

Instytut Podstawowych Problemów Techniki
Polskiej Akademii Nauk

Małgorzata Zdanowicz

**Analiza matematyczna równań
modelujących plazmę w silniku
jonowym**

rozprawa doktorska

Promotor rozprawy
prof. dr hab. Zbigniew Peradzyński
UW, IPPT PAN

kwiecień 2007

*Składam serdeczne podziękowania
prof. dr hab. Z. Peradzyńskiemu
za niezmierną cierpliwość i pomoc
w powstaniu tej pracy.
Dziękuję również dr K. Makowskiemu
i dr S. Barralowi za owocne dyskusje.*

Spis treści

Abstract in English	i
Wstęp	vi
0.1 Omówienie pracy	vi
0.2 Uwagi historyczne	xii
1 Silnik Halla	1
1.1 Budowa i zasada działania	2
1.2 Modelowanie płynowe	5
1.2.1 Zmienne cylindryczne	5
1.2.2 Równania modelu jednowymiarowego niestacjonarnego	5
1.2.3 Uproszczenia modelu	9
2 Zagadnienie Cauchy’ego dla układu liniowego	14
2.1 Układ w inwariantach Riemanna	15
2.2 Charakterystyki i obszar określoności rozwiązania	15
2.3 Układ równań całkowych	18
2.4 Operator \mathcal{P}	19
2.5 Rozwiązanie uogólnione	20
2.5.1 Jednoznaczność	21
2.5.2 Istnienie	22
2.6 Rozwiązanie klasy C^1	24
2.7 Ocena wzrostu rozwiązania	30
2.8 Zagadnienie z zerowym warunkiem początkowym	30
2.9 Uogólnienie twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności...	32
2.10 Rozwiązanie uogólnione układu z wahaniem skończonym lewych wektorów... . .	35
3 Zagadnienie Cauchy’ego dla układu quasi-liniowego	40
3.1 Zagadnienie Cauchy’ego	40
3.2 Struktura układu przedłużonego	41
3.3 Ograniczoność rozwiązania i jego pochodnych	43
3.4 Jednoznaczność rozwiązania	45
3.5 Istnienie rozwiązania	47
3.5.1 Ciąg liniowych układów przedłużonych	47
3.5.2 Wspólna ograniczoność funkcji ciągu $(\overset{(s)}{u}, \overset{(s)}{p})$	48
3.5.3 Jednostajna zbieżność ciągu $\{\overset{(s)}{u}\}$	49
3.5.4 Niemal jednostajna zbieżność ciągu $\{\overset{(s)}{p}\}$	52

4	Zagadnienie Cauchy’ego dla układu quasi-liniowego z funkcjonalną zależnością współczynników od rozwiązania	55
4.1	Układ przedłużony	57
4.2	Charakterystyki	60
4.3	Jednoznaczność rozwiązania	60
4.4	Istnienie rozwiązania	62
4.4.1	Kolejne przybliżenia dla układu przedłużonego	62
4.4.2	Jednostajna zbieżność ciągu $\{u^{(s)}\}$	63
4.4.3	Zbieżność jednostajna ciągu $\{p^{(s)}\}$ na zwartych podzbiorach \mathbb{R}	66
5	Zagadnienie mieszane dla układu liniowego z nieliniowym warunkiem brzegowym	71
5.1	Jedno równanie liniowe	72
5.1.1	Rozwiązanie uogólnione	72
5.1.2	Rozwiązanie klasy C^1	80
5.2	Układ równań liniowych	91
5.2.1	Istnienie uogólnionych rozwiązań układu (5.37)	92
5.2.2	Rozwiązania klasy C^1 układu (5.37)	98
5.2.3	Układ liniowy z macierzą niediagonalną	101
5.3	Zag. mieszane dla układu quasi-liniowego z funkcjonalną zależnością...	104
A	Dowód Lematu 2.2	117
B	Przekształcenia równania energii dla elektronów	120
C	Sprawdzenie założeń $(A_1) - (A_5)$ dla układu standardowego	123
	Bibliografia	128

