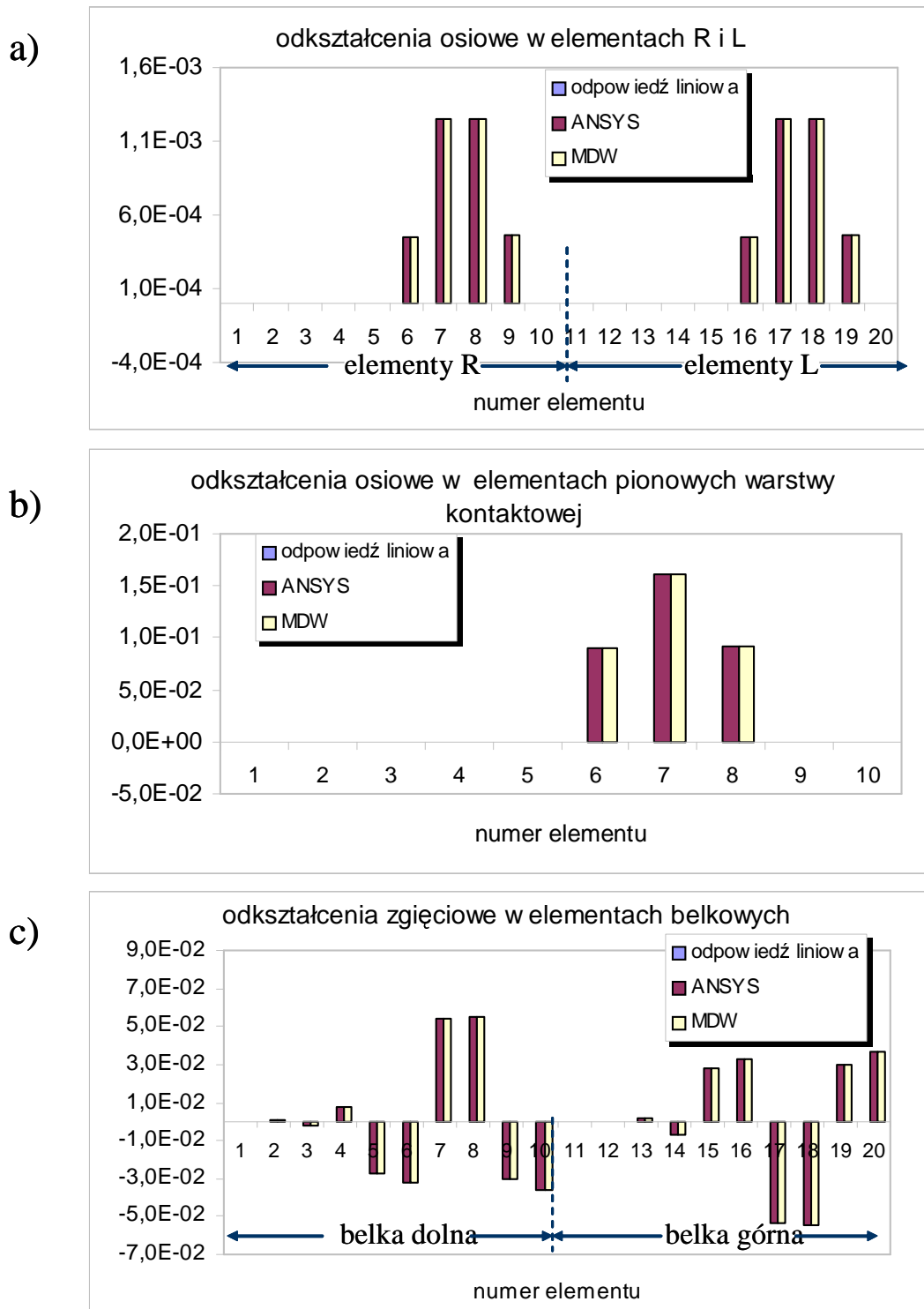
Z uwagi na symetrię przyjętego modelu elementy macierzy  $D_{iNj}^R, D_{iNj}^L$  opisujące wpływ wprowadzenia dystorsji odpowiednio w elementach  $R$  i  $L$  dla  $i$  numerującego elementy pio-



Rys. 3.5. Model konstrukcji z rozległą delaminacją.



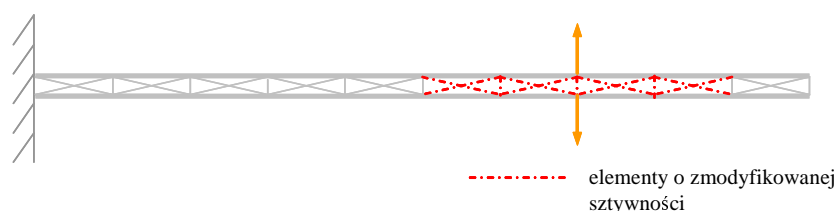
Rys. 3.6. Porównanie wyników uzyskanych na bazie MDW z wynikami obliczeń numerycznych MES: (a) odkształcenia osiowe elementów konstrukcji, (b) odkształcenia osiowe w elementach pionowych warstwy kontaktowej, (c) odkształcenia zgięciowe w elementach belkowych.



RYS. 3.7. Porównanie wyników uzyskanych na bazie MDW z wynikami obliczeń numerycznych MES: (a) odkształcenia osiowe elementów konstrukcji, (b) odkształcenia osiowe w elementach pionowych warstwy kontaktowej, (c) odkształcenia zgięciowe w elementach belkowych.

nowe są sobie równe, w związku z czym części rezydualne opisujące deformację wywołaną w określonym elemencie pionowym (należącym do warstwy kontaktowej) wskutek wprowadzenia modyfikacji sztywności w elementach  $R$  i  $L$  danej sekcji są sobie bliskie, ale mają przeciwne znaki. Zatem w równaniu (3.9) występuje odejmowanie dwu bardzo bliskich sobie liczb. Rozwiązanie takiego zadania może być obarczone dużym błędem. W analizowanym przypadku odkształcenia obliczone MDW nie są zgodne z odkształceniami obliczonymi MES dla elementów pionowych (rys. 3.6b).

W przykładzie II analizie poddano również konstrukcję rozwarstwioną na odcinku obejmującym 4 sekcje, tym razem obciążono ją jednak w taki sposób aby pod wpływem przyłożonej siły nastąpiło rozdzielenie się sublaminatów (rys. 3.8).



RYS. 3.8. Model konstrukcji z rozległą delaminacją poddanej działaniu sił powodujących rozdzielenie się warstw.

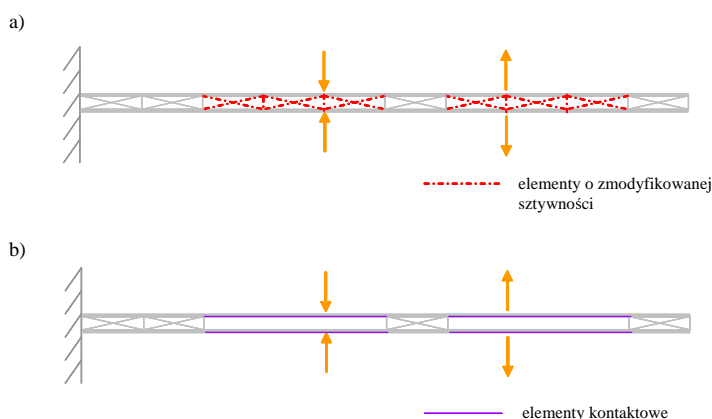
Odształcenia elementów ukośnych należących do obszaru pęknięcia, a co za tym idzie również modelujące wprowadzenie modyfikacji sztywności dystorsje wirtualne są w tym przypadku symetryczne. Odpowiedzi odkształceniowe elementów pionowych obliczone MDW (uwzględniające osłabienie sztywności elementów  $R$  i  $L$  należących do obszaru delaminacji) pokrywają się z wynikami obliczeń MES. Zaniedbanie zanikania oddziaływań normalnych w omawianym przypadku jest nieuzasadnione. Na rys. 3.7 przedstawiono wyniki obliczeń uzyskane przy zastosowaniu algorytmu uwzględniającego poprawkę wynikającą z konieczności modyfikacji sztywności w przypadku wystąpienia w nich oddziaływań rozciągających.

Sprawdzono, że uzyskane rezultaty, będące wynikiem wirtualnych modyfikacji dokonanych za pomocą dystorsji są takie same (z dokładnością do błędów numerycznych rzędu  $10^{-9}$ ) jak wyniki otrzymane dla faktycznych modyfikacji, tzn. zmienionych macierzy sztywności konstrukcji (z wyjątkiem elementów pionowych w przykładzie I).

### 3.4. Weryfikacja podejścia dystorsyjnego za pomocą elementów kontaktowych

Przedstawiony w tab. 3.1 algorytm modelowania delaminacji zweryfikowano także z modelem opartym na wykorzystaniu tzw. elementów kontaktowych. W modelu konstrukcji zde laminowanej wprowadzone zostały dwa dość rozległe uszkodzenia. Konstrukcja została obciążona siłami skupionymi w 4 węzłach wspornika (rys. 3.9), przy czym obciążenie zostało tak dobrane, aby istniała możliwość jednoczesnego porównania efektu zastosowania podej-

ścia dystorsyjnego z efektem jaki do odpowiedzi konstrukcji wnosi wprowadzenie elementu kontaktowego zarówno w przypadku otwartej jak i zamkniętej szczeliny.



RYS. 3.9. Modele wykorzystane do weryfikacji algorytmu modelowania delaminacji za pomocą elementów kontaktowych: (a) model wykorzystany do obliczeń MDW, (b) model wykorzystujący elementy kontaktowe.

Do budowy modelu numerycznego w programie ANSYS wykorzystano element kontaktowy CONTA171 oraz dopełniający go element TARGE169. Są to elementy dwuwymiarowe, dwuwęzłowe umożliwiające zarazem modelowanie kontaktu jak i poślizgu powierzchni.

Wykorzystanie wymienionych elementów umożliwia wprowadzenie do programu ANSYS danych dotyczących kontaktowej sztywności normalnej (ang. *normal contact stiffness factor* – FKN) oraz sztywności poślizgowej (ang. *sliding contact stiffness factor* – FKT). W omawianym przykładzie przyjęto  $FKN = 0.1$  oraz  $FKT = 1$ . Porównanie odkształceń modelowanych dystorsjami i odkształceń obliczonych za pomocą programu ANSYS przedstawia rys.(3.10).

### 3.5. Wykorzystanie podejścia dystorsyjnego do modelowania odpowiedzi konstrukcji zdelaminowanej obciążonej dynamicznie

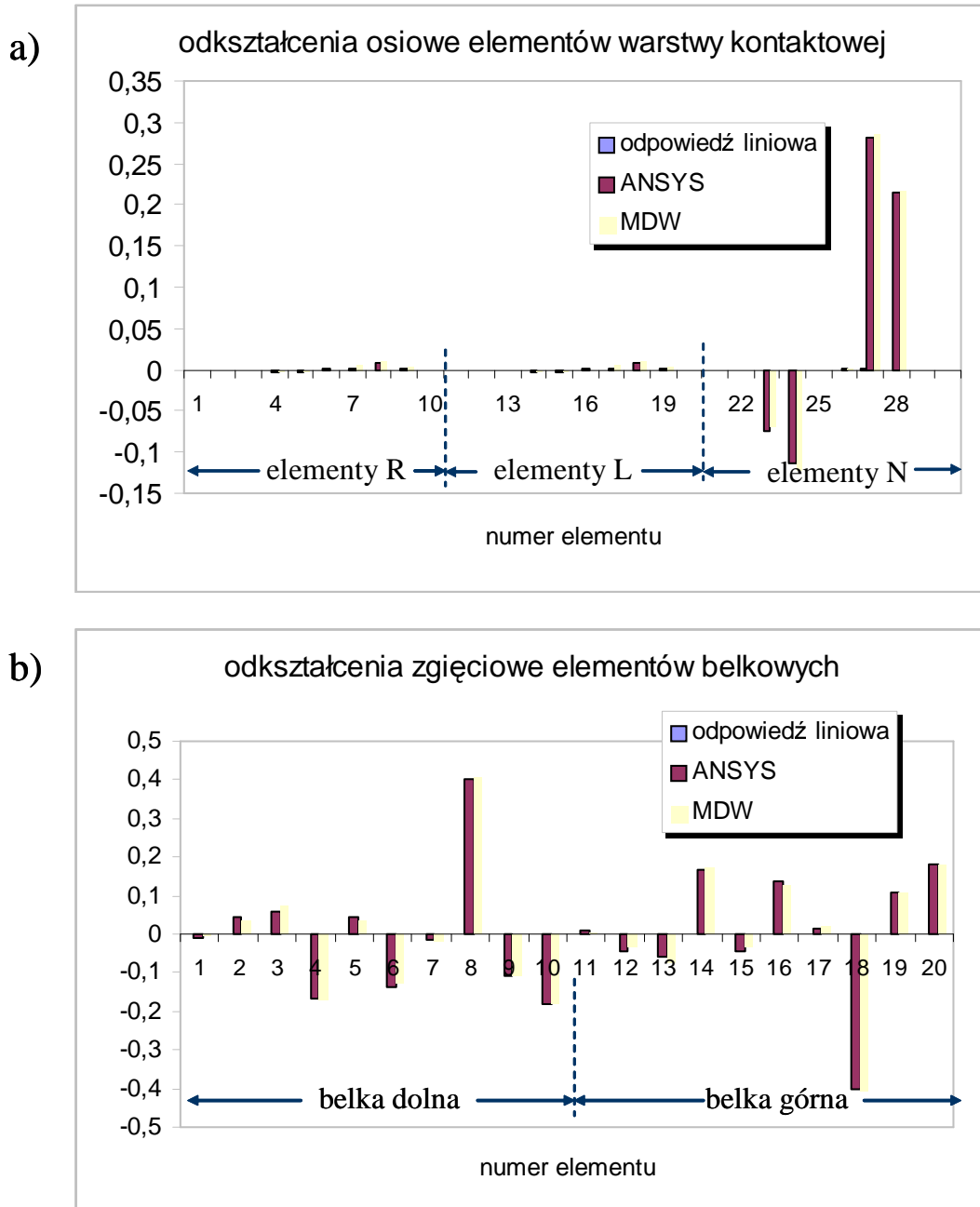
Modelowanie zachowania konstrukcji dwuwarstwowej zdelaminowanej, obciążonej dynamicznie opiera się na przyjęciu dokładnie takich samych założeń jak omawiane w punkcie 3.2, teraz jednak z uwzględnieniem dodatkowej zależności od czasu. Tak więc równania (3.1) i (3.2) sformułowane na użytek zagadnień dynamiki będą miały postać:

$$\hat{\varepsilon}_{iR}(t) = (1 - \mu_i) \varepsilon_{iR}(t), \quad (3.12)$$

$$\hat{\varepsilon}_{iL}(t) = (1 - \mu_i) \varepsilon_{iL}(t), \quad (3.13)$$

gdzie  $\mu_i$  jest stałe w funkcji czasu i dąży do zera.

Przyjęcie zerowej wartości współczynnika modyfikacji sztywności dla elementów  $R$  i  $L$  obszaru uszkodzenia opisuje przypadki z pomijalnie małym tarcie. Model uwzględniający działanie siły tarcia może być zrealizowany poprzez przyjęcie niezerowej, zależnej od czasu wartości odpowiednich składowych wektora modyfikacji sztywności.



RYS. 3.10. Porównanie wyników obliczeń MDW i wyników obliczeń wykorzystujących elementy kontaktowe: (a) odkształcenia osiowe elementów konstrukcji, (b) odkształcenia zgięciowe elementów belkowych.

Warunki sformułowane w postaci równań (3.20), (3.21) wynikają ze znikania oddziaływań stycznych w obszarze zdelaminowanym, przyjęty w statyce w postaci równania (3.3) warunek umożliwiający poprawne modelowanie oddziaływań normalnych, dla zagadnienia dynamicznego przyjmuje następującą postać:

$$\hat{\varepsilon}_{iN}(t) = (1 - \mu_{iN}(t))\varepsilon_{iN}(t). \quad (3.14)$$

Zauważmy, że tym razem wartości odpowiednich współczynników modyfikacji sztywności w elementach pionowych zależą od czasu, przy czym przyjmujemy że mogą one przyjmować wartość 1 (odpowiada to niezerowym oddziaływaniom normalnym w strefie kontaktu, jest to sytuacja tzw. „*closed gap*” w literaturze anglojęzycznej) lub wartości 0 (co z kolei opisuje zanikanie oddziaływań normalnych w przypadku pojawienia się odkształceń rozciągających w elementach pionowych i jest określane w literaturze jako „*open gap*”).

Przyjęcie warunków określonych równaniami (3.20), (3.21) oraz równaniem (3.22) obrazującym konieczność naniesienia poprawki wynikającej ze zmiennego charakteru oddziaływań normalnych, sprowadza się do dwuetapowego obliczania wartości dystorsji wirtualnych dla każdego kroku czasowego (przy czym etap drugi może być pominięty w przypadku wystąpienia w strefie pęknięcia oddziaływań ściskających).

Wskutek przyjęcia zgodnego z podejściem MIDW opisu pól odkształceń w konstrukcji zdelaminowanej:

$$\varepsilon_i(t) = \varepsilon_i^L(t) + \sum_k \sum_{\tau=0}^t \sum_j D_{ikj}^k(t-\tau)\hat{\varepsilon}_{jk}(\tau), \quad (3.15)$$

modyfikacji (wynikającej z dodatkowego sumowania po czasie) muszą ulec równania umożliwiające wyznaczenie wartości dystorsji wirtualnych. Tak więc, dla każdego kroku czasowego rozwiązywać będziemy najpierw układ równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_j \left( \delta_{ij} - (1 - \mu_i) D_{iRj}^R(0) \right) \hat{\varepsilon}_{jR}(t) - (1 - \mu_i) \sum_j D_{iRj}^L(0) \hat{\varepsilon}_{jL}(t) \\ = (1 - \mu_i) \varepsilon_{iR}^L(t) + (1 - \mu_i) \sum_{k=R,L} \sum_{\tau=0}^t \sum_j D_{iRj}^k(t-\tau) \hat{\varepsilon}_{jk}(\tau) + (1 - \mu_{iN}) \sum_{\tau=0}^t \sum_j D_{iRj}^N(t-\tau) \hat{\varepsilon}_{jN}(\tau), \\ \\ \sum_j \left( \delta_{ij} - (1 - \mu_i) D_{iLj}^L(0) \right) \hat{\varepsilon}_{jL}(t) - (1 - \mu_i) \sum_j D_{iLj}^R(0) \hat{\varepsilon}_{jR}(t) \\ = (1 - \mu_i) \varepsilon_{iL}^L(t) + (1 - \mu_i) \sum_{k=R,L} \sum_{\tau=0}^t \sum_j D_{iLj}^k(t-\tau) \hat{\varepsilon}_{jk}(\tau) + (1 - \mu_{iN}) \sum_{\tau=0}^t \sum_j D_{iLj}^N(t-\tau) \hat{\varepsilon}_{jN}(\tau), \end{array} \right. \quad (3.16)$$

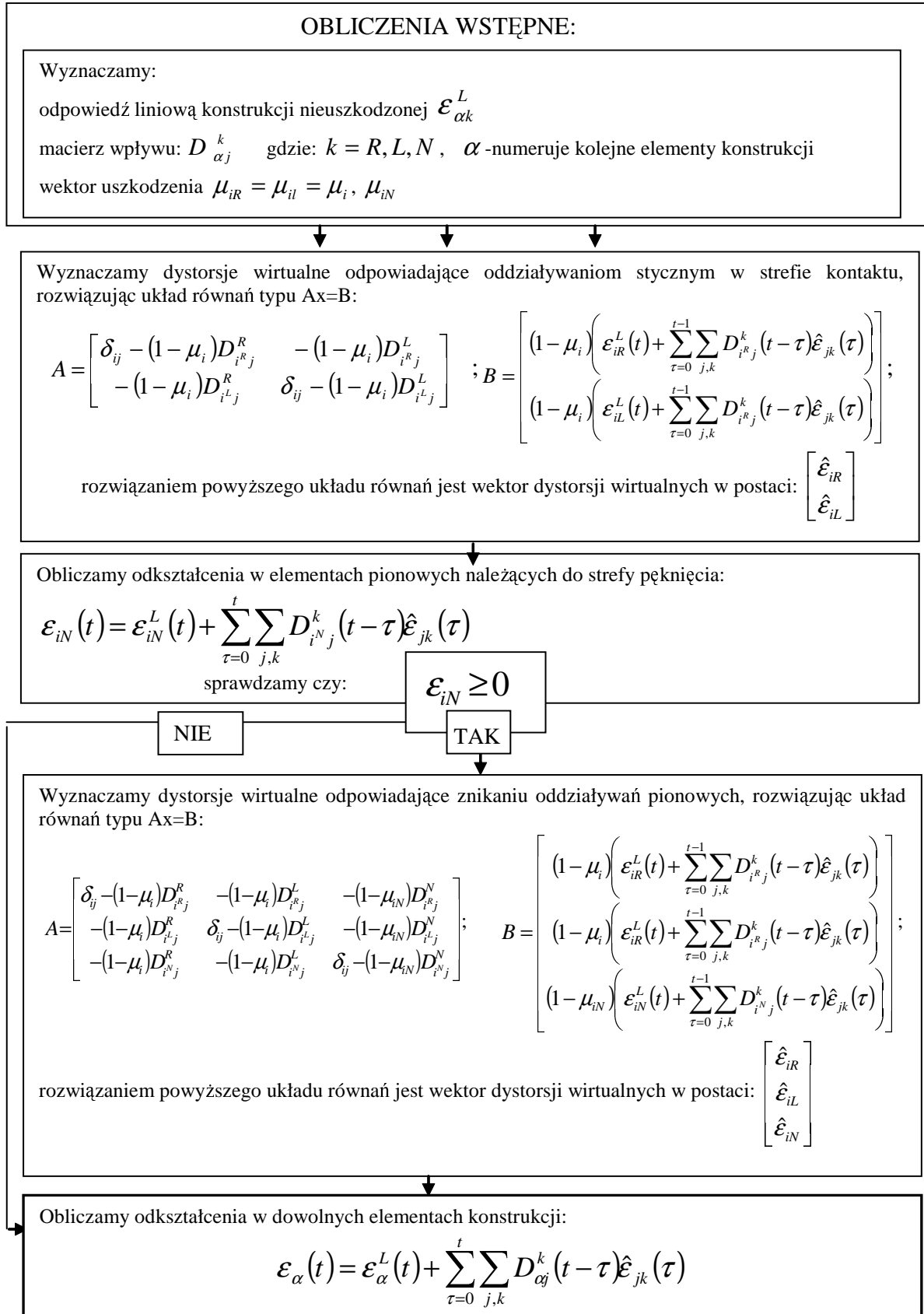
a następnie, w przypadku konieczności modelowania zaniku oddziaływań normalnych, układ równań:



$$\left\{ \begin{array}{l}
\sum_j \left( \delta_{ij} - (1 - \mu_i) D_{iRj}^R(0) \right) \hat{\varepsilon}_{jR}(t) - (1 - \mu_i) \sum_j D_{iRj}^L(0) \hat{\varepsilon}_{jL}(t) - (1 - \mu_i) \sum_j D_{iRj}^N(0) \hat{\varepsilon}_{jN}(t) \\
= (1 - \mu_i) \varepsilon_{iR}^L(t) + (1 - \mu_i) \sum_{k=R,L} \sum_{\tau=0}^t \sum_j D_{iRj}^k(t - \tau) \hat{\varepsilon}_{jk}(\tau) + (1 - \mu_{iN}) \sum_{\tau=0}^t \sum_j D_{iRj}^N(t - \tau) \hat{\varepsilon}_{jN}(\tau), \\
\\
\sum_j \left( \delta_{ij} - (1 - \mu_i) D_{iLj}^L(0) \right) \hat{\varepsilon}_{jL}(t) - (1 - \mu_i) \sum_j D_{iLj}^R(0) \hat{\varepsilon}_{jR}(t) - (1 - \mu_i) \sum_j D_{iLj}^N(0) \hat{\varepsilon}_{jN}(t) \\
= (1 - \mu_i) \varepsilon_{iL}^L(t) + (1 - \mu_i) \sum_{k=R,L} \sum_{\tau=0}^t \sum_j D_{iLj}^k(t - \tau) \hat{\varepsilon}_{jk}(\tau) + (1 - \mu_{iN}) \sum_{\tau=0}^t \sum_j D_{iLj}^N(t - \tau) \hat{\varepsilon}_{jN}(\tau), \\
\\
\sum_j \left( \delta_{ij} - (1 - \mu_i) D_{iNj}^N(0) \right) \hat{\varepsilon}_{jN}(t) - (1 - \mu_i) \sum_j D_{iNj}^L(0) \hat{\varepsilon}_{jL}(t) - (1 - \mu_i) \sum_j D_{iNj}^R(0) \hat{\varepsilon}_{jR}(t) \\
= (1 - \mu_i) \varepsilon_{iN}^L(t) + (1 - \mu_i) \sum_{k=R,L} \sum_{\tau=0}^t \sum_j D_{iNj}^k(t - \tau) \hat{\varepsilon}_{jk}(\tau) + (1 - \mu_{iN}) \sum_{\tau=0}^t \sum_j D_{iNj}^N(t - \tau) \hat{\varepsilon}_{jN}(\tau).
\end{array} \right. \quad (3.17)$$

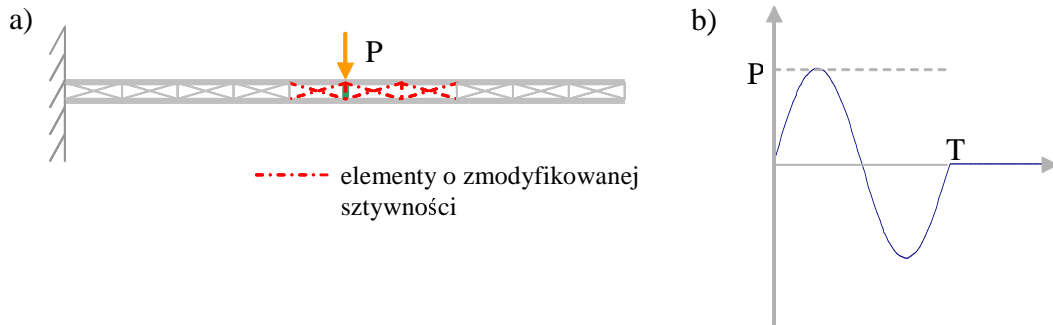
W przedstawionym w tab. 3.3 algorytmie modelowania delaminacji w konstrukcji obciążonej dynamicznie, powyższe układy są przedstawione w formie macierzowej.

TABLICA 3.3. Algorytm modelowania odpowiedzi konstrukcji zdelaminowanej obciążonej dynamicznie

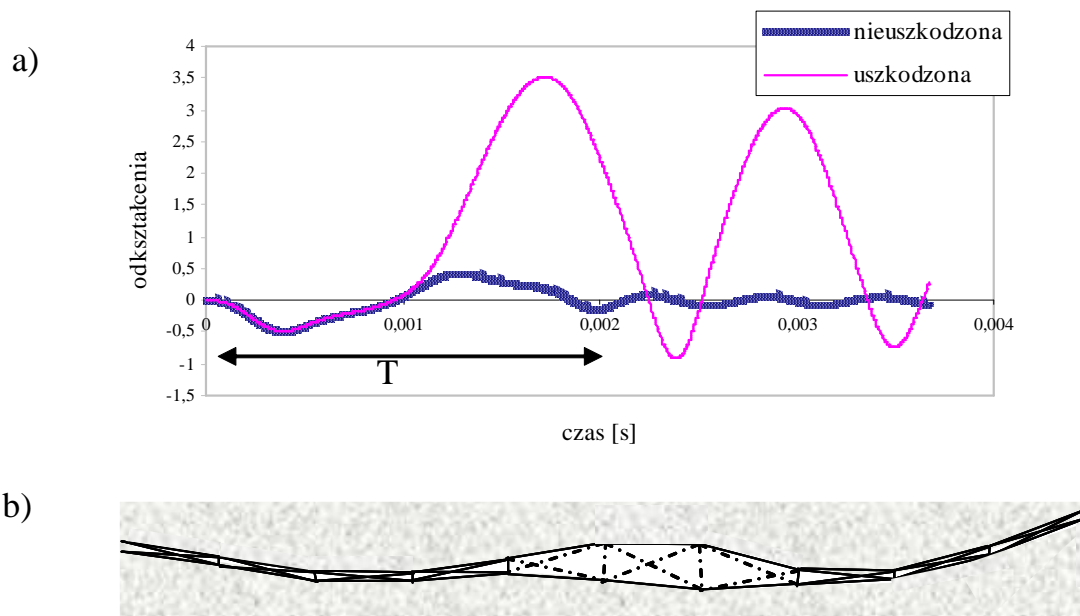


### 3.6. Test modelowania delaminacji w dynamice

Rozpatrzmy konstrukcję dwuwarstwową opisaną w punkcie 3.2 utwierdzoną jednostronnie i obciążoną siłą skupioną w sposób pokazany na rys. 3.11.



Rys. 3.11. (a) Model MES wykorzystany w zadaniu. (b) Zależność siły wzbudzającej drgania konstrukcji od czasu.



Rys. 3.12. (a) Porównanie odpowiedzi konstrukcji zdelaminowanej i pierwotnej. (b) Rozdzielanie się warstw w obszarze pęknięcia w chwili  $t = 0.018$  s.

Założmy że rozwarstwieniu uległa środkowa część konstrukcji (sekcje 5, 6, 7). Przyjmijmy, że sztywność w elementach ukośnych należących do sekcji 5, 6, 7 jest stale zerowa, natomiast sztywność elementów pionowych należących do obszaru zdelaminowanego zależy od odkształceń tych elementów.

Obciążenie konstrukcji siłą skupioną prostopadłą do jej osi obojętnej w węźle znajdującym się bezpośrednio nad delaminacją powoduje pojawienie się efektu „otwartej szczeliny”. Jest to bardzo wyraźnie widoczne przy porównaniu odkształceń liniowych oraz odkształceń powstających w konstrukcji uszkodzonej dla jednego z elementów pionowych (należących

do obszaru zdelaminowanego) pod wpływem przyłożonego obciążenia (rys. 3.12).

Odpowiedź dynamiczna konstrukcji z tak zlokalizowaną delaminacją modelowana MIDW pokrywa się z odpowiedzią uzyskaną w wyniku modyfikacji macierzy sztywności w modelu numerycznym MES.

### **3.7. Doświadczalna weryfikacja algorytmu modelowania delaminacji w zadaniu dynamicznym**

W celu uzyskania danych umożliwiających weryfikację algorytmu modelowania odpowiedzi konstrukcji zdelaminowanej, badaniom poddano wiotką belkę dwuwarstwową (jej cechy jak i charakterystyka wykorzystanego układu pomiarowego przedstawione zostaną w dalszej części pracy).

Pierwszym i bardzo ważnym etapem podjętych prac było zbudowanie modelu numerycznego MES odpowiadającego badanej konstrukcji. W tym celu przeprowadzono szereg pomiarów na podstawie których:

- opracowano model pojedynczej warstwy,
- zbudowano model konstrukcji dwuwarstwowej.

Na podstawie wykonanego modelu MES konstrukcji dwuwarstwowej obliczono odpowiedź liniową tejże konstrukcji na zadane wymuszenie oraz macierz wpływu, a następnie wykorzystując algorytm zaprezentowany w tab. 3.3 obliczono odpowiedź konstrukcji zdelaminowanej (modelowanej dystorsjami) i porównano ją z odpowiedzią uzyskaną doświadczalnie. Zbudowany w celu weryfikacji model numeryczny oraz zmierzona doświadczalnie odpowiedź konstrukcji uszkodzonej wykorzystane zostały do weryfikacji algorytmu identyfikacji delaminacji (opisanej w punkcie (4.2.3)).

#### **3.7.1. Opis stanowiska doświadczalnego**

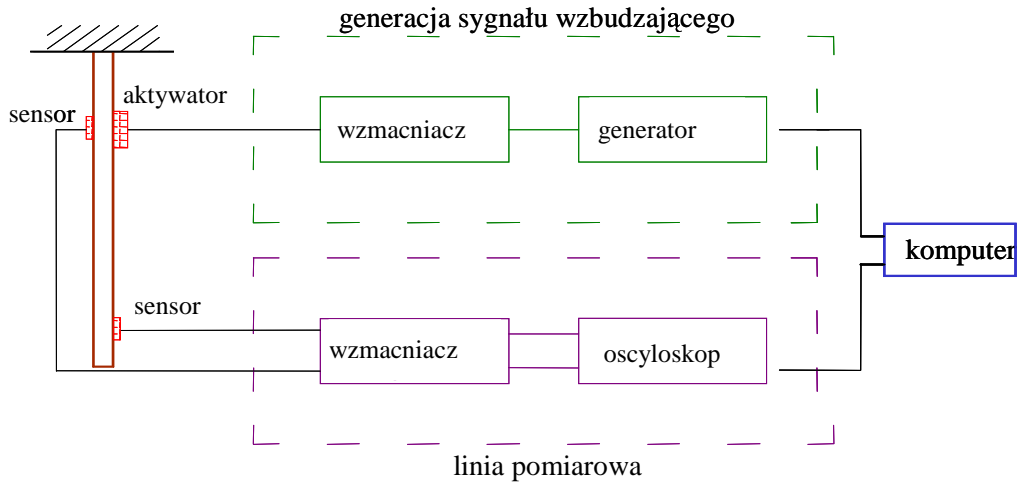
Pomiary drgań konstrukcji wspornikowej wykonane zostały przy pomocy prostego układu pomiarowego przedstawionego na rys. 3.13. Układ ten zasadniczo można podzielić na dwie części:

- część odpowiadającą za wzbudzenie konstrukcji do drgań (do części tej należy zaliczyć generator funkcyjny, wzmacniacz mocy, aktywator piezoelektryczny),
- część odpowiedzialną za pomiar sygnału odpowiedzi (czujnik piezoelektryczny, wzmacniacz kondycjonujący, układ akwizycji danych).

Rolę elementu wymuszającego drgania konstrukcji pełnił aktywator piezoelektryczny, zbudowany z dwu stosów piezoelektrycznych o kształcie prostopadłościennym (połączonych równolegle), oraz otaczającej je elipsoidalnej obejmie pełniącej rolę wzmacniacza mechanicznego i elementów mocujących (rys. 3.15). Zasilenie aktywatora sygnałem napięciowym wywoływało w belce propagację fali giętnej.

Rolę sensora pełniła płytki piezoelektryczna<sup>2)</sup> o długości 2.5 cm i szerokości 0.5 cm.

<sup>2)</sup> Wykorzystano płytki piezoelektryczne firmy Ferroperm z materiału PZn27.



Rys. 3.13. Schemat układu pomiarowego

Płytką taką naklejoną na powierzchni drgającej konstrukcji zachowuje się jak kondensator, na którego okładkach gromadzi się ładunek proporcjonalny do odkształceń powierzchni znajdującej się pod sensorem:

$$Q_p = C_p \left[ \int_L \epsilon_x(x) dx + y_p \int_L \kappa_z(x) dx \right], \quad (3.18)$$

$$Q_p = C_p (\tilde{\epsilon}_x + y_p \tilde{\kappa}_z), \quad (3.19)$$

gdzie:

$c_p$  – stała zależna od wymiarów sensora i materiału z którego został wykonany,

$y_p$  – odległość pomiędzy osią belki a osią naklejonego na nią piezo-sensora,

$L$  – długość piezo-sensora,

$\epsilon_x$  – odkształcenia osiowe,

$\kappa_z$  – odkształcenia zgięciowe.

Jeśli podzielimy obszar pod sensorem na  $N$  równych elementów, to całka odkształceń osiowych tych elementów będzie równa:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_x &= \int_L \epsilon_x(x) dx = \sum_{e=1}^N \int_L e_x^{(e)}(x) dx = \sum_{e=1}^N \frac{L^{(e)}}{2} \int_{-1}^1 \epsilon_x^{(e)}(\xi) d\xi = \sum_{e=1}^N \frac{L^{(e)}}{2} \int_{-1}^1 \epsilon_x^{(e)} d\xi \\ &= \sum_{e=1}^N L^{(e)} \epsilon_x^{(e)} = \sum_{e=1}^N (u_2^{(e)} - u_1^{(e)}) = u_2^{(N)} - u_1^{(1)}, \quad (3.20) \end{aligned}$$

natomiast całka krzywizny będzie miała postać:

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_z &= \int_L \kappa_z(x) dx = \sum_{e=1}^N \int_L \kappa_z^{(e)}(x) dx = \sum_{e=1}^N \frac{L^{(e)}}{2} \int_{-1}^1 \kappa_z^{(e)}(\xi) d\xi = \sum_{e=1}^N \frac{L^{(e)}}{2} \int_{-1}^1 (\chi_z^{(e)} + \chi_z^{(e)} \xi) d\xi \\ &= \sum_{e=1}^N L^{(e)} \chi_z^{(e)} = \sum_{e=1}^N (\varphi_2^{(e)} - \varphi_1^{(e)}) = \varphi_2^{(N)} - \varphi_1^{(1)}. \quad (3.21) \end{aligned}$$

Jak pokazują równania (3.20) i (3.21) rezultaty przeprowadzonego całkowania nie zależą od ilości elementów pod sensorem, a tylko od różnic pomiędzy obrotami i przemieszczeniami skrajnych węzłów. Prędkości propagacji fali podłużnej i giętnej są różne, z uwagi na ten fakt oraz na charakter wymuszenia, ładunek zgromadzony na okładkach płytki pełniące rolę sensora został zinterpretowany zgodnie ze wzorem:

$$Q_p(t) = C_p y_p \tilde{\kappa}_z(t) = C_p y_p \left( \varphi_2^{(N)}(t) - \varphi_1^{(1)}(t) \right). \quad (3.22)$$

Ponieważ wielkością bezpośrednio mierzoną w układzie pomiarowym przedstawionym na rys. 3.13 było napięcie proporcjonalne do ładunku indukowanego na elektrodach płytki (na stałą proporcjonalności składa się pojemność czujnika oraz współczynnik wzmocnienia układu kondycjonującego) wyniki pomiarów przedstawione będą w jednostkach umownych, bez dodatkowego przeliczania ich na odkształcenia, natomiast rezultaty obliczeń numerycznych zostaną unormowane do wartości eksperymentalnych. Pozwoli to nie tylko uniknąć dodatkowej pracy związanej z przeskalowaniem sygnału napięciowego, ale także wyeliminować efekty związane np. z grubością warstwy kleju pomiędzy płytką pomiarową a powierzchnią badanej konstrukcji (sprawdzono, iż amplituda sygnału w sposób istotny zależy od tejże grubości). Identyczna technika pomiaru została zastosowana w badaniach opisanych w [78] (w pracy tej dość obszernie omówione zostało zagadnienie zastosowania sensorów piezoelektrycznych do pomiaru odpowiedzi drganiowej konstrukcji).

### 3.7.2. Opis badanego elementu konstrukcyjnego

Badaniom poddano konstrukcję zbudowaną z dwóch belek aluminiowych (rys. 3.15) o wymiarach:

- długość: 0.81 m,
- szerokość: 0.025 m,
- wysokość: 0.0024 m.

Moment bezwładności przekroju dla pojedynczej belki wynosi zatem:

$$J = \frac{0.025m(0.0024m)^3}{12} = 2.879e - 11m^4. \quad (3.23)$$

Rolę elementów łączących belki pełniły śruby (ry. 3.15) o masie zanedbywalnej względem masy całej konstrukcji. Połączenie wprowadzono w dziesięciu punktach wzdłuż konstrukcji, dzieląc ją tym samym na dziesięć obszarów (w modelu numerycznym każdy obszar reprezentuje oddzielna sekcja warstwy kontaktowej).

Do budowy modelu numerycznego warstw belkowych zastosowano płaskie elementy ramowe, przy czym każda warstwa składała się z 80 elementów belkowych dla których przyjęto moment bezwładności przekroju w płaszczyźnie zginania równy  $J = 2.879e - 11m^4$ . Odległość pomiędzy osiami środkowymi warstw belkowych wynosi 0.0024m. Warstwa modelująca połączenia belek składa się z 10 sekcji zbudowanych z elementów kratowych. Sensor z uwagi na pomijalnie małą masę nie był modelowany dodatkowymi elementami skończonymi (przyjęto zgodnie z (3.22) że odczyt na sensorze jest proporcjonalny do różnicy pomiędzy obrotami skrajnych węzłów). Przyjęto że ciężar właściwy dla aluminium wynosi  $2940 \frac{kg}{m^3}$ .

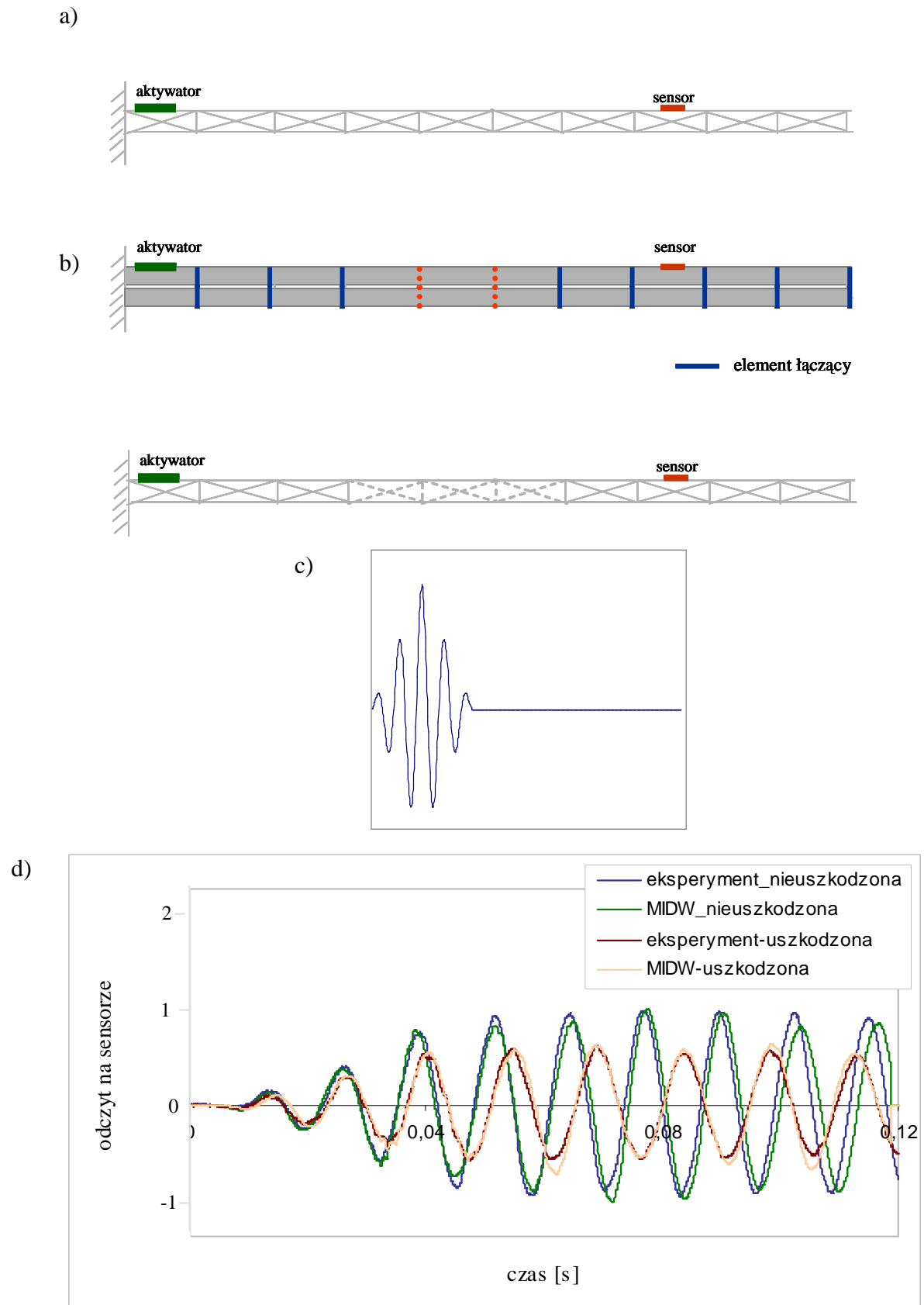
TABLICA 3.4. Częstości drgań własnych konstrukcji.

konstrukcja pierwotna				konstrukcja uszkodzona		
Nr	eksper.	model numeryczny	błąd eksper./numeryka	eksper.	model numeryczny	błąd eksper./numeryka
1	5.25	5.12	2.46%	5	5.05	1.16 %
2	29.5	30.25	2.54%	29.7	29.36	1.13%
3	77.5	78.37	1.12%	70.6	73.27	3.79 %
4	138	140.27	1.64%	140	129.05	7.82 %
5	213	211	0.69%	199	199.3	0.46 %

Zadanie dopasowania modelu numerycznego do modelu eksperymentalnego zrealizowano poprzez dobranie odpowiednich wartości modułu Younga ( $41e9Pa$ ) dla belek oraz sztywności elementów kratowych budujących warstwę łączącą ( $EA = 92.5e4 Pa m^2$ ), tak aby uzyskać jak najmniejsze rozbieżności pomiędzy obliczonymi i zmierzonymi częstościami drgań własnych (porównanie częstości drgań własnych dla konstrukcji pierwotnej i uszkodzonej przedstawia tab.(3.4)). Na bazie zbudowanego modelu numerycznego obliczono odkształceniową macierz wpływu, oraz odpowiedź liniową konstrukcji na wymuszenie o postaci:

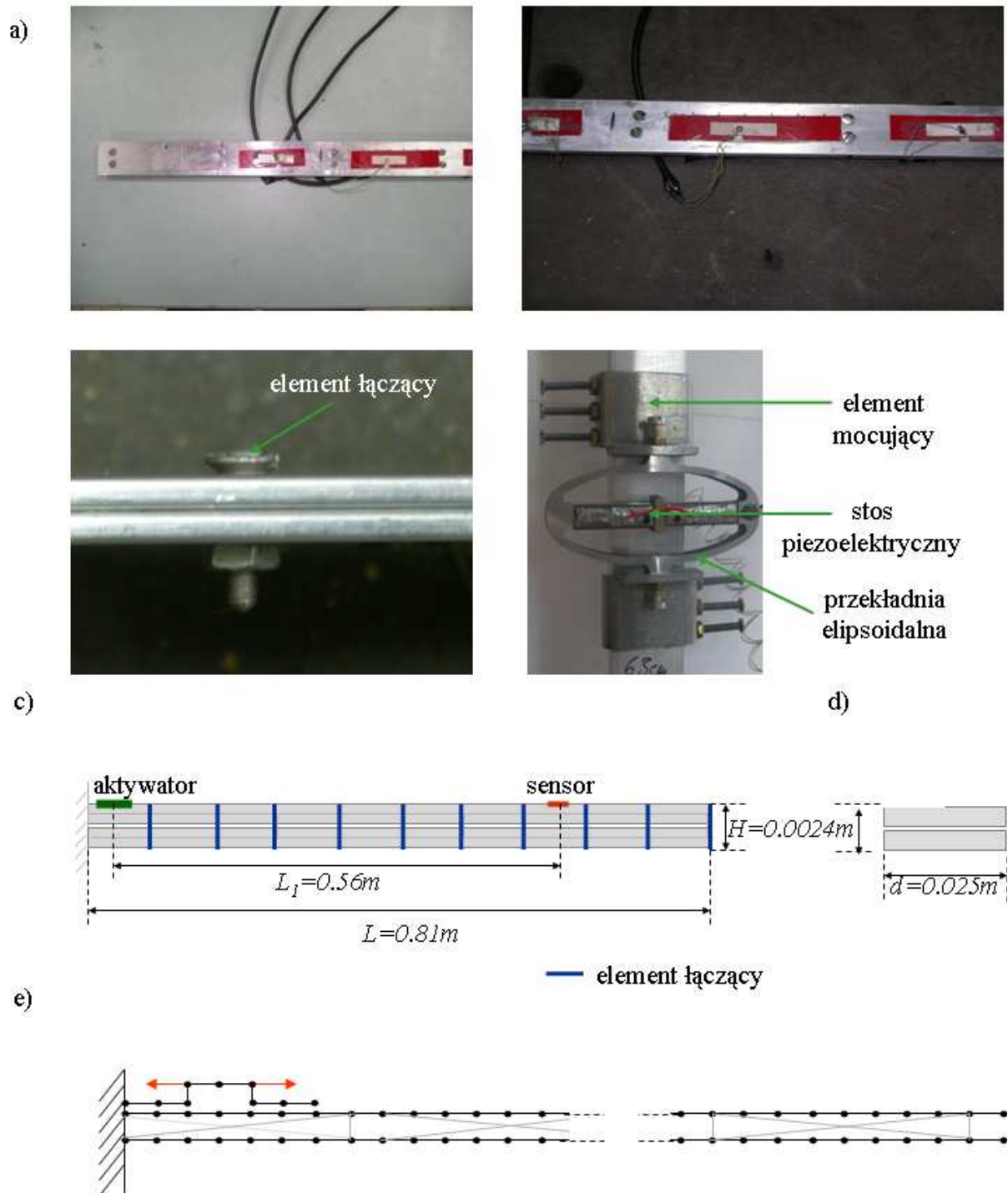
$$f(t) = \begin{cases} a \sin(\sin(\omega t)) \sin(n\omega t) & \text{dla } t \leq 0, n = 5, \\ 0 & \text{dla } t > 0, \end{cases} \quad (3.24)$$

gdzie  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $\nu = 76Hz$ . Sygnał wzbudzający opisany przez powyższe wymuszenie umożliwia wzbudzenie fali giętej o częstotliwości bliskiej trzeciej częstości drgań własnych konstrukcji. Wybór taki uzasadnia fakt, że dla trzeciej formy drgań zaobserwowano największą różnicę częstości pomiędzy konstrukcją początkową i zdelaminowaną. Następnie wykorzystano sformułowania IMDW do obliczenia odpowiedzi konstrukcji uszkodzonej, przyjmując współczynniki modyfikacji dla sekcji 4, 5, 6 równe:  $\mu_4 = 0.5$ ,  $\mu_5 = 0$ ,  $\mu_6 = 0.5$ . Porównanie odpowiedzi modelowanej IMDW z odpowiedzią eksperymentalną przedstawia rys.(3.14).



RYS. 3.14. (a) Schemat konstrukcji nieuszkodzonej. (b) Schemat konstrukcji zdelaminowanej (kolorem czerwonym zaznaczono miejsca w których usunięto elementy łączące, w modelu numerycznym uszkodzenie jest reprezentowane przez elementy o zmodyfikowanej sztywności, oznaczone przerywaną linią). (c) Sygnał wzbudający. (d) Porównanie odpowiedzi obliczonych przy wykorzystaniu IMDW i zmierzonych eksperymentalnie (odpowiedzi mierzone i obliczone zostały unormowane do 1).





RYS. 3.15. (a) Zdjęcia fragmentów badanej konstrukcji. (b) Schemat geometryczny przedstawiający wzajemne usytuowanie elementu aktywnego i sensora oraz wymiary konstrukcji. (c) Schemat modelu numerycznego belki dwuwarstwowej (oznaczenia: kolor czarny - elementy belkowe, kolor szary - elementy kratowe).

---

## Identyfikacja delaminacji

---

Rozwiązania oparte na wykorzystaniu struktur warstwowych oraz kompozytowych cieszą się w ostatnich latach szczególnie dużą popularnością. Te cechujące się dużą wytrzymałością materiały narażone są na powstawanie różnego typu uszkodzeń, w tym szczególnie niebezpiecznej w skutkach delaminacji. Wynika stąd rosnąca potrzeba opracowania metod umożliwiających odpowiednio wczesne wykrycie względnie małych rozwarstwień.

W bieżącym rozdziale zaprezentowane zostaną 3 algorytmy identyfikacji delaminacji. Pierwszy z nich będzie bazował na analizie pól odkształceń konstrukcji obciążonej statycznie. Dwa pozostałe będą się opierać na analizie odpowiedzi dynamicznej konstrukcji.

### 4.1. Identyfikacja delaminacji na podstawie odpowiedzi statycznej konstrukcji

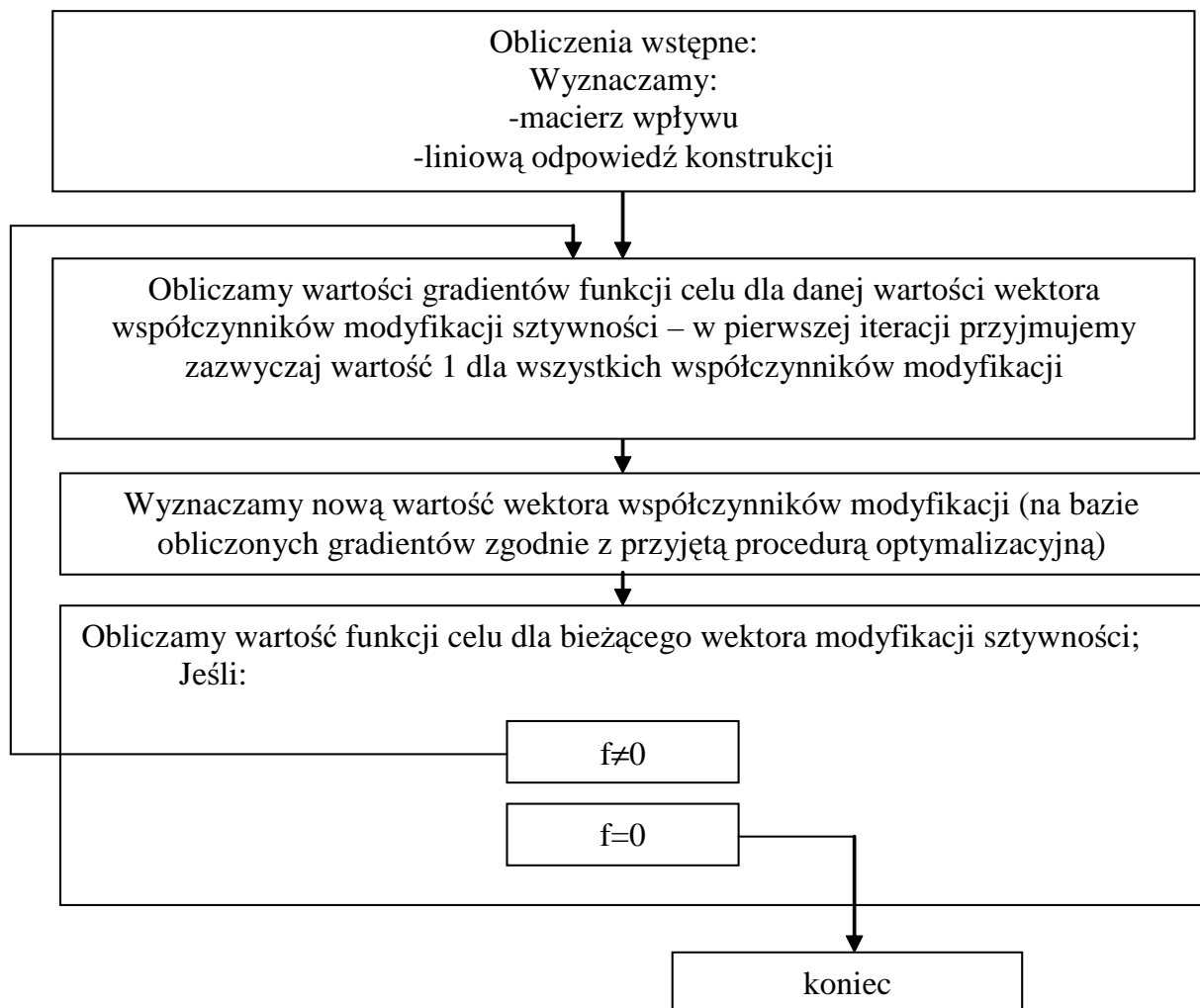
#### 4.1.1. Algorytm identyfikacji wykorzystujący MDW

Jak wspomniano we wstępie istotną zaletą stosowania Metody Dystorsji Wirtualnych jest możliwość analitycznego obliczania pochodnej funkcji przejścia ze względu na składowe wektora modyfikacji sztywności  $\mu_i$ . Wykorzystanie tego faktu umożliwia zastosowanie gradientowych metod optymalizacji do rozwiązania problemu odwrotnego jakim jest identyfikacja wektora  $\mu_i$  odpowiadającego określonym uszkodzeniom.

Opierając się na tej własności, możemy zaproponować algorytm identyfikacji delaminacji, którego istotą byłaby minimalizacja funkcji celu w postaci:

$$f = \sum_A (\varepsilon_A^M - \varepsilon_A(\mu_i))^2, \quad (4.1)$$

TABLICA 4.1. Algorytm identyfikacji delaminacji oparty na MDW



gdzie:

$\varepsilon_A^M$  – odpowiedź konstrukcji uszkodzonej (zmierzona np. w realnym eksperymencie),

$\varepsilon_A$  – odpowiedź konstrukcji modelowana dystorsjami.

Wyrażona wzorem (4.1) funkcja celu umożliwi porównywanie odpowiedzi odkształceniowej danego elementu konstrukcji na określone wymuszenie  $\varepsilon_A^M$ , z odpowiedzią konstrukcji hipotetycznie uszkodzonej  $\varepsilon_A$  (dla której uszkodzenie jest wyrażone poprzez składowe wektora  $\mu_i$ ) do momentu w którym wartości te będą sobie równe. Kluczem do identyfikacji delaminacji będzie więc minimalizacja funkcji zależnej od wartości wektora  $\mu_i$ , przy czym kierunek zmian wyznaczany będzie przy pomocy jej gradientu.

W tak postawionym zadaniu optymalizacji konieczne jest uwzględnienie faktu iż wartości współczynnika modyfikacji sztywności dla poszczególnych elementów warstwy kontaktowej muszą mieścić się w przedziale  $[0, 1]$ , co prowadzi do następującego ograniczenia:

$$0 \leq \mu_i = \frac{\hat{E}_i}{E_i} \leq 1, \quad (4.2)$$

które po uwzględnieniu (??) może być zapisane w postaci nierówności:

$$0 \leq \frac{\varepsilon_i - \hat{\varepsilon}_i}{\varepsilon_i} \leq 1. \quad (4.3)$$

Mamy więc do czynienia z zadaniem programowania nieliniowego z nieliniowymi ograniczeniami i zmienną decyzyjną w postaci wektora  $\mu_i$ .

Ogólną postać algorytmu identyfikacji delaminacji opartego na MDW przedstawia tab. 4.1.

#### 4.1.2. Gradient funkcji celu

Najbardziej czasochłonnym etapem przedstawionego w tab. 4.1 algorytmu identyfikacji delaminacji jest obliczanie gradientu funkcji celu. Funkcja ta dla pojedynczego sensora przyjmuje postać:

$$f = (\varepsilon_A^M - \varepsilon_A(\mu_i))^2, \quad (4.4)$$

gdzie  $\varepsilon_A$  jest funkcją zależną od współczynnika modyfikacji sztywności.

Zatem pochodna:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu_s} = 2(\varepsilon_A^M - \varepsilon_A) \left( \frac{\partial(\varepsilon_A^M - \varepsilon_A)}{\partial \mu_s} \right) = -2(\varepsilon_A^M - \varepsilon_A) \frac{\partial \varepsilon_A}{\partial \mu_s}. \quad (4.5)$$

Ponieważ od zmiennej  $\mu_s$  zależy tylko rezydualna część funkcji przejścia:

$$\varepsilon_A = \varepsilon_A^L + \sum_{k=R,L,N} \sum_j D_{Aj}^k \hat{\varepsilon}_{jk}(\mu_s), \quad (4.6)$$

zatem obliczenie pochodnej odpowiedzi modelowanej dystorsjami ze względu na zmianę współczynnika modyfikacji sztywności sprowadza się do:

$$\frac{\partial \varepsilon_A}{\partial \mu_s} = \frac{\partial}{\partial \mu_s} \sum_{k=R,L,N} \sum_j D_{Aj}^k \hat{\varepsilon}_{jk}(\mu_s) = \sum_{k=R,L,N} \sum_j D_{Aj}^k \frac{\partial \hat{\varepsilon}_{jk}}{\partial \mu_s}. \quad (4.7)$$

Ostatecznie, obliczenie gradientu funkcji celu składać się będzie z następujących kroków:

- obliczenie wartości funkcji przejścia  $\varepsilon_i$  dla danej wartości wektora  $\mu_s$ ,
- obliczenie gradientu dystorsji,
- wykorzystanie uzyskanych danych do obliczenia gradientu funkcji celu zgodnie ze wzorem:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu_s} = -2(\varepsilon_A^M - \varepsilon_A) \sum_{k=R,L,N} \sum_j D_{Aj}^k \frac{\partial \hat{\varepsilon}_{jk}(\mu_s)}{\partial \mu_s}. \quad (4.8)$$

W przypadku identyfikacji opartej na większej liczbie sensorów funkcja celu przyjmuje postać sumy:

$$f = \sum_A (\varepsilon_A^M - \varepsilon_A(\mu_i))^2, \quad (4.9)$$

natomiast jej gradient jest równy sumie pochodnych funkcji celu określonej wzorem (4.8), obliczonych dla wszystkich elementów pełniących rolę sensorów:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu_s} = - \sum_A \left( 2(\varepsilon_A^M - \varepsilon_A) \sum_k \sum_j D_{Aj}^k \frac{\partial \hat{\varepsilon}_{jk}(\mu_s)}{\partial \mu_s} \right). \quad (4.10)$$

Algorytm wyznaczania gradientu funkcji celu prezentuje tab. 4.2.

W celu wyznaczenia analitycznych wyrażeń na składowe gradientu dystorsji różniczkujemy względem  $\mu_s$  związek:

$$\sum_k \sum_j \left[ \delta_{ikjk} - (1 - \mu_{ik}) D_{ikj}^k \right] \hat{\varepsilon}_{jk} = (1 - \mu_{ik}) \varepsilon_{ik}^L \quad (4.11)$$

(gdzie  $\mu_{ik}$  dla  $k = R, L$  jest równe  $\mu_i$ ) otrzymując w wyniku:

$$\sum_k \sum_j \left[ \delta_{ikjk} - (1 - \mu_{ik}) D_{ikj}^k \right] \frac{\partial \hat{\varepsilon}_{jk}}{\partial \mu_s} = \left( 1 - \frac{\partial \mu_{ik}}{\partial \mu_s} \right) \varepsilon_{ik}^L - \sum_k \sum_j \left[ \left( 1 - \frac{\partial \mu_{ik}}{\partial \mu_s} \right) D_{ikj}^k \right] \hat{\varepsilon}_{jk}. \quad (4.12)$$

Zauważmy że prawa strona tego równania może być zapisana jako:

$$\left( 1 - \frac{\partial \mu_{ik}}{\partial \mu_s} \right) \left( \varepsilon_{ik}^L - \sum_k \sum_j D_{ikj}^k \hat{\varepsilon}_{jk} \right) = \left( 1 - \frac{\partial \mu_{ik}}{\partial \mu_s} \right) \varepsilon_{ik}(\mu_s), \quad (4.13)$$

co z kolei pozwala zapisać równanie (4.12) w postaci:

$$\sum_k \sum_j \left[ \delta_{ikjk} - (1 - \mu_{ik}) D_{ikj}^k \right] \frac{\partial \hat{\varepsilon}_{jk}}{\partial \mu_s} = \left( 1 - \frac{\partial \mu_{ik}}{\partial \mu_s} \right) \varepsilon_{ik}(\mu_s). \quad (4.14)$$

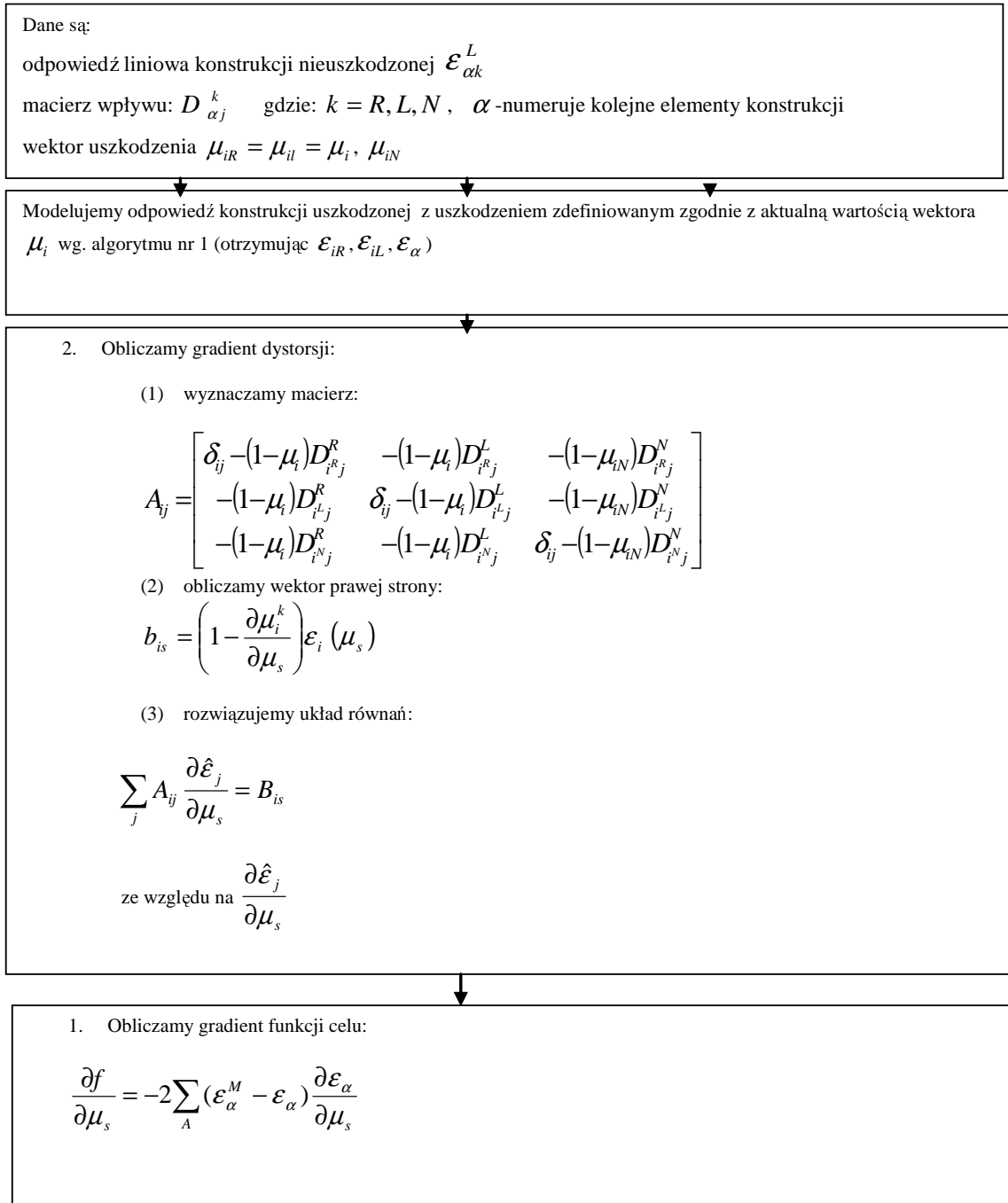
W celu wyznaczenia wszystkich składowych gradientu dystorsji wystarczy rozwiązać równanie macierzowe  $Ax = b$ , gdzie:

$$A_{ikjk} = \sum_k \left[ \delta_{ikjk} - (1 - \mu_{ik}) D_{ikj}^k \right] \quad (4.15)$$

$$B_{ik_s} = \left( 1 - \frac{\partial \mu_{ik}}{\partial \mu_s} \right) \varepsilon_{ik}(\mu_s).$$

Wykorzystana do obliczenia składowych gradientu dystorsji macierz  $A_{ij}$  jest identyczna jak macierz wprowadzona w równaniu (3.8) i wykorzystana do obliczenia dystorsji wirtualnych odpowiadających modyfikacji sztywności opisanej przez współczynnik  $\mu_i$ . Wystarczy zatem jednokrotne jej obliczenie w punkcie 1 przedstawionego w tab. 4.2 algorytmu wyznaczania gradientu funkcji celu i wykorzystanie jej w punktach 1 i 2.

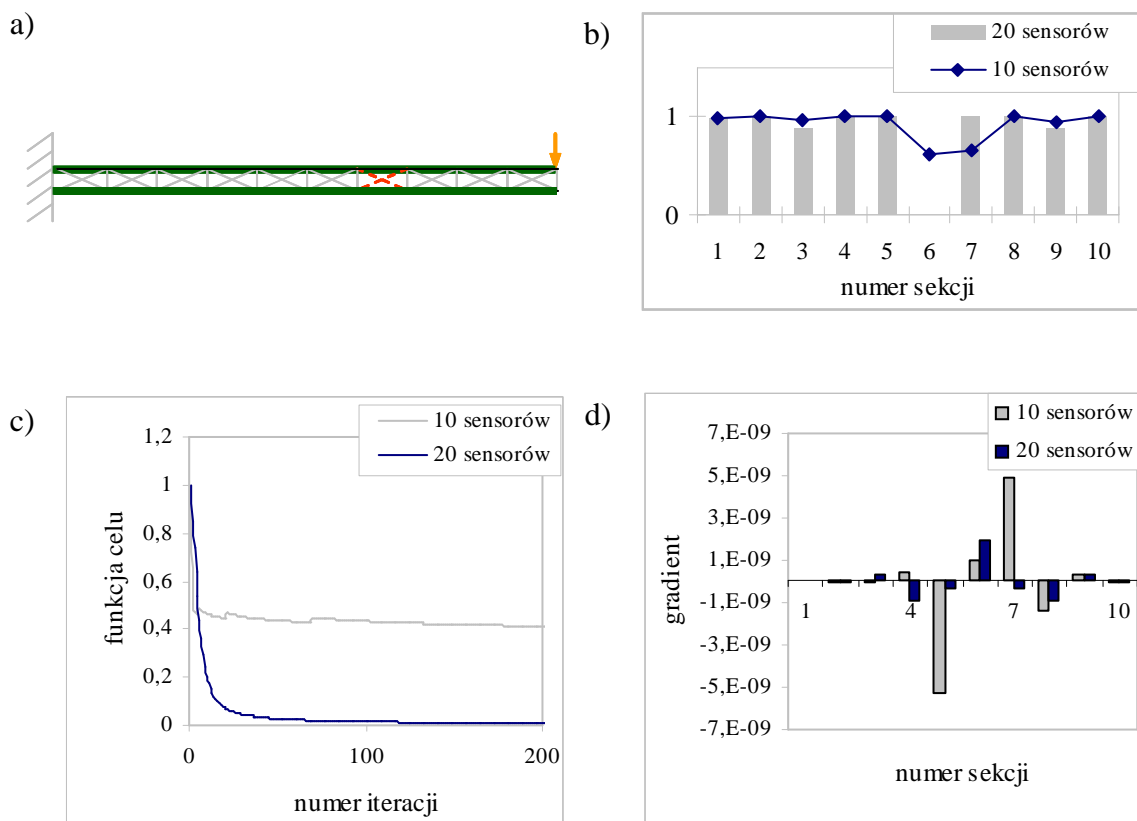
TABLICA 4.2. Algorytm wyznaczania gradientu funkcji celu



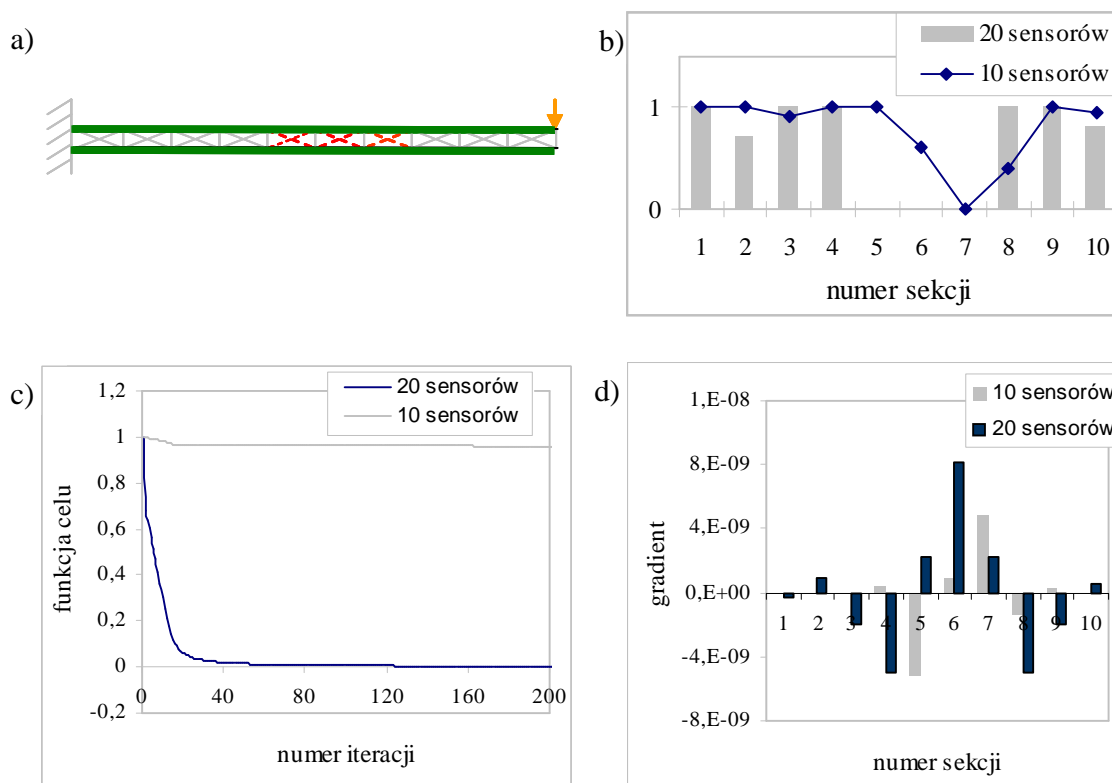
### 4.1.3. Test identyfikacji delaminacji w statyce

Algorytm identyfikacji delaminacji w konstrukcji obciążonej statycznie, zaprezentowany w tab. został zaimplementowany w środowisku FORTRAN, w postaci programu komputerowego VDMbop. Poniżej przedstawione zostaną rezultaty obliczeń wykonanych przy pomocy tego programu. Testom poddany został model kratowo–belkowy omówiony w punkcie 3.3. Analizowano dwa typy uszkodzeń: pęknięcie o bardzo niewielkich rozmiarach względem długości całego wspornika (rys. 4.1) oraz rozległą delaminację występującą w środkowej części badanej konstrukcji (rys. 4.2). Jako procedurę optymalizacyjną wykorzystano Metodę Rzutu Gradientu na płaszczyznę aktywnych ograniczeń [1].

Decydujący wpływ na wynik identyfikacji ma liczba wykorzystanych sensorów. Zarówno w przypadku małej jak i rozległej delaminacji, identyfikacja oparta na odpowiedzi z 20 sensorów pozwala na poprawne określenie rozmiaru i położenia pęknięcia, podczas gdy wyniki identyfikacji bazującej na 10 sensorach nie są zadowalające.



RYS. 4.1. Przykład identyfikacji bardzo małej, zlokalizowanej w 6 sekcji delaminacji: (a) model konstrukcji, (b) końcowy wynik identyfikacji – wartości współczynnika modyfikacji sztywności odpowiadające kolejnym sekcjom, (c) wartość funkcji celu w kolejnych iteracjach procedury optymalizacyjnej, (d) składowe gradientu funkcji celu w pierwszej iteracji.



Rys. 4.2. Przykład identyfikacji rozległej delaminacji zlokalizowanej w sekcji 5, 6 i 7: (a) model konstrukcji, (b) końcowy wynik identyfikacji – wartości współczynnika modyfikacji sztywności odpowiadające kolejnym sekcjom, (c) wartość funkcji celu w kolejnych iteracjach procedury optymalizacyjnej, (d) składowe gradientu funkcji celu w pierwszej iteracji.

## 4.2. Identyfikacja delaminacji w konstrukcji obciążonej dynamicznie

Omówione wyżej statyczne zadanie identyfikacji defektu delaminacji należy potraktować jako zadanie wstępne i mało praktyczne aplikacyjnie. W praktycznej realizacji wymagałoby obserwacji zmiany kształtu całego ustroju np. metodami optycznymi lub przy pomocy gęsto rozłożonych tensometrów oraz stosowania testujących obciążeń statycznych. Bardziej praktycznym sposobem identyfikacji defektów jest podejście oparte na badaniu odpowiedzi dynamicznej ustroju. Kilka, dobrze rozmieszczonych sensorów zbierających informacje na temat reakcji konstrukcji na impulsowe wymuszenie dostarcza dostatecznej porcji wiedzy aby rozwiązać postawione zadanie. Istotnym czynnikiem przemawiającym na korzyść metody dynamicznej jest fakt, że tanie przetworniki piezoelektryczne dobrze spełniają rolę sensorów identyfikujących szybkozmienne deformacje lokalne, oraz że wymuszenie impulsu dynamicznego w konstrukcji jest łatwiejsze w realizacji niż przeprowadzenie prób obciążeń statycznych.

Opisane wyżej powody stanowią motywację do sformułowania zadania identyfikacji delaminacji jako problemu dynamicznego, analizowanego w domenie czasu. Pozwoli to na uzyskanie zadowalających wyników, osiągniętych jednak dość dużym kosztem numerycznym. Możliwe jest także postawienie zadania identyfikacji delaminacji jako problemu ana-



lizowanego w domenie częstości, co znacznie obniża koszty numeryczne lecz wymaga zastosowania gęstej sieci piezo-sensorów. Ze względu na niską cenę ceramiki piezo, podejście oparte na analizie częstościowej może okazać się atrakcyjne i będzie tematem dalszych badań, choć nie objętych zakresem niniejszej pracy.

Istotą algorytmu identyfikacji opartego na analizie sygnału dynamicznego będzie minimalizacja funkcji celu o postaci analogicznej jak funkcja zaproponowana w 4.1.1, z tą jednak różnicą że pojawi się dodatkowe sumowanie po czasie:

$$f = \sum_t \sum_A (\varepsilon_A^M - \varepsilon_A(\mu_i, t))^2. \quad (4.16)$$

Modyfikacji ulegnie także algorytm wyznaczania gradientu funkcji celu.

#### 4.2.1. Gradient funkcji celu

W punkcie 4.1.2 przedstawiony został algorytm obliczania gradientu funkcji celu dla konstrukcji obciążonej statycznie. Analogiczne rozumowanie, prowadzące do wyznaczenia wyrażenia na pochodną funkcji celu opisanej wzorem (4.16) względem współczynnika modyfikacji sztywności, można przeprowadzić dla konstrukcji obciążonej dynamicznie.

Różniczkując wyrażenia (4.16) otrzymamy ogólne wyrażenie na gradient funkcji celu:

$$\frac{\partial f(\mu_i)}{\partial \mu_s} = -2 \sum_t \sum_A (\varepsilon_A^M(t) - \varepsilon_A(\mu_i, t)) \frac{\partial \varepsilon_A(\mu_i, t)}{\partial \mu_s}. \quad (4.17)$$

Zasadniczą część obliczeń mających na celu wyznaczenie wektora pochodnych  $\frac{\partial \mu_i}{\partial \mu_s}$  będzie stanowiło obliczenie różnicy  $(\varepsilon_A^M(t) - \varepsilon_A(\mu_i, t))$  dla danej wartości składowych wektora  $\mu_i$ , oraz obliczenie gradientu funkcji przejścia  $\frac{\partial \varepsilon_A(\mu_i, t)}{\partial \mu_s}$ :

$$\frac{\partial \varepsilon_A(\mu_i, t)}{\partial \mu_s} = \sum_k \sum_{\tau=0}^t \sum_j D_{Aj}^k(t-\tau) \frac{\partial \hat{\varepsilon}_j^k(\tau)}{\partial \mu_s}. \quad (4.18)$$

Wyrażenie na składowe gradientu dystorsji uzyskujemy różniczkując względem parametru  $\mu_s$  związki (3.18),(3.19). Wynikiem tego różniczkowania są następujące układy równań:

- dla  $t = 0$ :

$$\sum_k \sum_j \left[ \delta_{ikjk} - (1 - \mu_{ik}) D_{ij}^k(0) \right] \frac{\partial \hat{\varepsilon}_{jk}(0)}{\partial \mu_s} = -\frac{\partial \mu_{ik}}{\partial \mu_s} \varepsilon_{ik}(0), \quad (4.19)$$

- dla  $t > 0$ :

$$\begin{aligned} & \sum_k \sum_j \left[ \delta_{ikjk} - (1 - \mu_{ik}) D_{ikj}^k(0) \right] \frac{\partial \hat{\varepsilon}_{jk}(t)}{\partial \mu_s} \\ & = -\frac{\partial \mu_{ik}}{\partial \mu_s} \varepsilon_{ik}(t) + (1 - \mu_{ik}^k) \left[ \sum_k \sum_{\tau=0}^{t-1} \sum_j D_{ikj}^k(t-\tau) \frac{\partial \hat{\varepsilon}_{jk}(\tau)}{\partial \mu_s} \right], \end{aligned} \quad (4.20)$$

gdzie  $\delta_{ikjk}$  jest macierzą jednostkową o rozmiarze  $3n \times 3n$  gdzie  $n$  odpowiada liczbie sekcji warstwy kontaktowej.

Powyższe układy równań mają taką samą macierz główną. Wygodnie będzie je zapisać w postaci:

$$\sum_k \sum_j A_{ijk}^k \frac{\partial \hat{\varepsilon}_{jk}(t)}{\partial \mu_s} = B_{ik_s}, \quad (4.21)$$

gdzie

$$A_{ijk}^k = \sum_k \left[ \delta_{ijk} - (1 - \mu_{ik}) D_{ijk}^k(0) \right], \quad (4.22)$$

$$B_{ik_s}(0) = -\frac{\partial \mu_{ik}}{\partial \mu_s} \varepsilon_{ik}(t), \quad (4.23)$$

$$B_{ik_s}(t > 0) = -\frac{\partial \mu_{ik}}{\partial \mu_s} \varepsilon_{ik}(t) + (1 - \mu_{ik}) \left[ \sum_k \sum_{\tau=0}^{t-1} \sum_j D_{ijk}^k(t - \tau) \frac{\partial \hat{\varepsilon}_{jk}(\tau)}{\partial \mu_s} \right], \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \mu_{ik}}{\partial \mu_s} = \delta_{ik_s}. \quad (4.25)$$

oraz  $s = 1, \dots, 3n$ .

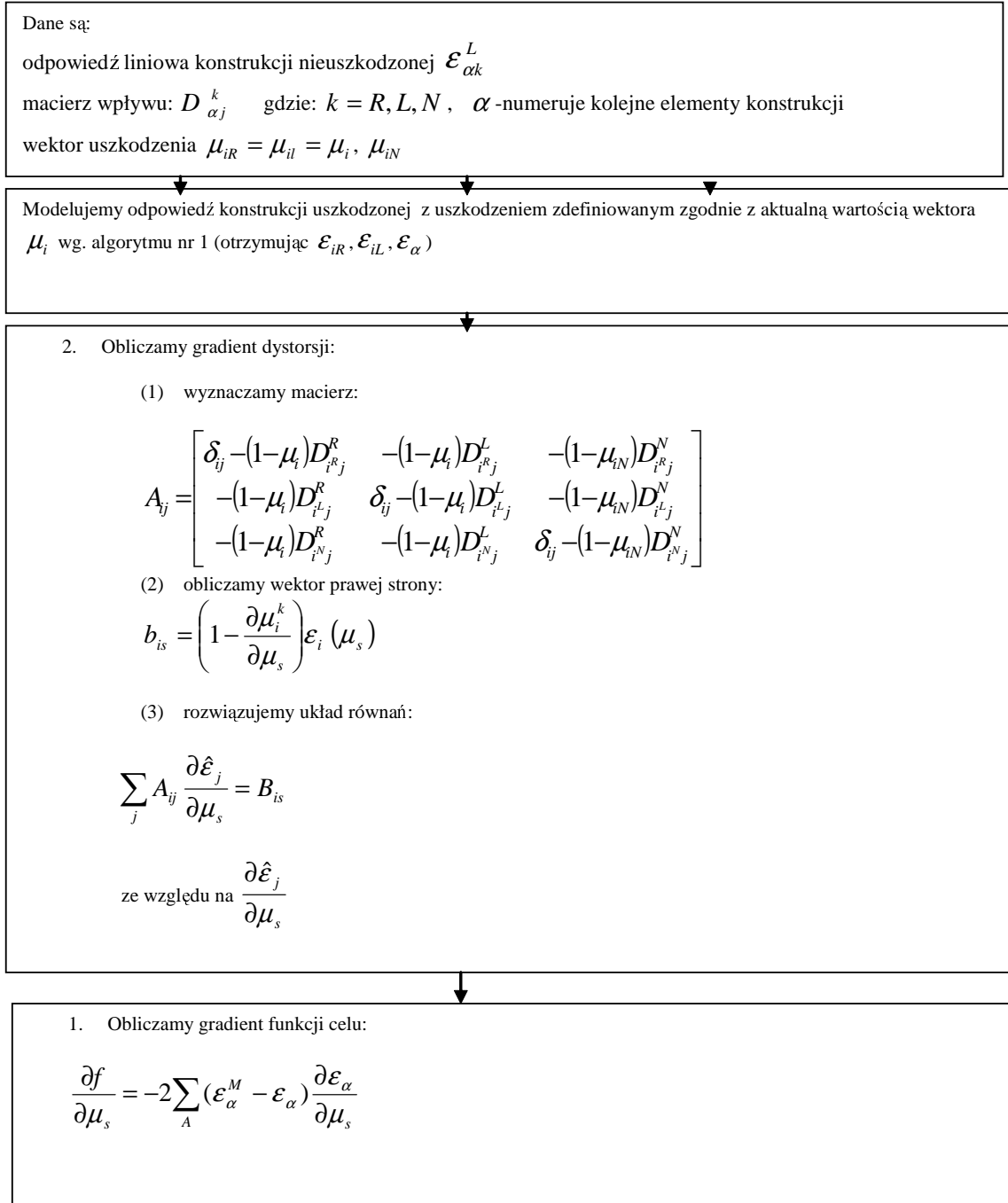
Obliczenie gradientu dystorsji dla zagadnienia dynamicznego wymaga więc iteracyjnego rozwiązania powyższego układu równań (ze względu na zmianę  $\frac{\partial \hat{\varepsilon}_{jk}(t)}{\partial \mu_s}$ ) dla wszystkich kolejnych chwil czasowych (gradient dla każdej następnej chwili czasowej zależy od wartości gradientów dla wszystkich poprzednich kroków). Dokonując sumowania zgodnego z formułą (4.18) otrzymamy wartości gradientu funkcji przejścia  $\frac{\partial \varepsilon_A(\mu_i, t)}{\partial \mu_s}$ , związane z gradientem funkcji celu zależnością (4.17).

W przypadku, w którym nie modelujemy utraty sztywności w elementach pionowych (istnieje wiele sytuacji w których efekt znikania oddziaływań pionowych w strefie delaminacji jest pomijalnie mały) ograniczyć się możemy do  $2n$  ( $k = R, L$ ) liczby układów równań dla każdej chwili czasowej i przyjąć że  $\mu_{ik}$  jest niezależne od czasu. Sytuacje w których konieczne jest uwzględnienie czasowej utraty sztywności elementów pionowych wymagają wzięcia pod uwagę faktu iż wartości współczynnika  $\mu_{iN}$  są zależne od czasu. Oznacza to że powinny one zostać zapamiętane w trakcie obliczania funkcji przejścia odpowiadającej danej wartości wektora  $\mu_{ik}$  ( $k = R, L$ ) i wykorzystane w procesie obliczania gradientu dystorsji.

Z uwagi na ową zależność  $\mu_{iN}$  od czasu informacja jaką niesie pochodna funkcji celu względem składowych wektora  $\mu_{iN}$  jest dość niejednoznaczna. Wartości składowych wektora  $\mu_{iN}$  (dla danego zestawu wartości  $\mu_{ik}$ ,  $k = R, L$ ) dla kolejnych chwil czasowych są bowiem zależne bezpośrednio od odkształceń w elementach pionowych należących do obszaru zde laminowanego. Oznacza to że po zmodyfikowaniu wartości wektorów  $\mu_{iR}$ ,  $\mu_{iL}$  (zgodnie ze składowymi  $\frac{\partial f}{\partial \mu_{iR}}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \mu_{iL}}$  funkcji celu), przyjmowanie z góry jakiegokolwiek przebiegu czasowego  $\mu_{iN}(t)$  nie ma sensu.

Dlatego w omawianej procedurze identyfikacji delaminacji jedynie składowe wektorów  $\mu_{iR}$ ,  $\mu_{iL}$  będą modyfikowane zgodnie z przyjętym algorytmem optymalizacyjnym. Wartość każdej składowej wektora  $\mu_{iN}$  dla  $t = 0$  równa będzie 1.

TABLICA 4.3. Algorytm obliczania gradientu funkcji celu dla zadania dynamicznego



#### 4.2.2. Test algorytmu identyfikacji delaminacji w dynamice

Algorytm identyfikacji delaminacji oparty na analizie różnic w odpowiedzi dynamicznej konstrukcji zdrowej oraz konstrukcji uszkodzonej poddany został testom numerycznym. Posłużono się modelem kratowo-belkowym przedstawionym na rys. 4.3. Do obliczeń wykorzystano program komputerowy VDMbop, stworzony w środowisku FORTRAN.

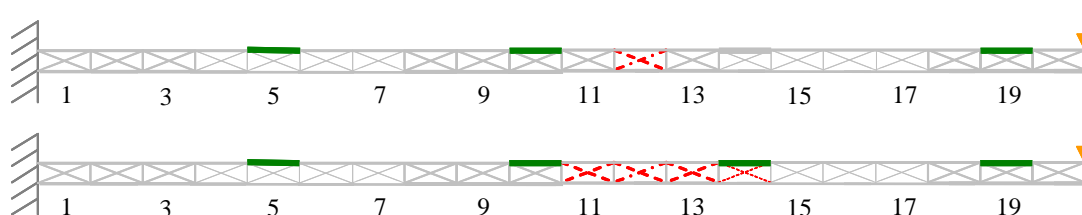
TABLICA 4.4. Dane przyjęte w zadaniu.

	belki	elementy R,L	elementy N
$E$ [N/m <sup>2</sup> ]	70e9	10e9	1e9
$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	3.3e3	1e-6	1e-6
$A$ [m <sup>2</sup> ]	5e-5	5e-5	5e-5
$J$ [m <sup>4</sup> ]	4.17e-10	-	-

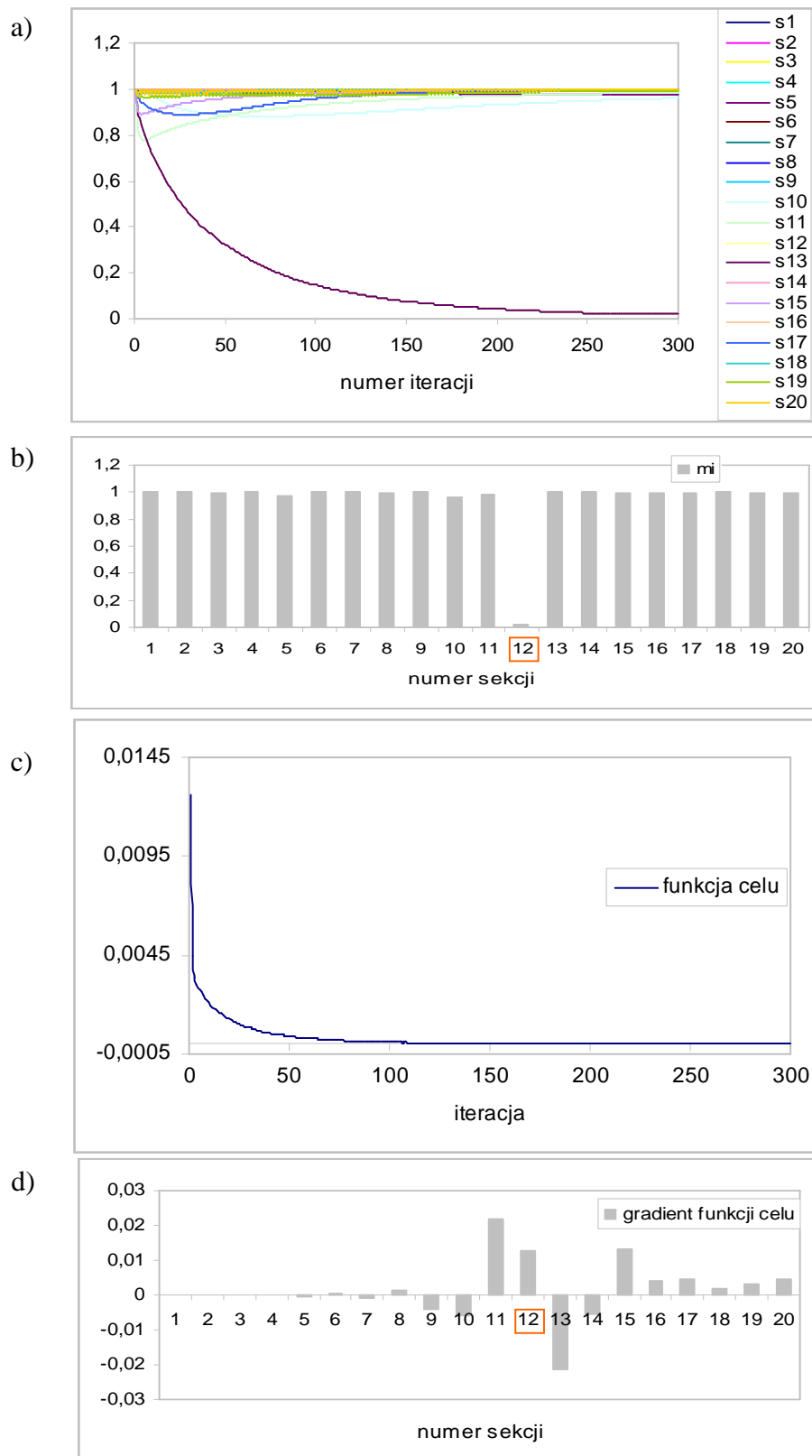
Przed przystąpieniem do obliczeń mających na celu uzyskanie danych potrzebnych do przeprowadzenia analizy odwrotnej wykonano (przy pomocy komercyjnego programu ANSYS) analizę modalną konstrukcji nieuszkodzonej. Celem tejże analizy było określenie częstości drgań własnych konstrukcji, a także określenie punktów geometrycznych odpowiadających węzłom i strzałkom dla danego modu drgań, a co za tym idzie dokonanie właściwego wyboru położenia sensorów.

Dla modelu przyjętego w zadaniu częstości drgań własnych wynosiły: 14.74 Hz, 58.88 Hz, 235.86 Hz, 434.19 Hz, 674.55 Hz.

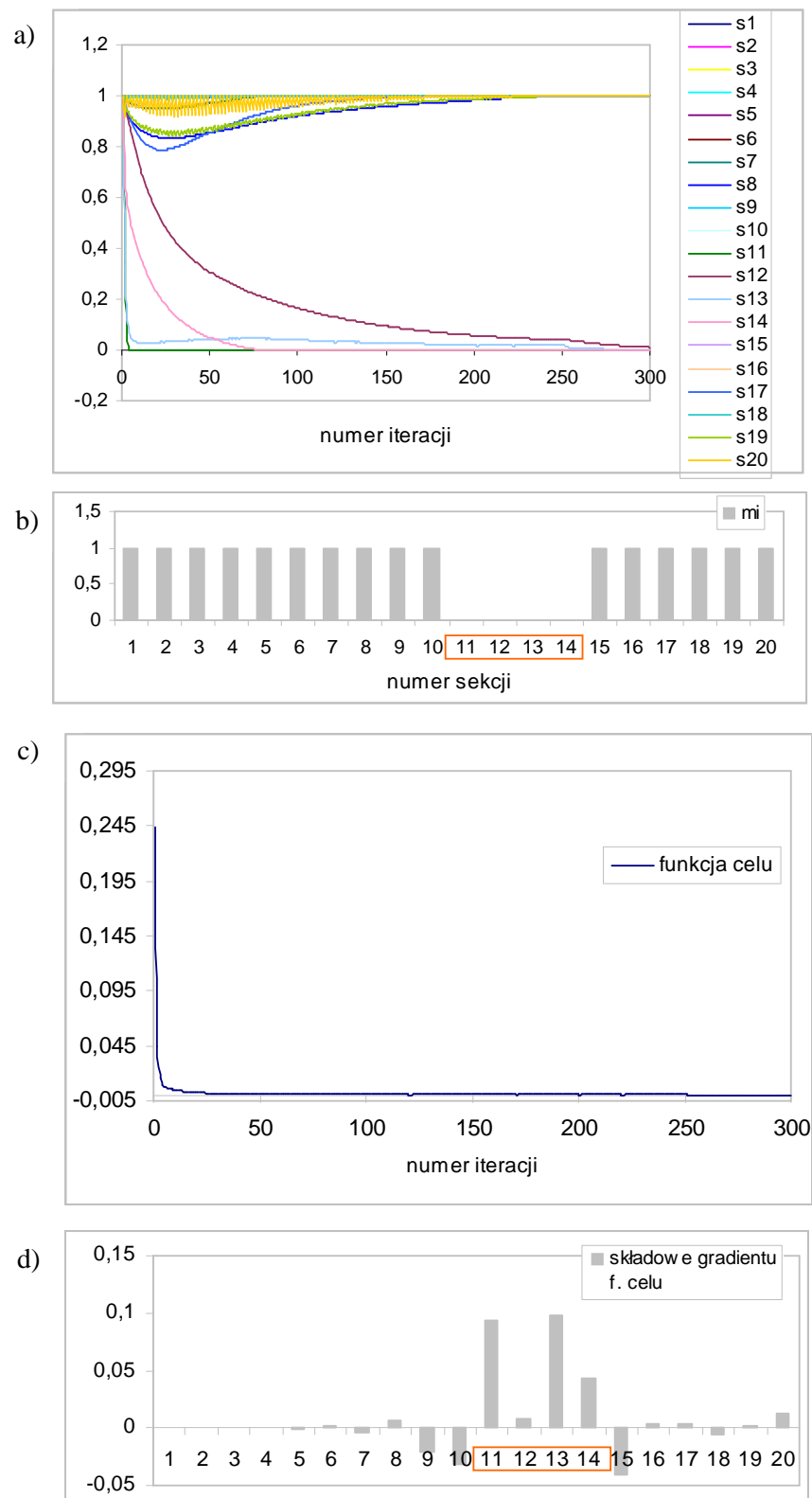
Zdecydowano się na wzbudzenie konstrukcji do drgań poprzez obciążenie jej swobodnego końca siłą skupioną  $P = A \sin \omega t$  o częstotliwości odpowiadającej czwartej częstości drgań własnych i  $A = 100N$ . Poniżej zaprezentowano wyniki identyfikacji opartej na wykorzystaniu odpowiedzi odkształceniowej rejestrowanej przez cztery sensory rozmieszczone powierzchni konstrukcji. Wynik identyfikacji okazał się prawidłowy zarówno w przypadku niewielkiego uszkodzenia przejawiającego się osłabieniem sztywności w elementach należących do sekcji 12, jak i rozległego uszkodzenia obejmującego sekcje 11, 12, 13 i 14. W obydwu przypadkach uszkodzenie zostało wykryte po około 300 iteracjach. Czas obliczeń można znacznie skrócić eliminując proces obliczania tych składowych gradientu funkcji celu które są znacznie mniejsze od pozostałych i których wartość zmniejsza się w ciągu kilku kolejnych iteracji.



Rys. 4.3. Model konstrukcji wraz z identyfikowanymi uszkodzeniami (czerwone przerywane linie) i sensorami (zielone linie).



RYS. 4.4. Wynik identyfikacji małej delaminacji zlokalizowanej w sekcji 12: (a) histogram wartości współczynnika modyfikacji sztywności dla poszczególnych sekcji strefy kontaktowej, (b) wartości współczynnika modyfikacji sztywności w ostatniej iteracji procedury optymalizacyjnej, (c) funkcja celu, (d) składowe gradientu funkcji celu w pierwszej iteracji.

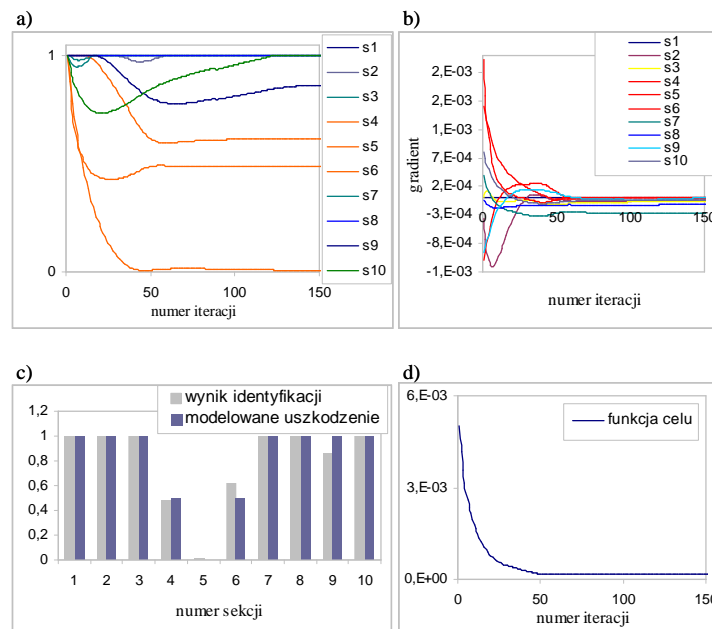


Rys. 4.5. Wynik identyfikacji delaminacji zlokalizowanej w sekcjach 11, 12, 13 i 14: (a) histogram wartości współczynnika modyfikacji sztywności dla poszczególnych sekcji strefy kontaktowej, (b) wartości współczynnika modyfikacji sztywności w ostatniej iteracji procedury identyfikacyjnej, (c) wartości funkcji celu, (d) składowe gradientu funkcji celu w pierwszej iteracji.

### 4.2.3. Weryfikacja eksperymentalna algorytmu identyfikacji

Eksperyment przeprowadzony w celu uzyskania funkcji przejścia dla odpowiednio pobudzonej do drgań belki dwuwarstwowej opisany został w rozdziale 3.6. Przedstawiono tam kompletny opis stanowiska doświadczalnego oraz przebieg wykonanych pomiarów na podstawie których zweryfikowany został ze skutkiem pozytywnym algorytm modelowania odpowiedzi konstrukcji zdelaminowanej. Zbudowany wówczas model numeryczny wykorzystano w celu zweryfikowania możliwości identyfikacji delaminacji. Wykorzystano odczyt z sensora umieszczonego na powierzchni badanej konstrukcji, a także odczyty z 2 dodatkowych sensorów otrzymane w wyniku obliczeń numerycznych na bazie zbudowanego modelu.

W wyniku optymalizacji funkcji celu otrzymano wartości współczynnika modyfikacji sztywności  $\mu_i$  dla poszczególnych sekcji bliskie wartościom przyjętym w zadaniu modelowania odpowiedzi konstrukcji z wprowadzonym uszkodzeniem omówionym w punkcie 3.6.2.



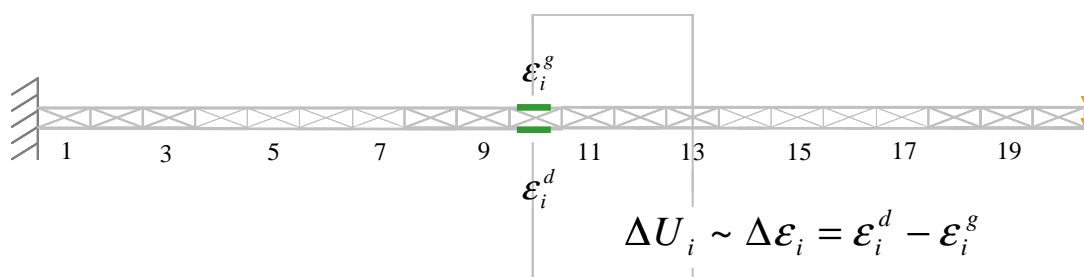
RYS. 4.6. Wynik identyfikacji opartej na odpowiedzi eksperymentalnej (a) wartości  $\mu_i$  w kolejnych iteracjach procedury optymalizacyjnej, (b) histogram składowych gradientu funkcji celu, (c) wartości współczynnika modyfikacji sztywności w ostatniej iteracji procedury identyfikacyjnej, (d) wartości funkcji celu.

## 4.3. Identyfikacja delaminacji w czasie rzeczywistym

Dwie, omówione wyżej metody identyfikacji delaminacji (statyczna i dynamiczna) są metodami, które można zastosować do inspekcji elementu konstrukcyjnego z wygenerowanym wcześniej defektem pod warunkiem znajomości odpowiedzi "zdrowego" (nieuszkodzonego) ustroju na stosowane wymuszenie. Jest to tzw. podpis (ang. „signature”) konstrukcji.

Drugą, atrakcyjną aplikacyjnie grupę metod stanowią metody pozwalające na identyfi-

kację powstającego defektu w czasie rzeczywistym. W wielu aplikacjach możliwość wykrycia uszkodzenia w czasie rzeczywistym (nawet kosztem zmniejszonej precyzji procesu identyfikacji) ma zasadnicze znaczenie ze względów bezpieczeństwa, gdyż pozwala uruchomić na czas przygotowane wcześniej procesy ochronne. Przykładem może tu być delaminacja śmigła helikoptera wykryta w czasie lotu, pozwalająca na natychmiastowe przeprowadzenie manewru awaryjnego lądowania.



RYS. 4.7. Model konstrukcji wykorzystany w obliczeniach oraz pojedyncza para sensorów.

Poniżej zamieszczone zostaną wyniki eksperymentów numerycznych na podstawie których starano się przeanalizować możliwości detekcji i identyfikacji delaminacji w czasie rzeczywistym. Do obliczeń numerycznych wykorzystano podejście dystorsyjne, symulując pojawienie się w konstrukcji delaminacji poprzez wprowadzenie w elementach należących do jej obszaru dystorsji wirtualnych. Analizowano relacje zachodzące pomiędzy hipotetycznymi sensorami umieszczonymi na górnej i dolnej powierzchni badanego wspornika (rys. 4.7). Najbardziej obiecujące wyniki uzyskano porównując różnice odkształceń dla par sensorów zlokalizowanych w obszarze kolejnych sekcji strefy kontaktowej.

#### 4.3.1. Analiza zmian odpowiedzi odkształceniowej spowodowanych powstaniem pęknięcia

Testy numeryczne mające na celu ocenę możliwości identyfikacji delaminacji w czasie rzeczywistym przeprowadzono opierając się na modelu belkowo–kratowym opisanym w punkcie 4.2.2.

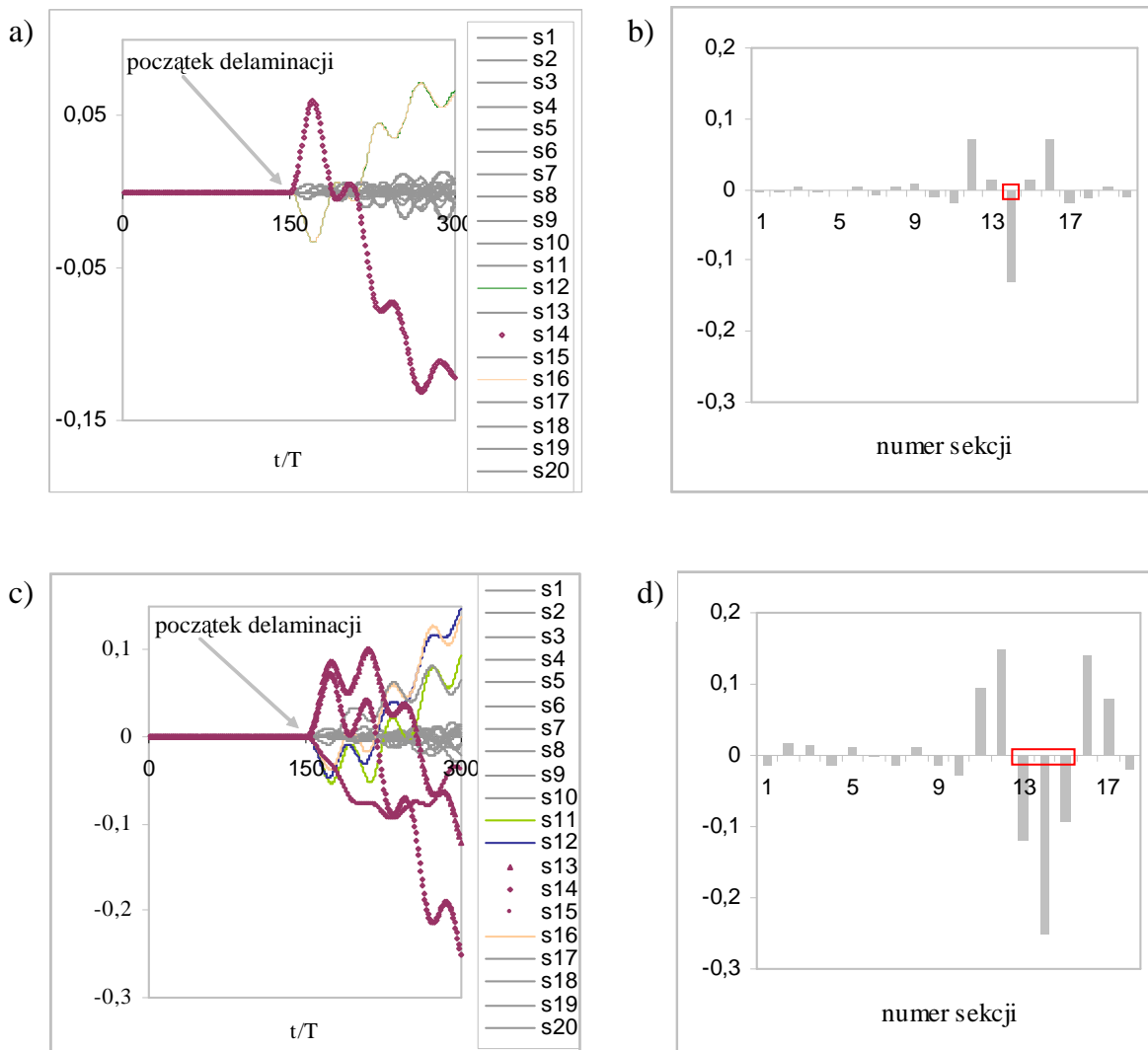
Rysunek 4.8 przedstawia rozwiązanie zadania w którym zastosowano siłę wymuszającą o postaci  $P(t) = A \sin(\omega t)$  (gdzie  $\omega$  jest częstością kołową bliską 4-tej częstości drgań własnych konstrukcji) przy czym siła ta przyłożona została w węzłach znajdujących się na swobodnym końcu belki). Analizowano dwa przypadki: wpływ pojawienia się małej delaminacji obejmującej pojedynczą sekcję strefy kontaktowej na rejestrowaną odpowiedź oraz wpływ uszkodzenia bardziej rozległego, obejmującego 3 kolejne sekcje. W obydwu przypadkach odnotowano w momencie wprowadzenia delaminacji wyraźny wzrost różnicy odkształceń zgięciowych  $\Delta \varepsilon = \varepsilon_i^d - \varepsilon_i^g$  dla par sensorów umieszczonych bezpośrednio nad obszarem uszkodzenia i w jego najbliższym otoczeniu. Rozkład amplitud sygnału mierzonego dla kolejnych sekcji (z uwzględnieniem znaku różnicy odkształceń) został przedstawiony na rys. 4.8.

W bardzo podobny sposób przejawia się wprowadzenie uszkodzenia w przypadku obciążenia konstrukcji siłą harmoniczną o częstości bliskiej trzeciej częstości drgań własnych



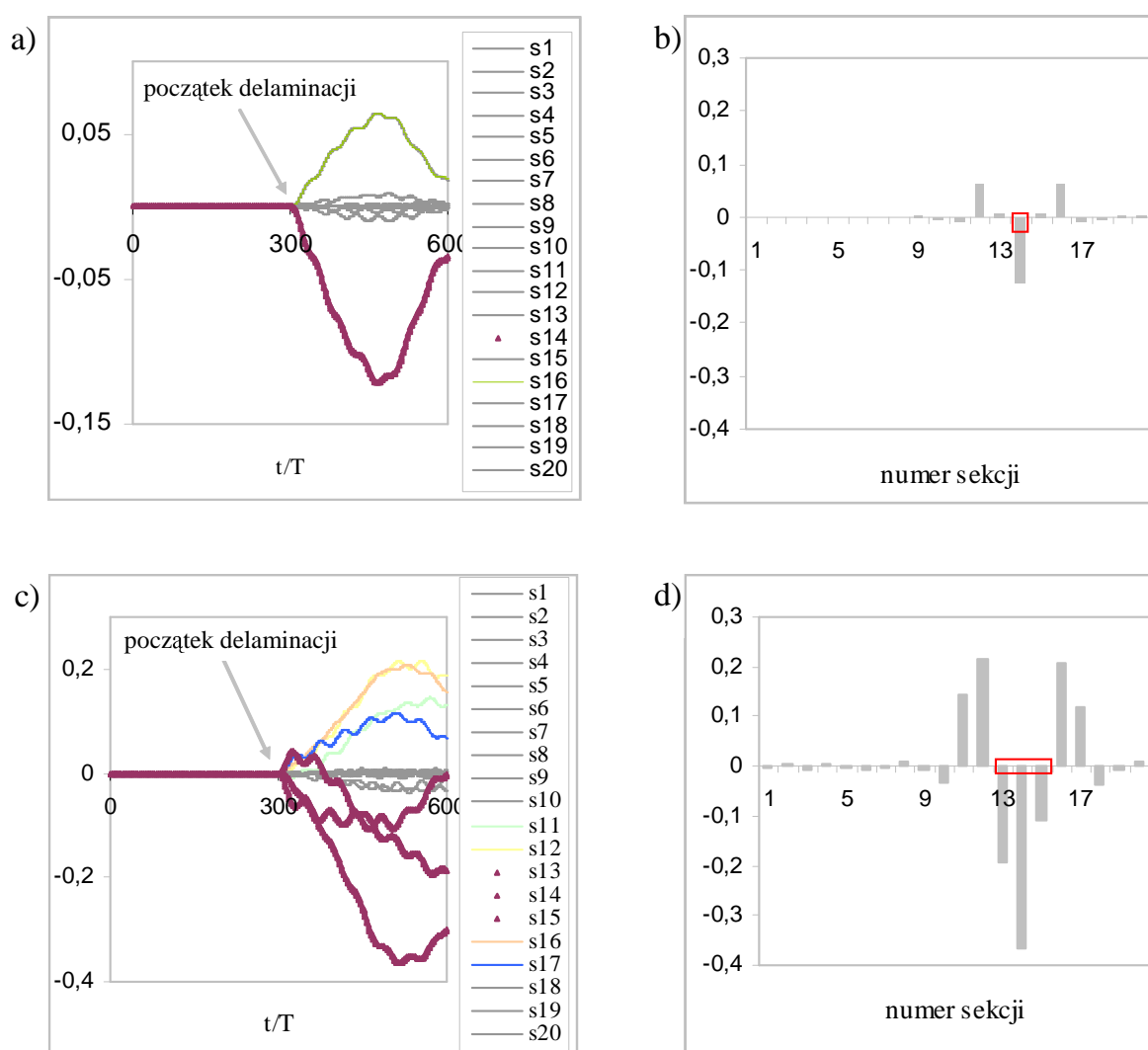
(rys. 4.9).

Dyskutowany tu przypadek obciążenia jest przypadkiem szczególnym. Różnica odkształceń zgięciowych pomiędzy elementem  $i$  warstwy dolnej i odpowiadającym mu elementem  $i$  warstwy górnej dla konstrukcji nieuszkodzonej jest równa 0. Sprawia to że zarówno samo pojawienie się delaminacji jak i jej położenie może być dość łatwo określone. W przypadku obciążeń działających niesymetrycznie względem osi obojętnej konstrukcji różnica  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_i^d - \varepsilon_i^g$  w stanie nieobecności uszkodzenia nie jest już zerowa i zależy od lokalizacji danej pary elementów względem punktu przyłożenia siły. Wyniki analizy zadania identyfikacji delaminacji dla konstrukcji obciążonej układem sił  $P_1 = A \sin \omega_1 t$  i  $P_2 = \frac{1}{2} P_1$  działających prostopadłe do osi obojętnej wspornika w węzłach należących do jej górnej warstwy (rys. 4.10).



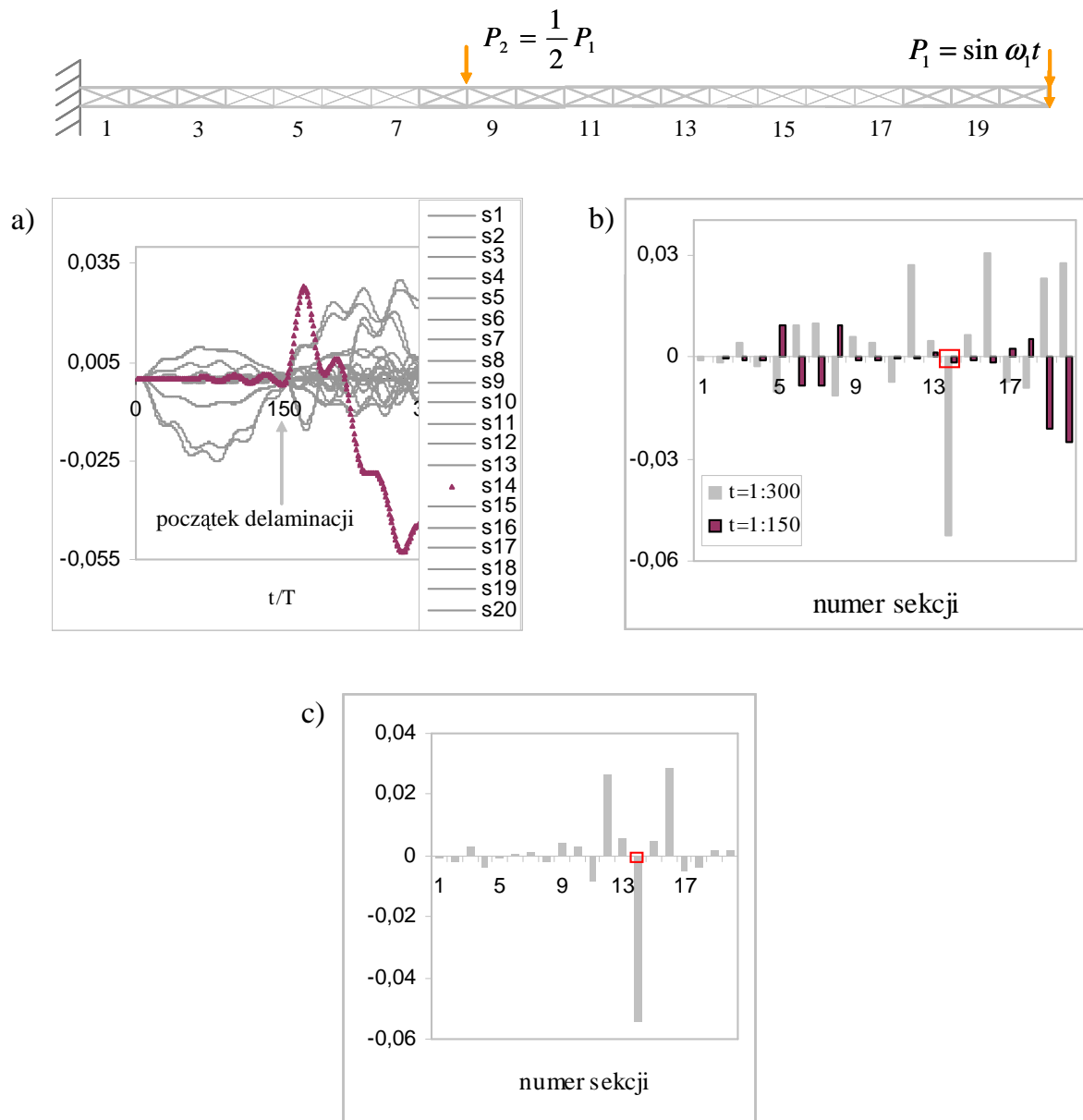
RYS. 4.8. Wyniki identyfikacji dla konstrukcji obciążonej z częstością bliską 4-tej częstości drgań własnych: (a) różnica odkształceń mierzona w poszczególnych sekcjach dla uszkodzenia wygenerowanego w sekcji 14, (b) rozkład wartości sygnałów w kolejnych sekcjach, (c) różnica odkształceń mierzona w poszczególnych sekcjach dla uszkodzenia wygenerowanego w sekcji 13, 14, 15, (d) rozkład wartości sygnałów w kolejnych sekcjach.

Pewnym problemem może się okazać identyfikacja delaminacji w przypadku działania na konstrukcję przypadkowych obciążeń o charakterze impulsowym, np. uderzeń. Wówczas sygnał  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_i^d - \varepsilon_i^g$  mierzony dla par sensorów umieszczonych w pobliżu punktu przyłożenia takiej siły wzrasta (rys. 4.11) i może być zinterpretowany przez zautomatyzowany system pomiarowy jako pojawienie się delaminacji. Przedstawione powyżej wyniki pozwalają przypuszczać że informacje o odkształceniach zgięciowych, pochodzące np. z siatki czujników piezoelektrycznych naklejonych na powierzchni belki laminowanej mogą być wykorzystane do monitorowania stanu konstrukcji poddanej działaniu obciążenia eksploatacyjnego, wykrywania momentu powstawania delaminacji oraz identyfikacji jej położenia w czasie rzeczywistym. System monitorowania oparty na pomiarze różnic odkształceń rejestrowanych

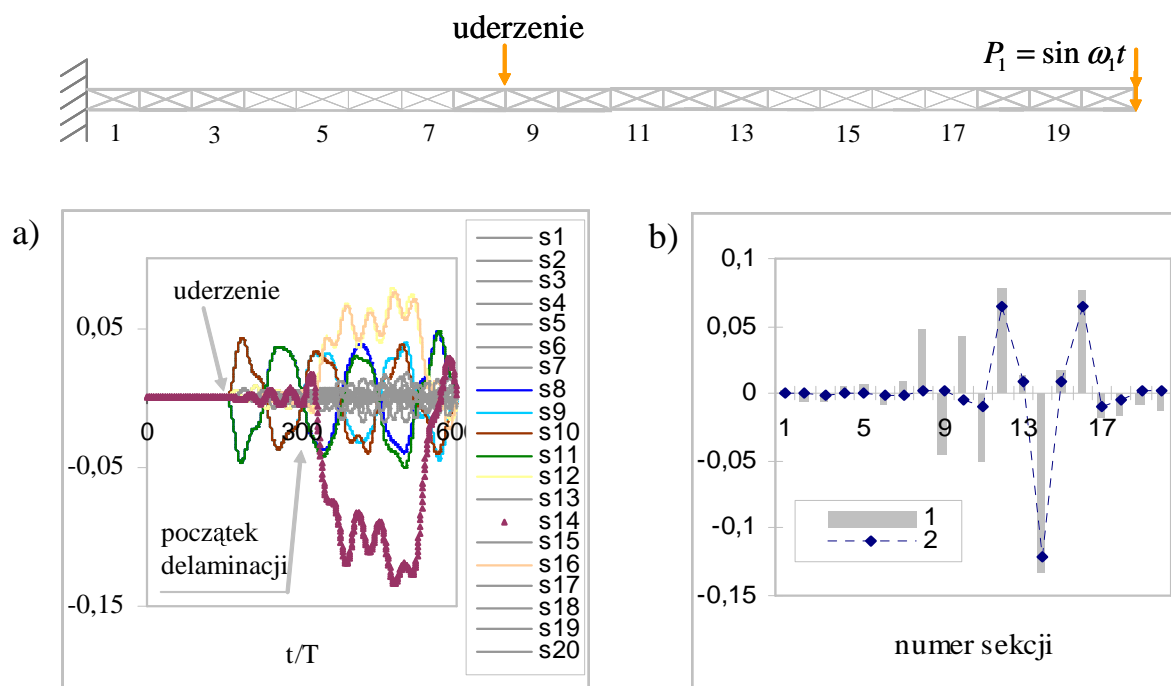


RYS. 4.9. Wyniki identyfikacji dla konstrukcji obciążonej z częstością bliską trzeciej częstości drgań własnych: (a) różnica odkształceń mierzona w poszczególnych sekcjach dla uszkodzenia wygenerowanego w sekcji 14, (b) rozkład wartości sygnałów w kolejnych sekcjach, (c) różnica odkształceń mierzona w poszczególnych sekcjach dla uszkodzenia wygenerowanego w sekcji 13, 14 i 15, (d) rozkład wartości sygnałów w kolejnych sekcjach.

przez usytuowane symetrycznie względem osi obojętnej sensory powinny być wyposażony w zdolność identyfikacji nagłego wzrostu amplitudy sygnału oraz zdefiniowania i porównania zmian napięcia mierzonego przez poszczególne kanały.



Rys. 4.10. Wyniki identyfikacji dla konstrukcji obciążonej niesymetrycznie: (a) różnica odkształceń mierzona w poszczególnych sekcjach dla uszkodzenia wygenerowanego w sekcji 14, (b) rozkład wartości sygnałów w kolejnych sekcjach dla przedziału czasowego po powstaniu delaminacji, (c) rozkład wartości sygnałów w kolejnych sekcjach dla okresu przed powstaniem delaminacji, (d) rozkład wartości sygnałów w kolejnych sekcjach dla okresu po powstaniu delaminacji uwzględniający sygnały rejestrowane w nieobecności delaminacji.



RYS. 4.11. Wyniki identyfikacji dla konstrukcji obciążonej symetrycznie z pojawiającym się w kroku 170 impulsem siły: (a) różnica odkształceń mierzona w poszczególnych sekcjach dla uszkodzenia wygenerowanego w sekcji 14, (b) rozkład wartości sygnałów w kolejnych sekcjach – linia niebieska przedstawia zależność wartości sygnału dla poszczególnych par czujników w nieobecności obciążenia impulsowego.

---

## Pół-aktywne tłumienie drgań w konstrukcji dwuwarstwowej

---

Metody tłumienia drgań możemy podzielić na trzy grupy: metody aktywne, pasywne i pół-aktywne. Istotą metod aktywnych jest sterowanie obciążeniem konstrukcji, stąd wymagana jest tu generacja dużych sił, co wiąże się zazwyczaj z koniecznością dostarczenia do układu dużej porcji energii. Metody kontroli pasywnej (bardzo popularne ze względu na swą prostotę) obejmują wszystkie techniki w których nie występuje konieczność aktywnego oddziaływania w czasie rzeczywistym na układ drgający. Przykładem metody pasywnej jest zmiana sztywności konstrukcji lub jej masy w celu przesunięcia jej częstotliwości rezonansowej, bądź też szeroko wykorzystywane w przemyśle motoryzacyjnym, wprowadzanie specjalnych materiałów o właściwościach silnie tłumiących.

Ostatnia grupa metod to metody pół-aktywne, polegające na aktywnej kontroli zmian własności tłumiących elementów pasywnych. Do grupy tej zaliczane są m.in. techniki oparte na łatwo sterowalnych cieczach elektro-reologicznych i magneto-reologicznych lub też innych materiałów inteligentnych (takich jak np. piezoelektryki, materiały z pamięcią kształtu).

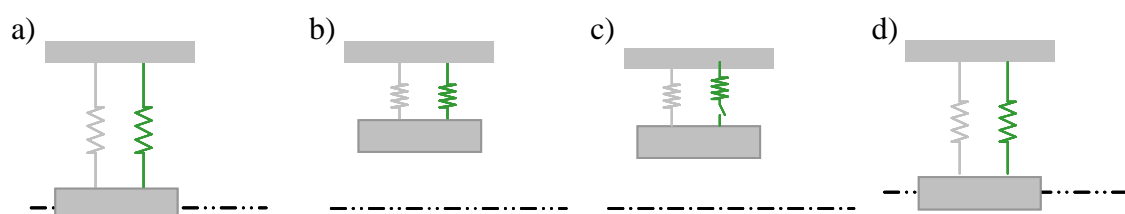
Technika PAR (z ang. *Prestress – Accumulation Release*) mieści się w tej klasyfikacji w grupie trzeciej, tj. metod pół-aktywnych, które w ostatnich latach cieszą się szczególnie dużą popularnością spowodowaną ich wysoką skutecznością osiąganą przy wykorzystaniu relatywnie niewielkich energii (. Ponadto, pół-aktywne techniki tłumienia drgań cechuje dość duża elastyczność (w przeciwieństwie do metod pasywnych, które przeznaczone są do tłumienia drgań o określonych częstotliwościach), mogą one zatem łatwo dostosowywać się do zmian warunków operacyjnych. Ważną cechą pół-aktywnego dyssypatywnego tłumienia drgań jest

także istotne zmniejszenie zagrożenia wzbudzenia niepożądanych drgań poprzez niewłaściwie sterowane aktywatory.

Wymienione powyżej zalety metod pół-aktywnych oraz fakt iż na modelu belki wspornikowej bazuje wiele urządzeń wykorzystywanych w przemyśle lotniczym, motoryzacyjnym czy energetycznym stanowią motywację do podjęcia badań dotyczących możliwości pół-aktywnego tłumienia drgań takiej konstrukcji. W tym rozdziale zaprezentowana zostanie propozycja tłumienia drgań w belce wspornikowej oparta na wspomnianej powyżej strategii PAR, której podstawę stanowi kontrolowane akumulowanie i uwalnianie energii, realizowane przy pomocy nakładania na wybrane fragmenty konstrukcji więzów kinematycznych. Rozważania ograniczone zostaną do zaprezentowania ogólnej koncepcji oraz sposobu (bazującego na metodzie VDM) symulacji zjawiska. Przekonywująca weryfikacja eksperymentalna napotyka na trudności związane z realizacją efektywnego, szybko sterowalnego zespolenia/rozwarstwienia warstw belki drgającej. Przedstawioną w rozdziale 5.6 propozycję należy traktować jako rozwiązanie wstępne, które będzie tematem dalszych badań.

### 5.1. Strategia PAR dla układu dwóch sprężyn z masą

Ideę metody PAR łatwo jest wytłumaczyć na przykładzie prostej konstrukcji dwuelementowej jaką stanowi układ dwu połączonych równolegle sprężyn obciążonych masą (rys. 5.1).



RYS. 5.1. Kolejne fazy ruchu układu dwóch sprężyn z masą: (a) układ w położeniu równowagi, (b) przemieszczenie masy wywołane uderzeniem, (c) uwolnienie sprężyny aktywnej w momencie maksymalnego wychylenia masy, (d) powrót do położenia równowagi (przesuniętego względem położenia początkowego).

W celu uproszczenia rozważań założymy że obie sprężyny są nieważkie, mają jednakową długość  $l$  i taki sam moduł Younga  $E$ , oraz pola przekrojów poprzecznych  $A$ .

Masę wychylamy w kierunku  $y$  nadając jej dodatnie przemieszczenie (rys. 5.1). Warunki początkowe przyjmują postać:

$$x(t=0) = \varepsilon^m, \quad (5.1)$$

$$\dot{x}(t=0) = 0. \quad (5.2)$$

Zakładamy ruch bez tłumienia. Wówczas równanie ruchu dla omawianej konstrukcji możemy zapisać w następującej formie:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad (5.3)$$

gdzie  $m$  i  $k$  są odpowiednio macierzami mas i sztywności. Rozwiązanie takiego równania przyjmuje postać:

$$x(t, C_1, C_2) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t), \quad (5.4)$$

$$\dot{x}(t, C_1, C_2) = -C_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + C_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t), \quad (5.5)$$

$$\ddot{x}(t, C_1, C_2) = -C_1 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) + C_2 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t), \quad (5.6)$$

gdzie  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Podstawienie warunków początkowych do równań (5.4-5.6) pozwala na wyznaczenie stałych  $C_1, C_2$  w postaci:

$$C_1 = \varepsilon^m, \quad C_2 = 0, \quad (5.7)$$

co po podstawieniu do (5.4) daje:

$$x(t) = \varepsilon^m \cos(\omega_0 t) \quad (5.8)$$

Założmy że w chwili  $t = t^1$  kiedy masa znajduje się w stanie maksymalnego wychylenia, tj.  $x(t^1) = \varepsilon^0$  skracamy jedną ze sprężyn tak że jej długość wynosi teraz  $l_1(t^1) = l - \varepsilon^0$  (może to być zrealizowane poprzez chwilowe rozłączenie elementu aktywnego z układem sprężyna-masa).

Siła oddziaływania skróconej sprężyny na układ będzie teraz zależna od  $x(t) - \varepsilon^0$ , nie zaś od samego wychylenia  $x(t)$ . Równanie ruchu dla układu przyjmie zatem postać:

$$m\ddot{x}(t) + k(x(t) - \frac{\varepsilon^0}{2}) = 0, \quad (5.9)$$

co możemy zapisać jako:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = k\frac{\varepsilon^0}{2}, \quad (5.10)$$

a wprowadzając:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  otrzymujemy:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{k\varepsilon^0}{m}. \quad (5.11)$$

Jest to równanie różniczkowe niejednorodne rzędu drugiego o stałych współczynnikach. Rozwiązanie takiego równania jest sumą rozwiązania ogólnego:

$$x_1(t, C_1, C_2) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \quad (5.12)$$

oraz całki szczególnej:

$$x_2(t) = \frac{\varepsilon^0}{2}. \quad (5.13)$$

Ostateczne rozwiązanie otrzymujemy w postaci:

$$x(t, C_1, C_2) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{\varepsilon^0}{2}. \quad (5.14)$$

Warunki początkowe dla równania (5.14):

$$x(t = t^1) = \varepsilon^m, \quad (5.15)$$

$$\dot{x}(t = t^1) = 0, \quad (5.16)$$

$$\ddot{x}(t = t^1) = -\frac{k\varepsilon^0}{m}, \quad (5.17)$$

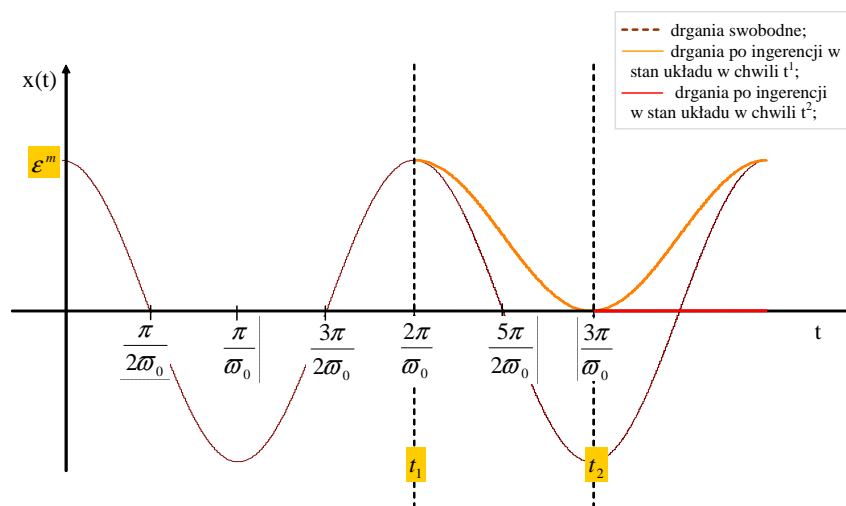
umożliwiają wyznaczenie wartości stałych  $C_1, C_2$ :

$$C_1 = \left(\varepsilon^m - \frac{\varepsilon^0}{2}\right), \quad C_2 = 0, \quad (5.18)$$

co pozwala zapisać równanie (5.14) w postaci:

$$x(t) = \left(\varepsilon^m - \frac{\varepsilon^0}{2}\right) \cos(\omega_0 t) + \frac{\varepsilon^0}{2} \quad \text{gdzie} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}. \quad (5.19)$$

Równanie (5.14) pokazuje, że zmiana w chwili  $t^1$  długości jednej ze sprężyn jest równoważna z wprowadzeniem do układu dodatkowej, stałej siły. Wprowadzenie w odpowiednich chwilach czasowych kolejnych modyfikacji długości (sztywności) elementu aktywnego (bądź też przywrócenie początkowej długości sprężyny w przypadku jednoczesnego zerowania się przemieszczenia  $x$  masy  $m$  oraz  $\dot{x}$  i  $\ddot{x}$ ) prowadziło będzie do całkowitego wytłumienia drgań konstrukcji. Można pokazać że najlepszy efekt uzyskamy przyjmując  $\varepsilon^0 = \varepsilon^m$ . Równanie (5.19) opisujące efekt wprowadzenia modyfikacji w prostej konstrukcji dwuelementowej może być w analogiczny sposób wyprowadzone dla układów o większej liczbie stopni swobody.



RYS. 5.2. Zależność położenia masy od czasu dla układu sprężyny-masa.

W chwili  $t = t_2$  wprowadzmy korektę  $\varepsilon^0$ :

$$x(t, C_1, C_2) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\varepsilon^0}{2}\right), \quad (5.20)$$



z warunkami początkowymi:

$$x(t_2) = 0, \quad (5.21)$$

$$\dot{x}(t_2) = 0. \quad (5.22)$$

Podstawiając (5.22) do (5.20) i przyjmując  $\varepsilon^0 = 0$  uzyskujemy:

$$x(t > t_2) = 0. \quad (5.23)$$

## 5.2. Przykład numeryczny weryfikujący efektywność PAR w układzie dwóch sprężyn z masą

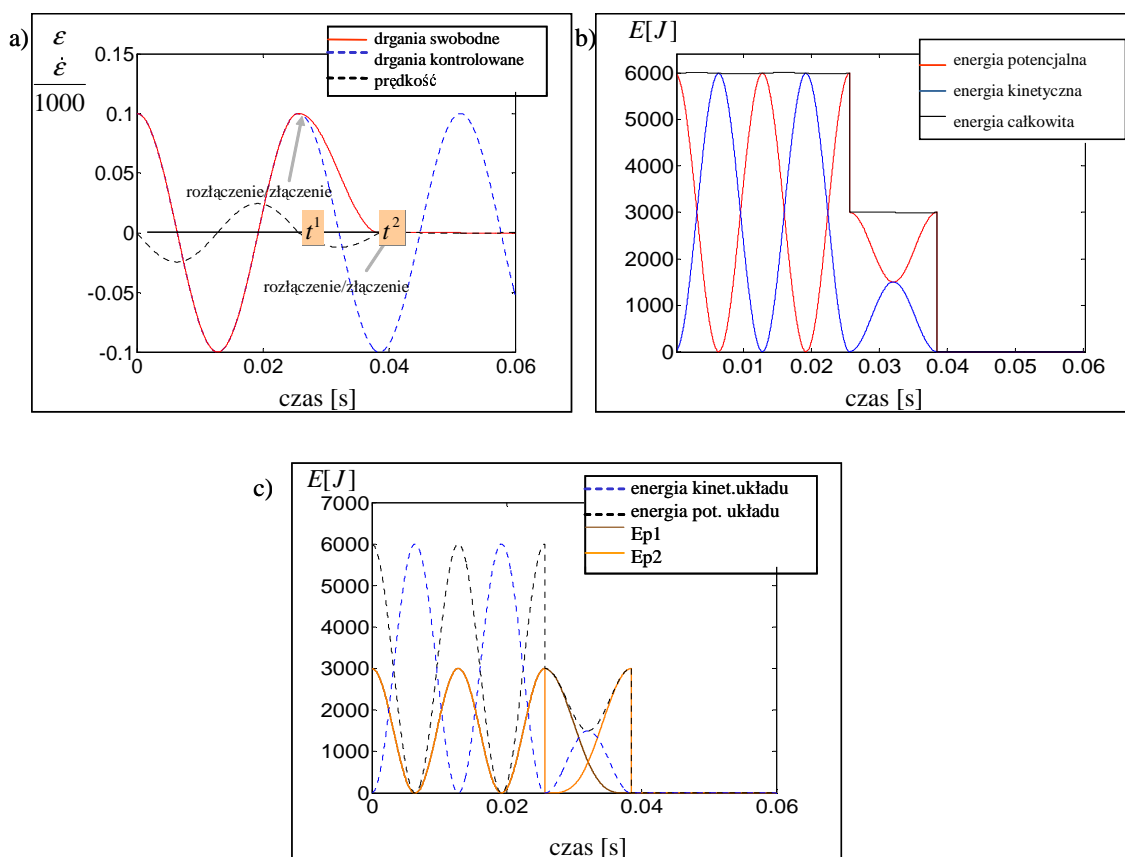
Poniżej przedstawione zostaną rezultaty obliczeń numerycznych których celem było wykazanie efektywności strategii PAR w przypadku opisanego w punkcie 5.1 układu sprężyn obciążonych masą (rys. 5.3). Dla elementów prętowych modelujących sprężyny przyjęto: długość  $L = 1\text{ m}$ , moduł Younga  $E = 60 \cdot 10^9\text{ Pa}$ , przekrój poprzeczny  $A = 10^{-5}\text{ m}^2$ . Sprężyny obciążono masą  $m = 20\text{ kg}$ . Przemieszczenie wprowadzone w zadaniu jako warunek początkowy wynosiło  $x(t = 0) = 0.1\text{ m}$ . Odkształcenia generowane w elementach sprężystych w omawianym przypadku są równoważne przemieszczeniom ( $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{x}{L} = x$ ).

Przeprowadzone obliczenia wykazały że w przypadku konstrukcji dwuelementowej (złożonej z dwu elementów sprężystych) zastosowanie strategii PAR pozwala na całkowite wytłumienie drgań już po dwukrotnym, chwilowym rozłączeniu jednego z elementów. Zależność przemieszczeń  $x$  masy  $m$  od czasu dla konstrukcji drgającej swobodnie i konstrukcji sterowanej oraz bilans energii przedstawia rys. 5.3a. Modyfikacja własności jednego z elementów w chwili  $t^1$  (równoważna wprowadzeniu do układu dystorsji  $\hat{\varepsilon}$  o wartości równej deformacji tego elementu) prowadzi do natychmiastowego spadku energii potencjalnej układu, czego konsekwencją jest spadek energii kinetycznej układu w następnej fazie ruchu (rys. 5.3b).

Na (rys. 5.3c) pokazano bilans energii kinetycznej (linia niebieska) oraz energii potencjalnej akumulowanej, rozłącznie, w elementach sprężystych 1 i 2. Widać, że w przedziale czasowym  $\langle t_1, t_2 \rangle$  ruch układu napędzany jest poprzez energię potencjalną zmagazynowaną w elemencie 1 (linia  $E_{p1}$ ), przemienianą w energię kinetyczną masy oraz energię deformacji akumulowaną w elemencie 2 (linia  $E_{p2}$ ). Stan elementu tego spełnia warunek:

$$(\varepsilon - \hat{\varepsilon})\dot{\varepsilon} \geq 0, \quad (5.24)$$

co oznacza, że gromadzi on energię sprężystą układu (hamując jego ruch), która jest następnie wyzwalana w chwili czasowej  $t = t^2$ . Jeśli w strategii sterowania PAR zadamy o to, aby warunek powyższy był spełniony lokalnie dla wszystkich elementów aktywnych, zabezpieczymy się przed wzbudzeniem niekontrolowanych odpowiedzi dynamicznych. Eliminując zabieg generowania dystorsji w procesie PAR uzyskujemy klasyczny opis oscylatora z naprzemiennymi fazami zamiany energii kinetycznej w potencjalną ( $\varepsilon\dot{\varepsilon} > 0$ ) oraz energii potencjalnej w kinetyczną ( $\varepsilon\dot{\varepsilon} < 0$ ). Urealniając powyższy przykład poprzez uwzględnienie mas



Rys. 5.3. Rezultat zastosowania PAR w układzie sprężyny – masa: (a) porównanie drgań swobodnych i tłumionych, (b) bilans energii.

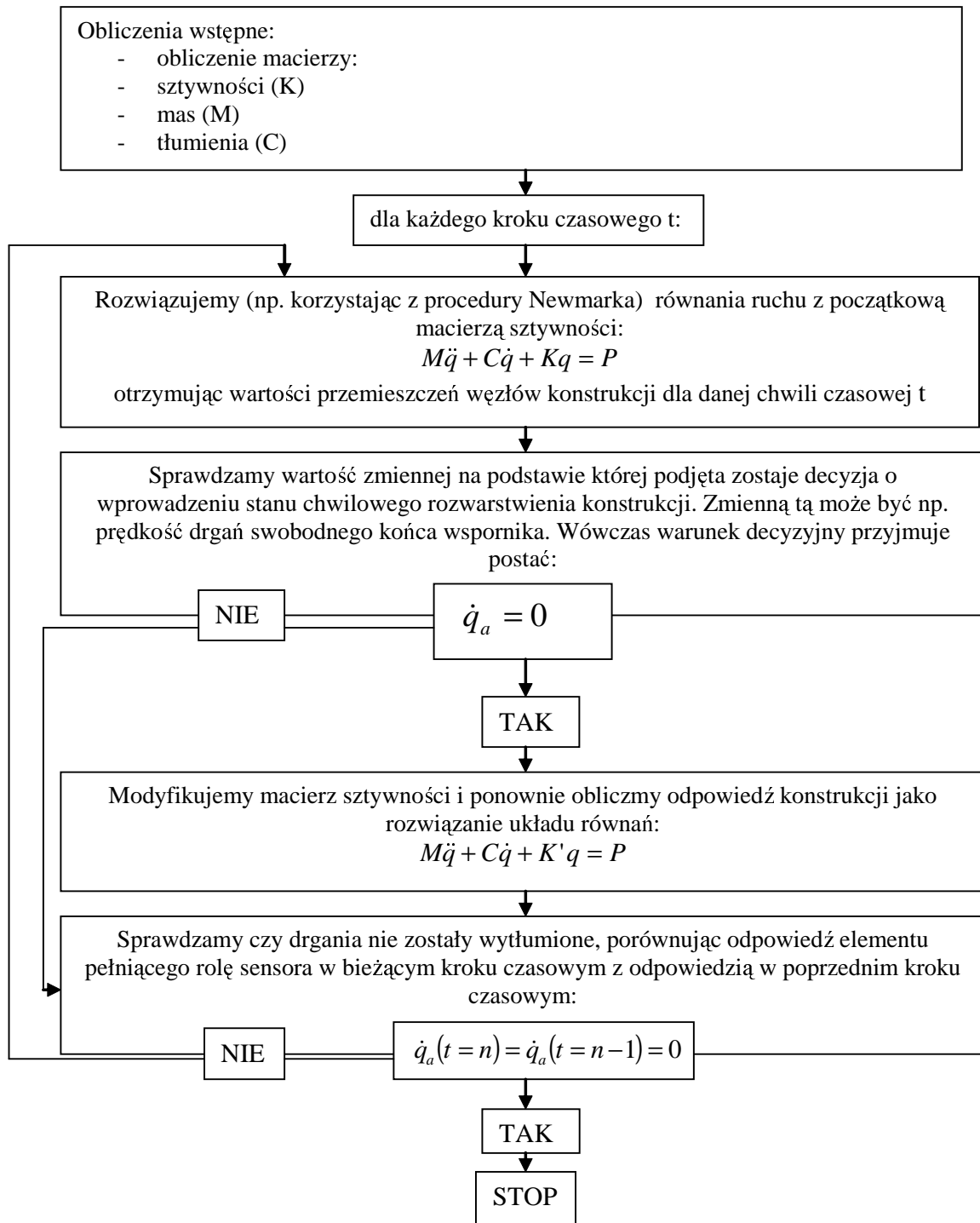
sprężyn, bilans energetyczny pokazany na Rys.5.3 zostanie zakłócony (w sąsiedztwie chwil czasowych  $t^1$  i  $t^2$ ) poprzez wygenerowanie dodatkowych składowych drgań układu o wyższej częstotliwości od  $\omega_0$  i o mniejszych amplitudach niż  $\varepsilon$ . Zakładamy, że składowe te zostaną szybko wytłumione (tłumienie materiałowe) nie zmniejszając w istotny sposób efektywności zamierzonej strategii PAR, co sprawdzimy posługując się modelowaniem numerycznym oraz eksperymentem. Skuteczność proponowanego zabiegu sprowadzi się do wytłumiania wybranej, niskiej formy drgań własnych układu, przenosząc porcje energii mechanicznej do wyższych form drgań (nie opisywanych naszym modelem), w chwilach czasowych aktywacji elementów sterowalnych.

W następnym paragrafie zostanie pokazane, że odpowiednie sterowanie delaminacją wzdłuż powierzchni kontaktowej dwuwarstwowej belki wspornikowej pozwala akumulować i rozładowywać na tyle duże porcje energii sprężystej, żeby proces tłumienia był bardzo efektywny.

### 5.3. Realizacja strategii PAR w belce dwuwarstwowej

Omówiona na przykładzie układu sprężyny-masa strategia PAR może być także wykorzystana w układzie belki dwuwarstwowej wyposażonej w urządzenia pozwalające na kon-

TABLICA 5.1. Algorytm PAR w ujęciu MES

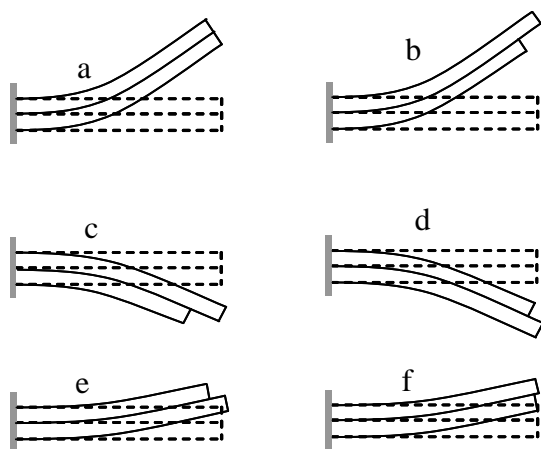


trolowaną zmianę stanu konstrukcji w zakresie obejmującym pełne zespolenie belek jak i ich pełne rozwarstwienie. Posługujemy się identyczną strategią oddziaływania na układ jak omówiona w 5.1, co oznacza iż w momencie maksymalnego wychylenia belki z położenia równowagi (maksymalne odkształcenia konstrukcji) na bardzo krótki moment czasu ulegnie ona rozwarstwieniu, wskutek tego pewne fragmenty powierzchni „dolnej” belki (dotąd stykające się z odpowiadającymi jej elementami drugiej z belek) przemieszczą się względem „górnej” belki (rys. 5.4b). Natychmiastowe zablokowanie możliwości ruchu względem siebie tychże powierzchni poprzez zespolenie belek, doprowadzi do „zamrożenia” naprężeń związanych z akumulowaną w ten sposób energią. Prowadzi to do znacznego spadku energii potencjalnej układu.

Zmagazynowana w układzie energia jest uwalniana w momencie w którym konstrukcja kolejny raz osiąga maksymalne wychylenie, podobnie jak to miało miejsce w trakcie pierwszej ingerencji w układ, następuje natychmiastowe zespolenie belek i magazynowana jest nowa porcja energii (rys. 5.4d). Czynność tę należy powtarzać aż do całkowitego wytłumienia drgań układu.

Obliczenia numeryczne umożliwiające ocenę efektywności metody PAR mogą zostać wykonane na bazie Metody Elementów Skończonych. Odpowiedni algorytm zaprezentowany został w tab. 5.1.

Alternatywnym rozwiązaniem jest skorzystanie z podejścia dystorsyjnego. Algorytm modelowania tłumienia wywołanego w konstrukcji wskutek wprowadzenia w niej modyfikacji określonych powyżej bazujący na MIDW zostanie zaprezentowany w dalszej części rozdziału. Przez rozwarstwienie (delaminację) będziemy rozumieli w tym rozdziale zerwanie więzów przenoszących naprężenia styczne pomiędzy warstwami, przy jednoczesnym zachowaniu dwustronnych więzów normalnych do powierzchni kontaktowej.



RYS. 5.4. Kolejne fazy ruchu belki dwuwarstwowej ze sterowaną delaminacją.

### 5.4. Strategia PAR w sformułowaniu MIDW

Zgodnie z ideą metody dystorsji wirtualnych wpływ modyfikacji sztywności określonego elementu konstrukcji na jej odpowiedź statyczną bądź dynamiczną może być opisany przez iloczyn odpowiednich elementów macierzy wpływu tej konstrukcji oraz wektora dystorsji wirtualnych. Zaproponowane w rozdziale III algorytmy modelowania delaminacji umożliwiają obliczenie odpowiedzi na zadane obciążenie statyczne lub dynamiczne dwuwarstwowej konstrukcji zdelaminowanej, zgodnie z przyjętym założeniem że delaminacja może być traktowana jako osłabienie sztywności elementów należących do tzw. strefy kontaktu w proponowanym modelu. Podejście dystorsyjne może zostać również wykorzystane do symulowania omawianej w bieżącym rozdziale strategii kontrolowania drgań metodą PAR.

Rozważmy sytuację opisaną w punkcie 5.3, tj. sterowanie pełną delaminacją. Odształcenia elementu pełniącego rolę sensora do chwili  $t^1$  określającej moment pierwszej ingerencji w stan układu będą równe odpowiedzi liniowej konstrukcji  $\varepsilon_a^L$ . W chwili  $t^1$ , nastąpi chwilowe rozwarstwienie wspornika a następnie zablokowanie możliwości przemieszczania się względem siebie wewnętrznych powierzchni belek. Stan ten będzie w podejściu dystorsyjnym opisywać następujące wyrażenie:

$$\varepsilon_i(t > t^1) = \varepsilon_i^L(t) + \sum_{k=R,L} \sum_{\tau=0}^t \sum_j D_{ikj}^k(t + t^1 - \tau) \hat{\varepsilon}_{jk}(\tau) \quad (5.25)$$

gdzie  $\hat{\varepsilon}_j^k$  jest stałe i równe odształceniom odpowiednich elementów warstwy kontaktowej w chwili  $t^1$ .

Wprowadzone w chwili  $t^1$  dystorsje wirtualne muszą zostać usunięte w chwili  $t^2$  spełniającej warunek określający moment ponownej ingerencji w stan układu. Fakt ten zostanie uwzględniony poprzez wprowadzenie do równania (5.25) dodatkowego członu:

$$\varepsilon_i(t > t^2) = \varepsilon_i^L(t) + \sum_k \sum_{\tau=0}^t \sum_j D_{ikj}^k(t + t^1 - \tau) \hat{\varepsilon}_{jk}(\tau) - \sum_k \sum_{\tau=0}^t \sum_j D_{ikj}^k(t + t^2 - \tau) \hat{\varepsilon}_{jk}(\tau) \quad (5.26)$$

gdzie  $\hat{\varepsilon}_{jk}$  jest stałe i równe  $\varepsilon_{jk}(t = t^1)$ .

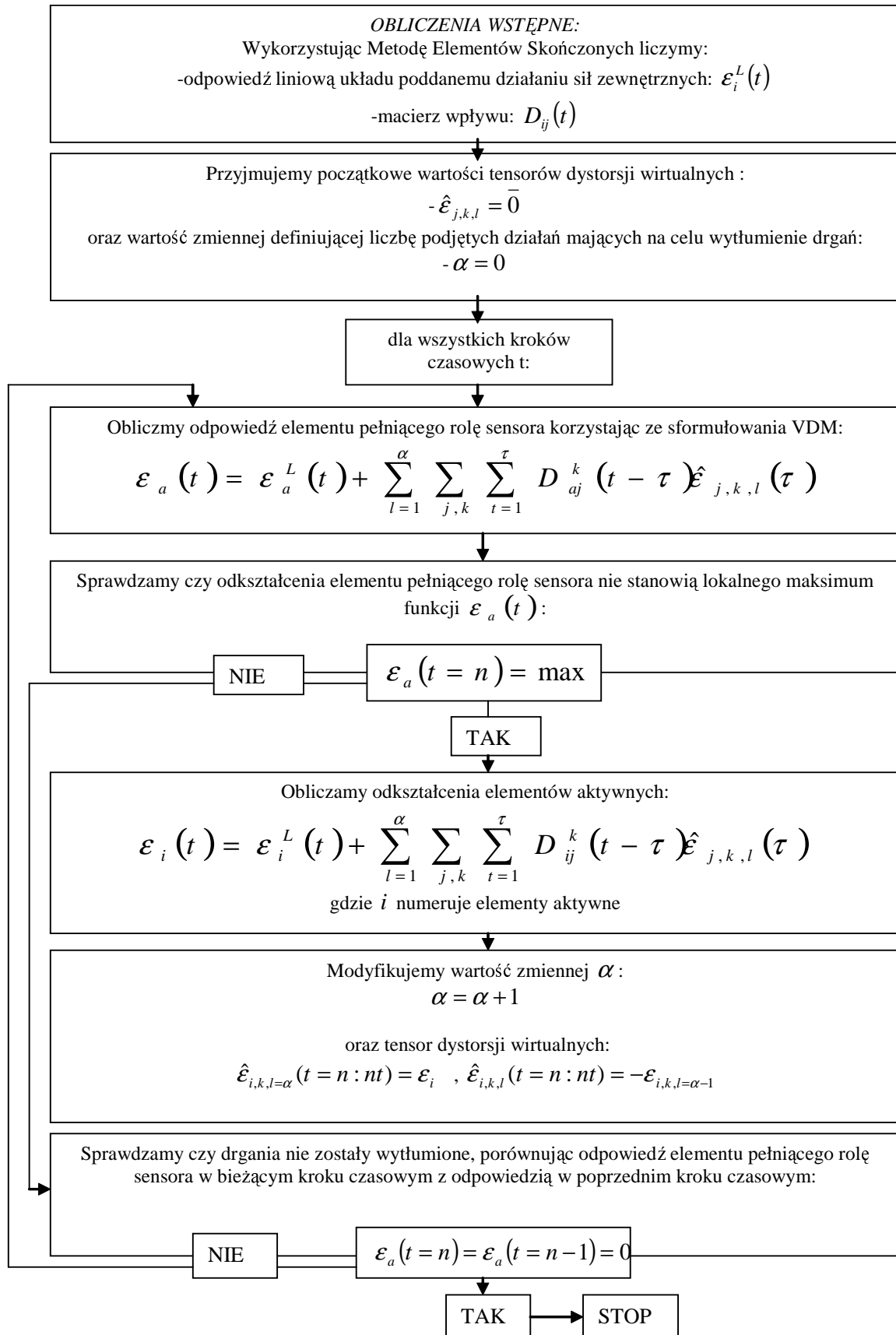
Dodanie w powyższym równaniu do odpowiedzi liniowej członu rezydualnego związanego z akumulacją energii odształceń wskutek nałożenia odpowiednich więzów kinematycznych w chwili  $t^1$ , oraz odjęcie wyrazu związanego z uwolnieniem tejże energii w chwili  $t^2$  opisuje czynność pojedynczego rozłączenia/połączenia warstw konstrukcji.

W przypadkach mniej efektywnych działanie polegające na rozłączeniu i ponownym złączeniu belek w bardzo małym przedziale czasowym musi być powtarzane kilkakrotnie co prowadzi do następującego uogólnienia wzoru (5.26):

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(t) = & \varepsilon_i^L(t) + \sum_{\alpha} \sum_k \sum_{\tau=0}^t \sum_j D_{ikj}^k(t + t^{\alpha 1} - \tau) \hat{\varepsilon}_j^k(\tau, \alpha) - \\ & \sum_{\alpha} \sum_k \sum_{\tau=0}^t \sum_j D_{ikj}^k(t + t^{\alpha 2} - \tau) \hat{\varepsilon}_j^k(\tau, \alpha - 1) \end{aligned} \quad (5.27)$$

gdzie zmienna  $\alpha$  indeksuje kolejne ingerencje w stan układu.

TABLICA 5.2. Algorytm PAR w ujęciu MIDW



## 5.5. Test efektywności PAR w układzie belki dwuwarstwowej

Rozważmy model belki dwuwarstwowej utwierdzonej jednostronnie, z warstwą kontaktową zbudowaną z elementów prętowych (rys. 5.5a). Na (rys. 5.5) przedstawiającym omawiany układ elementy aktywne oznaczono kolorem czerwonym, natomiast sensor mierzący odpowiedź odkształceniową fragmentu konstrukcji oznaczono kolorem zielonym. Zarówno dla elementów należących do warstwy kontaktowej jak i dla elementów budujących belki przyjęto  $E = 80^9 Pa$ ,  $A = 1^{-5} m^2$ . Konstrukcję wzbudzono do drgań obciążając jej swobodny koniec siłą dynamiczną opisaną równaniem (3.25) co pozwoliło wprowadzić ją w drgania o częstości bliskiej 4 częstości drgań własnych. Wskutek zastosowania strategii PAR drgania zostały wytłumione już po czterech ingerencjach (rozłączenie-złączenie belek) w stan konstrukcji. Porównanie odkształceń obliczonych dla elementu pełniącego rolę sensora w przypadku braku kontroli oraz w przypadku zastosowania strategii PAR przedstawiono na rys. 5.5b,c.

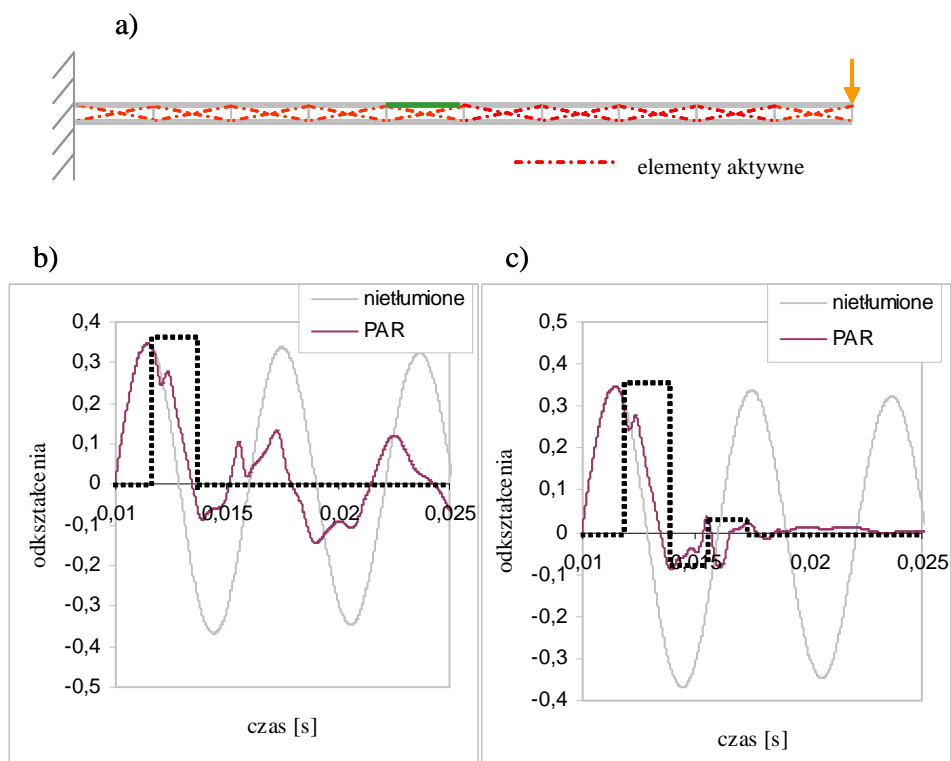
Jak widać z powyższych analiz, skuteczność tłumienia strategii PAR jest wysoka w przypadkach, gdy mamy do czynienia z jedną z niskich, dominujących form drgań własnych. Sytuacja staje się bardziej skomplikowana w pozostałych przypadkach, w których strategia sterowania musi być bardziej wyrafinowana, aby spełnić warunek 5.24 w elementach aktywnych. W realnych aplikacjach należy wziąć też pod uwagę czas rzeczywisty  $\Delta t$  konieczny do wywołania pełnej delaminacji, a następnie pełnego zespolenia warstw. Należy też określić (np. poprzez testy numeryczne lub eksperymentalne) optymalną chwilę czasową (wyprzedzenie w stosunku do chwili czasowej aktywacji dla układu idealnego), w której rozpoczynamy proces delaminacji, aby ostateczny efekt tłumienia był największy.

Wymienione tu problemy wykraczają poza zakres niniejszej rozprawy i będą celem dalszych prac badawczych. Wyzwanie do dalszych badań stanowi też opracowanie technologii pozwalającej na wywoływanie efektu zbliżonego do szybko sterowalnej i odwracalnej delaminacji a także demonstracja efektu tych zabiegów na przykładzie wybranego problemu inżynierskiego.

## 5.6. Doświadczalna weryfikacja możliwości tłumienia drgań w konstrukcji dwuwarstwowej

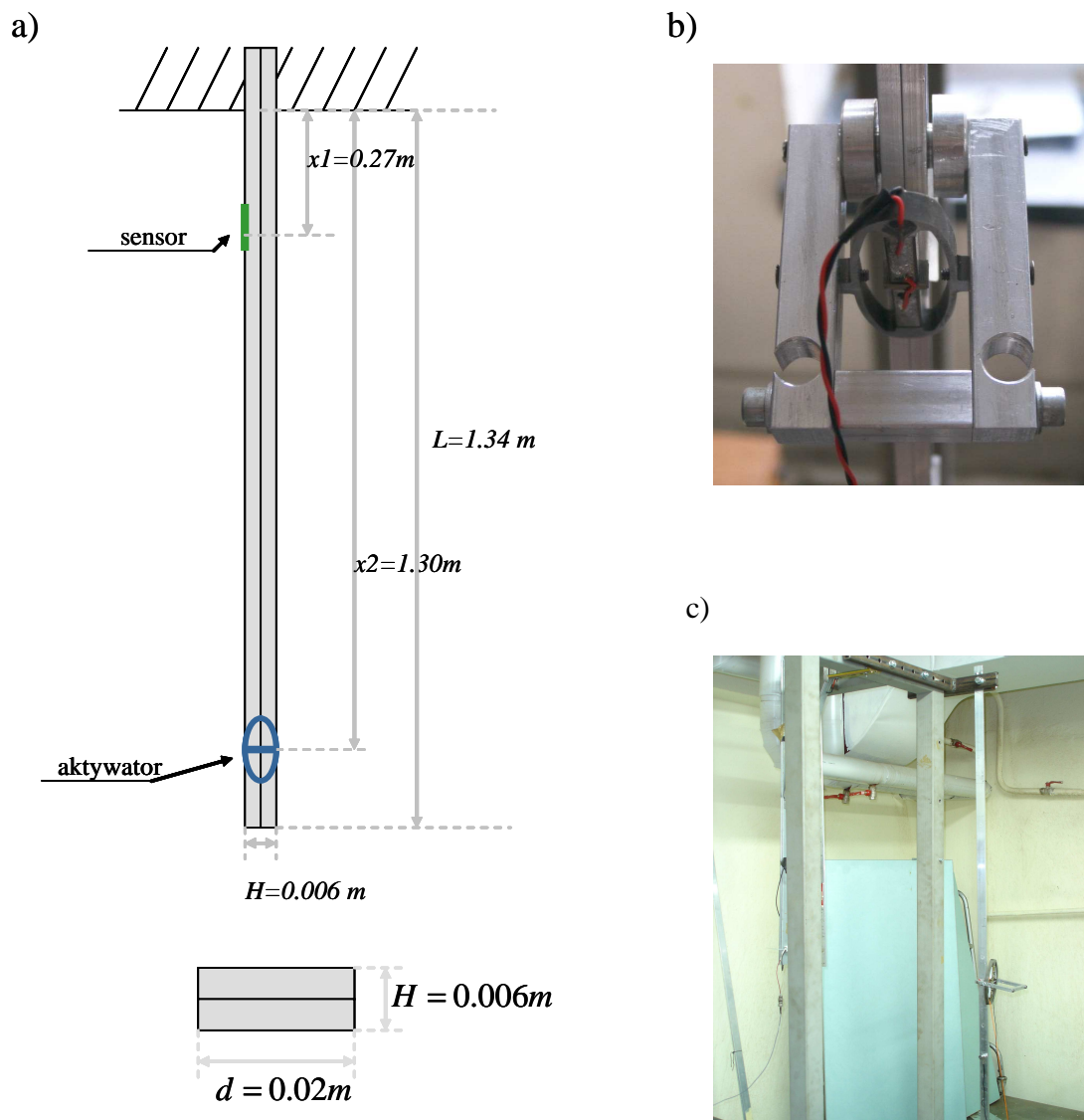
Do budowy demonstratora umożliwiającego ocenę efektywności metody PAR wykorzystane zostały:

- układ mechaniczny składający się z dwu belek aluminiowych o wymiarach: długość  $1.34m$ , szerokość  $0.02m$ , wysokość  $0.003m$ ,
- aktywator piezoelektryczny APA 230L pracujący w zakresie  $0-150V$ ,
- płytki piezoelektryczna,
- wzmacniacz mocy,
- wzmacniacz kondycjonujący sygnał napięciowy generowany przez piezosensor,
- karta pomiarowa NI 5062E,
- dwa komputery PC pracujące w systemie czasu rzeczywistego.



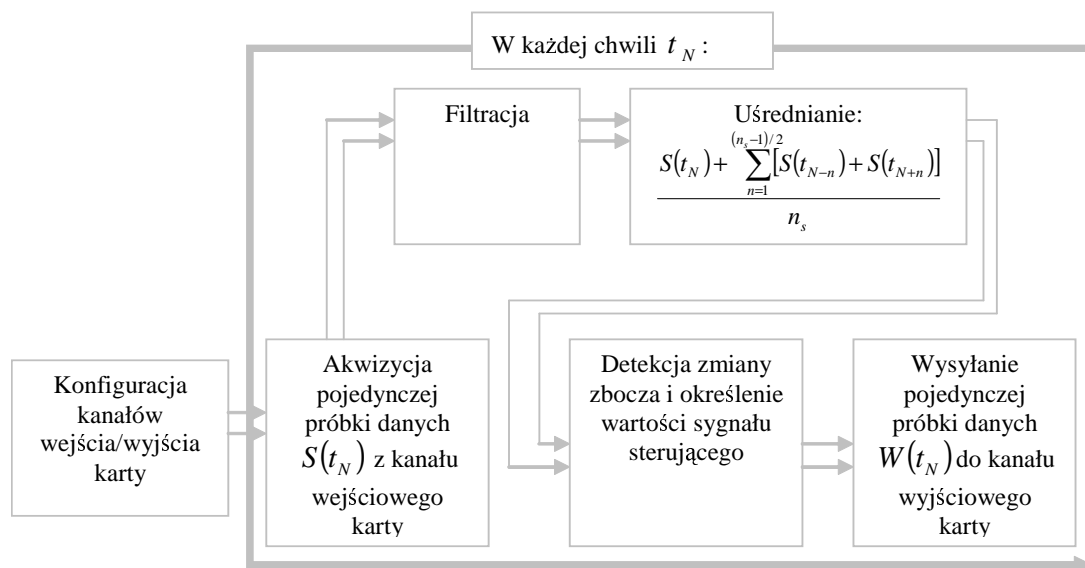
RYS. 5.5. Rezultaty wprowadzenia strategii PAR w konstrukcji dwuwarstwowej (a) model konstrukcji, (b) porównanie odkształceń mierzonych przez sensor umieszczony w pobliżu elementu aktywnego dla konstrukcji drgającej swobodnie i konstrukcji sterowanej w przypadku pojedynczego rozłączenia-złączenia w chwili  $t^1$ , (c) porównanie odkształceń mierzonych przez sensor umieszczony w pobliżu elementu aktywnego dla konstrukcji drgającej swobodnie i konstrukcji sterowanej dla przypadku całkowitego stłumienia drgań.



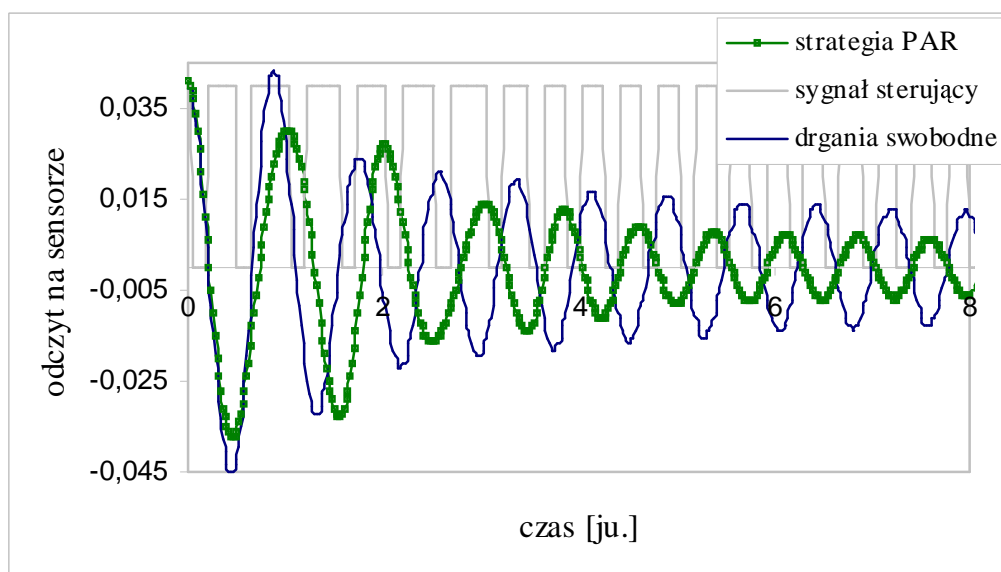


RYS. 5.6. (a) Schemat geometryczny konstrukcji, (b) aktywator APA 230L wykorzystany w doświadczeniu, (c) demonstrator, na którym przeprowadzono badania.

Rolę urządzenia umożliwiającego zmianę siły z jaką dociskane były belki pełnił aktywa-  
tor piezoelektryczny. Stan zespolenia obydwu części konstrukcji wymuszony został poprzez  
podanie na elementy piezoelektryczne napięcia 150 V. Spowodowało to skrócenie długiej osi  
elipsy w której umieszczono słupki z materiału piezoelektrycznego, a w efekcie doprowadzi-  
ło do zaciśnięcia się mechanizmu umożliwiającego zamocowanie aktywatora na konstrukcji  
(blokującego względny ruch belek). Chwilowe rozwarstwienie uzyskiwane było poprzez po-  
danie na aktywa-  
tor napięcia 0 V.



Rys. 5.7. Schemat programu obsługującego kartę pomiarową.



Rys. 5.8. Porównanie odpowiedzi odkształceniowej mierzonej przez sensor piezoelektryczny dla drgań swobodnych konstrukcji i drgań tłumionych metodą PAR.

Sygnałem na podstawie którego podejmowana była decyzja o poziomie napięcia sterującego aktywatorem był sygnał był odczyt z płytki piezoelektrycznej umieszczonej w górnej części konstrukcji (taka lokalizacja sensora pozwala na uzyskanie sygnału użytecznego odpowiednio dużego w stosunku do szumu).

Program umożliwiający zbieranie i analizę danych pomiarowych, oraz sterowanie aktywatorem został napisany w zintegrowanym środowisku programowym LabVIEW. Schemat blokowy tego programu przedstawiony został na rys. 5.7.

Zbudowanie opisanego stanowiska doświadczalnego pozwoliło na przeprowadzenie pomiarów przyspieszeń konstrukcji zespolonej i konstrukcji sterowanej, wzbudzonej do drgań swobodnych. Porównanie tych odpowiedzi wraz z sygnałem sterującym przedstawia rys. 5.8. Uzyskano wynik potwierdzający iż proponowana strategia może być wykorzystywana do tłumienia drgań konstrukcji dwuwarstwowej. Efektywność tłumienia zaobserwowanego w trakcie badań na stanowisku doświadczalnym może być zwiększona wskutek skrócenia czasu pozostawiania belek w stanie rozłączonym, co wymaga zbudowania odpowiednio szybkiego wzmacniacza obsługującego aktywator piezoelektryczny. Zastosowanie techniki PAR w odniesieniu do konstrukcji belkowej będzie przedmiotem dalszych badań.

---

# Oryginalne koncepcje i osiągnięcia pracy

---

Poniżej przedstawiono koncepcje i osiągnięcia pracy, które autor uważa za oryginalne. Dotyczą one zagadnień modelowania i identyfikacji delaminacji, jak również problematyki tłumienia drgań w konstrukcjach dwuwarstwowych.

- Oryginalne koncepcje i osiągnięcia pracy w zakresie obejmującym problematykę modelowania delaminacji:
  1. sformułowanie (na bazie MDW i MIDW) problemu modelowania odpowiedzi odkształceniowej konstrukcji dwuwarstwowej zdelaminowanej oraz opracowanie algorytmu modelowania odpowiedzi konstrukcji obciążonej statycznie i dynamicznie. Wykorzystanie podejścia dystorsyjnego do modelowania oddziaływań kontaktowych pozwoliło na łatwe (nie wymagające modyfikacji macierzy sztywności) wprowadzenie oddziaływań zapobiegających penetracji jak i uwzględnienie tzw. efektu „otwartej szczeliny”,
  2. dyskusja możliwości modelowania dystorsjami efektu rozpraszania energii w wyniku tarcia,
  3. oparte na podejściu dystorsyjnym sformułowanie problemu wyznaczania wrażliwości pól odkształceń na składowe wektora współczynników modyfikacji sztywności definiującego rozmiar i intensywność rozwarstwienia,
  4. opracowanie na podstawie sformułowanych algorytmów kodów numerycznych oraz ich weryfikacja eksperymentalna.
- Oryginalne koncepcje i osiągnięcia pracy w zakresie obejmującym problematykę identyfikacji delaminacji:
  1. sformułowanie, na bazie MDW/MIDW, problemu minimalizacji funkcji celu stanowiącej miarę odległości pomiędzy funkcjami przejścia otrzymanymi z eksperymentu przeprowadzonego na rzeczywistej konstrukcji oraz obliczeń wykonanych na jej modelu numerycznym,
  2. opracowanie algorytmu identyfikacji uszkodzeń bazującego na wspomnianej powyżej funkcji celu (odwrotne zagadnienie dynamiczne rozwiązywane *a posteriori*,

- 
3. opracowanie algorytmu identyfikacji delaminacji opartego na pomiarze różnic odpowiedzi konstrukcji pierwotnej i uszkodzonej, wykorzystującego siatkę sensorów rozłożonych równomiernie na powierzchni belki (podejście to stwarza możliwość monitorowania delaminacji w czasie rzeczywistym),
  4. implementacja numeryczna opracowanych algorytmów,
  5. weryfikacje eksperymentalna identyfikacji defektów uzyskanych na drodze numerycznej.
- Oryginalne koncepcje i osiągnięcia pracy w zakresie obejmującym problematykę tłumienia drgań w konstrukcjach dwuwarstwowych:
    1. sformułowanie zadania semi-aktywnego, akumulacyjno-dysypacyjnego tłumienia drgań w konstrukcji dwuwarstwowej (strategia PAR),
    2. opracowanie algorytmu sterowania stanem zespolenia belki dwuwarstwowej i jego implementacja numeryczna,
    3. wykonanie demonstratora umożliwiającego praktyczną realizację przyjętej strategii PAR tłumienia drgań w układzie belki dwuwarstwowej i weryfikacja eksperymentalna rezultatów uzyskanych na drodze symulacji numerycznych.

---

# Bibliografia

---

1. Rosen J. B. The gradient projection method for nonlinear programming, part i – linear constraints, *siam journal of applied mathematics*. *The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming*, pages 181–217, 1960.
2. R. A. Badcock and E. A. Birt. The use of 0-3 piezocomposite embedded Lamb wave sensors for detection of damage in advanced fibre composite. *Smart Material and Structures*, 9:291–297, 2000.
3. H. Bruneau, R. Le Letty, F. Barillet, and N. Lhermet. Application of a new amplified piezoelectric actuator to semi-active control of vibration. In *Proc. 2nd Int. Conference on Active Control in Mechanical Engineering*, 1997.
4. P. Cawley and R. D. Adams. The location of defects in structures from measurements of natural frequencies. *Journal of Strain Analysis*, 14(2):49–57, 1979.
5. T. Chmielewski and Z. Zembaty. *Podstawy dynamiki budowli*. Arkady, 1998.
6. F. dell’Isola and S. Vidoli. Damping of bending waves in truss beams by electrical transmission lines with PZT actuators. *Archive of Applied Mechanics*, 68:626–636, 1998.
7. S.J. Dyke, B.F. Jr. Spencer, M.K. Sain, and J.D. Carlson. Experimental verification of semi-active structural control strategies using acceleration feedback. In *Proc. 3rd Intern. Conf on Motion and Vibration Control*, Chiba, Japan, Sept 1-6 1996.
8. P. C. Furrow, R. T. Brown, and D. B. Mott. Fiber optic health monitoring system for composite bridge decks. *Smart Structures and Materials*, 3988:380–391, 2000.
9. L. Gaul and R. Nitsche. The role of friction in mechanical joints. *Applied Mechanics Review*, 54, 2001.
10. L. Gaul, R. Nitsche, and D. Sachau. Semi-active vibration control of flexible structures. *Proc. of the EUROMECH 373 Colloquium on Modelling and Control of Adaptive Mechanical Structure*, 1998.
11. J. Gierliński, J. Holnicki-Szulc, and J.D.Sorensen. Sensitivity analysis of structures by virtual distortion method. In *Proc. of the 3rd IFIP Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems*, Berkley, USA, 1990.

12. J. Holnicki-Szulc. Distortion problems in bar structure. In *Proc. Symposium of International Association for Shell and Spatial Structures on Industrialized Shell and Spatial Structures*, Kielce, 1973.
13. J. Holnicki-Szulc. Problemy sprężania ośrodków dwufazowych. *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 18(1), 1976.
14. J. Holnicki-Szulc. Prestress of truss and frame structures. *Journal of Structural Engineering ASCE*, 105(3), 1979.
15. J. Holnicki-Szulc. Optimal structural remodelling – simulation by virtual distortions. *Communications in Applied Numerical Methods*, 5(5), 1989.
16. J. Holnicki-Szulc. *Dystorsje w układach konstrukcyjnych. Analiza, sterowanie, modelowanie*. Biblioteka Mechaniki Stosowanej, Seria A. Monografie. IPPT PAN, PWN, Warszawa, Poznań, 1990.
17. J. Holnicki-Szulc. Damping of vibration by actively controlled initial distortions. *J. Aerospace Eng. ASCE*, 4(1), 1991.
18. J. Holnicki-Szulc. Analysis of prestressed visco-elastic structures by the Virtual Distortion Method. *Engineering Transactions*, 40:133–134, 1992.
19. J. Holnicki-Szulc and R. Haftka. Degradation of elastic structures - simulation by initial distortions. *Mechanics of Structures and Machines*, 15(1), 1987.
20. J. Holnicki-Szulc, P. Kołakowski, and N. Nasher. Identification of leakages in water networks – virtual distortion method approach. In *Proc. of the 5th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Lido di Jesolo, Italy, 19–23 May 2003.
21. J. Holnicki-Szulc, P. Kolakowski, A. Orłowska, A. Swiercz, D. Wiacek, and T.G. Zielinski. Piezodiagnosics- new concept of automatic, remote damage detection and identification. In *Polish-French Seminar, Warsaw Technological University, SIMR*, December 2002.
22. J. Holnicki-Szulc, P. Kolakowski, A. Orłowska, A. Swiercz, D. Wiacek, and T.G. Zielinski. Long-distance, gradient based identification of corrosion trough analysis of piezo-generated impulse transmission. In *Proc. of the 5th ISSMO-World Conference on Structural and Multidisciplinary Optimisation, WCSMO-5*, Lido Venice, 19-23 May 2003.
23. J. Holnicki-Szulc and Z. Marzec. Adaptive structures with semi-active interfaces. In *Proc. of the EUROMECH 373 Colloquium on Modelling and Control of Adaptive Mechanical Structures*, Magdeburg, Germany, 1998.
24. J. Holnicki-Szulc and Z. Mróz. Active control of stresses and deflections of elastic structures by means of imposed distortions. In *Proc. Of the 2nd Int. Symposium of Structural Control*, University of Waterloo, 1985.
25. J. Holnicki-Szulc, P. Pawłowski, and M. Wikło. High-performance impact absorbing materials - the concept, design tools and applications. In *Proc. IUTAM Symposium on Dynamics of Advanced Materials and Smart Structures*, Yonezawa, Japan, 20-24 May 2002.
26. J. Holnicki-Szulc, P. Pawłowski, and M. Wikło. Adaptive multifolding microstructures. In *Proc. Smart Technology Demonstrators and Devices*, Edinburgh, UK, 12–14 December 2001.

27. J. Holnicki-Szulc and M. Wikło. Adaptive impact absorbers, the concept, design tools and applications. In *Proc. 3rd World Conference on Structural Control*, Como, Italy, 7-12 April 2002.
28. J. Holnicki-Szulc and T.G. Zieliński. Damage identification method based on analysis of perturbation of elastic wave propagation. In Fu-Kuo Chang, editor, *Proc. of the 2nd International Workshop on Structural Health Monitoring*, Stanford, England, September 1999.
29. J. Holnicki-Szulc and T.G. Zieliński. New damage identification method through the gradient based optimisation. In *Proc. COST International Conference on "System Identification & Structural Health Monitoring"*, Madrid, 6-9 June 2000.
30. D. Hrovat, P. Barak, and M. Rabins. Semi-active versus passive or active tuned mass dampers for structural control. *Journal of Engineering Mechanics*, 109(3):691–705, 1983.
31. D.C. Kamopp, M.J. Crosby, and R.A. Harwood. Vibration control using semi active force generation. *Jour. Of Engineering For Industry*, 96(2):619–626, 1974.
32. M. Kleiber. *Wprowadzenie do metody elementów skończonych*. PWN, Warszawa – Poznań, 1989.
33. L. Knap and J. Holnicki-Szulc. Optimal design of adaptive structures for the best crashworthiness. In *Proc. of Polish-German Seminar on Development Trends in Design of Machines and Vehicles*, Köln, Germany.
34. P. Kołakowski. *Analiza wrażliwości i optymalne projektowanie konstrukcji kratowych Metodą Dys-torsji Wirtualnych*. Prace IPPT PAN, Warszawa, 1998.
35. P. Kołakowski and J. Holnicki-Szulc. Optimal remodelling of truss structures – simulation by virtual distortions. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 4, 1997.
36. P. Kołakowski and J. Holnicki-Szulc. Optimal remodelling of truss structures – simulation by virtual distortions. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 4, 1997.
37. P. Kołakowski and J. Holnicki-Szulc. Sensitivity analysis of truss structures (Virtual Distortion Method approach). *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43, 1998.
38. T. Kobori, M. Takahashi, T. Nasu, and N. Niwa. Seismic response controlled structure with active variable stiffness systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 22:925–941, 1993.
39. M. Krawczuk. Finite timoshenko-type beam element with a crack. *Engineering Transactions*, 40(2), 1992.
40. G.C. Lee, Z. Liang, and M. Tong. Development of a semi-active structural control system. in research progress and accomplishments 1997-1999. *Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research MCEER*, July 1999.
41. H. Luo and S. Hanagud. Dynamics of delaminated beams. *International Journal of Solid and Structures*, 37:1501–1519, 2000.
42. P.V. Makode, M.R. Ramirez, and R.B. Corotis. Reanalysis of rigid frame structures by the virtual distortion method. *Structural Optimization*, 11, 1996.



43. Z. Marzec, J. Holnicki-Szulc, and F. López-Almansa. Strategy of impulse release of strain energy for damping of vibration. In *Proc. NATO ARW Smart Structures'98*, Pultusk, Poland, 1998.
44. Y. Narkis. Identification of crack location in vibrating simply supported beams. *Journal of Sound and Vibration*, 172(2):549–558, 1994.
45. W. Nowacki. *Teoria sprężystości*. PWN, 1970.
46. D. Osmont, M. Dupont, R. Goayon, and M. Lemistre. Damage and damaging impact monitoring by pzt sensors-based hums. *Smart Structures and Materials*, 3986:85–92, 2000.
47. W. Ostachowicz and M. Krawczuk. Coupled torsional and bending vibrations of a rotor with an open crack. *Archive of Applied Mechanics*, 62:191–201, 1992.
48. W. Ostachowicz and M. Krawczuk. Natural frequency of a cracked turbine blade. In *Proceedings of the 4th International Symposium of Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*, 1992.
49. W. Ostachowicz and M. Krawczuk. Modeling and vibration analysis of a cantilever composite beam with a transverse open crack. *Journal of Sound and Vibrations*, 183:69–68, 1995.
50. G. Park, H. Cudney, and D. Inman. Impedance-based health monitoring technique of massive structures and high-temperature structures. *Smart Structures and Materials*, 3670:461–469, 1999.
51. W.N. Patten, J. Sun, G. Li, J. Kuehn, and G. Song. Field test of an intelligent stiffener for bridges at the 1- 35 walnut creek bridge. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 28(2):109–126, 1999.
52. M. Pietrzakowski. *Active Damping of Vibration Using Distributed Piezoelectric Elements*, volume 4 of *Prace Naukowe, Mechanika*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2004.
53. A. Preumont. Active vibration control. In *Proc. SMART'01 Advanced Course on "Structural Control and Health Monitoring"*, Warsaw, 22-25 May 2001.
54. J. Putresza. Sub-incremental technique for elasto-plastic analysis of frames using the Virtual Distortion Method. *Report of WS Atkins Safety & Technology*, 1995.
55. R.L. Ramkumar, S.V. Kulkarni, and R.B. Pipes. Free vibration frequencies of a delaminated beam. In *34th Annual Technical Conference Proceedings: Reinforced Composites Institute, Society of Plastics Industry Inc*, 1997.
56. P.F. Rigos, N. Asparagathos, and A.D. Dimarogonas. Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes. *Journal of Sound and Vibration*, 138(3):381–388, 1990.
57. A. Ruangrassamee and K. Kawashima. Semi-active control of bridges with use of magnetorheological damper. In 171, editor, *Proc. of 12th European Conference on Earthquake Engineering, London England*, September 2002.
58. D.A. Saravanos, V. Birman, and D.A. Hopkins. Detection of delaminations in composite beams using piezoelectric sensors. In *Proceedings of the 35th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference of the AIAA*, 1994.

59. D.A. Saravanos and D.A. Hopkins. Effects of delaminations on the damped dynamic characteristics of composite laminates: analysis and experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 192(5):977–993, 1996.
60. J. Sobieszański-Sobieski. Structural modification by perturbation method. *Journal of Structural Engineering ASCE*, 94(12), 1968.
61. H. Sohn, J.R. Wait, G. Park, and C.R. Farrar. Multi-scale structural health monitoring for composite structures. In *Proceedings of the Second European Workshop Structural Health Monitoring*, Monachium, 2004.
62. W. J. Staszewski, Worden K., and Tomlinson G. R. Optimal sensor placement for neural network fault diagnosis. In *Proc. of Adaptive Computing in Engineering Design and Control*, 1996.
63. M.D. Symans and M.C. Constantinou. Semi-active control systems for seismic protection of structures: a state-of-the-art review. *Engineering Structures*, 21(6):469–487, 1999.
64. M.D. Symans, G.J. Madden, and N. Wongprasert. Experimental study of an adaptive base isolation system for buildings. In *Proc. of 12th World Conf. on Earthquake Eng., 12WCEE*, Auckland, New Zealand, 30 Jan.-4 Feb. 2000.
65. P. Tan and L.Y. Tong. A dynamic model for delamination identification using MFRC patch. *Structural Health Monitoring and Intelligent Infrastructure*, 2006.
66. J.J. Tracy and G.C. Pardo. Effect of delamination on the natural frequencies of composite laminates. *Journal of Composite Materials*, 23:1200–1215, 1989.
67. S.H.D. Valdez and C. Soutis. Structural integrity monitoring of laminates using piezoelectric devices. In *Proceedings of the 9th European Conference of Composite Materials*, Brighton UK, 2000.
68. A. Tylikowski W. Kurnik. *Mechanika elementów laminowanych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 1977.
69. C.S. Wang and F.K. Chang. Built in diagnostics for impact damage identification of composite structures. In *Proceedings of III SHMW*, Stanford, USA, 1999.
70. J.T.S. Wang, Y.Y. Liu, and J.A. Gibby. Vibrations of split beams. *Journal of Sound and Vibration*, 84(4):491–502, 1982.
71. D. Wiącek. *Monitorowanie, ocena i przewidywanie rozwoju zniszczeń w budynkach historycznych*. Praca doktorska, 2001.
72. D. Wiącek and J. Holnicki-Szulc. Damage prediction in historical buildings – VDM approach. In *Proc. of the 5th International Conference on Computational Plasticity*, Barcelona, 17 – 20 March 1997.
73. M. Wikło and J. Holnicki-Szulc. Identification of damaging loads on the base of local strain measurements. In *Proc. of the 2nd European Workshop on Structural Health Monitoring*, Munich, Germany, 7-9 July 2004.
74. E. J. Williams and A. Messina. Applications of the multiple damage location assurance criterion. In *Proc. of the International Conference on Damage Assessment of Structures (DAMAS99)*, 1999.

- 
75. A. Żak, M. Krawczuk, and W. Ostachowicz. Numerical and experimental investigation of free vibration of multilayer delaminated composite beams and plates. *Computational Mechanics*, 26(3):309–315, 2000.
  76. B. Zafran. Vibration of cracked structures. *Archive of Mechanics*, 37:731–743, 1985.
  77. L. Zhang, W. Quiong, and M. Link. A structural damage identification approach based on element modal strain energy. In *ISMA23, Noise and Vibration Engineering*, 1998.
  78. T.G. Zieliński. *Metoda Impulsowych Dystorsji Wirtualnych z zastosowaniem do modelowania i identyfikacji defektów w konstrukcjach*. 2004.
  79. O.C. Zienkiewicz. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, 1997.

---

## Załącznik CD

---