Abstract in English

Mathematical analysis of the equations modeling plasma in the ion thruster

THESIS BY MAŁGORZATA ZDANOWICZ
SUPERVISOR: PROFESSOR DR HAB. ZBIGNIEW PERADZYŃSKI

One of the easiest ways of modeling the plasma is to treat it as a three-component fluid consisting of neutral atoms, electrons and ions. In this way one obtains a fluid model, which is expressed by system of partial differential equations. In the dissertation we consider such systems. The first one consists of eight equations:

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} + \frac{\partial(N_a V_a)}{\partial x} = -\beta N_a n_e, \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i V_i)}{\partial x} = \beta N_a n_e. \quad (2)$$

$$\frac{\partial(n_i V_i)}{\partial t} + \frac{\partial(n_i V_i^2)}{\partial x} = \frac{n_i e E}{m_i} + \beta N_a n_e V_a, \quad (3)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial(n_e V_e)}{\partial x} = \beta N_a n_e. \quad (4)$$

$$\frac{m_e}{m_i} \left(\frac{\partial(n_e V_{ex})}{\partial t} + \frac{\partial(n_e V_{ex}^2)}{\partial x} \right) + \frac{\partial \left(\frac{k T_e}{m_i} n_e \right)}{\partial x} = -\frac{n_e e E}{m_i} + n_e (\tilde{\omega}_B V_{e\theta} - \tilde{\nu}_m V_{ex}), \quad (5)$$

$$\frac{m_e}{m_i} \left(\frac{\partial(n_e V_{e\theta})}{\partial t} + \frac{\partial(n_e V_{ex} V_{e\theta})}{\partial x} \right) = -n_e \tilde{\omega}_B V_{ex} - n_e \tilde{\nu}_m V_{e\theta}. \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(n_e E_{ke} + \frac{3}{2} n_e k T_e \right) + \frac{\partial (n_e V_{ex} E_{ke} + n_e V_{ex} \frac{3}{2} k T_e)}{\partial x} + \frac{\partial(n_e V_{ex} k T_e)}{\partial x} = Q_{Joules} - Q_{ioniz} - Q_{wall} \quad (7)$$

where $Q_{Joules} = -V_{ex} n_e e E$, $Q_{ioniz} = \gamma e E_{ion} \beta N_a n_e$, $Q_{wall} = \nu_{ew} n_e (E_{ke} + 2k T_e)$,

$$\varepsilon_0 E_{,x} = e(n_i - n_e) \quad (8)$$

with some initial and appropriate boundary conditions.

However numerical computations for such a system are faced with several difficulties: a) the

system is weakly hyperbolic - a matrix of the system can not be diagonalized at fixed dependent and independent variables. As it is known such systems are unstable with respect to the perturbation of the right hand side. b) the right hand side of Eq. (8) for the electric field is a difference of two large terms: ion and electron density. Small errors in densities result in a very large error in the electric field which in turn implies even greater error in densities. To avoid such problems one usually assumes plasma quasineutrality $n_i = n_e$. Then Eq. (8) must be rejected.

Instead of the Eq. (8) one uses a sort of an Ohm law, derived from the electron momentum Eq. (5) and (6), by neglecting the inertial terms; in case of xenon, the electron mass is small in comparison with the mass of ion. The boundary condition for the potential of the electric field allows to calculate the total current density, which is determined [4] as the functional (by means of the integrals from expressions containing the unknown functions):

$$I(t) = \left(\int_0^L \frac{\nu_{eff}}{e n_e} dx \right)^{-1} \cdot \left[\frac{e}{m_i} U_0 + \int_0^L \left(\nu_{eff} V_i + \frac{1}{n_e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k T_e}{m_i} n_e \right) \right) dx \right]. \quad (9)$$

In this way we obtain a hyperbolic system of four equations:

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} + \frac{\partial(N_a V_a)}{\partial x} = -\beta N_a n_i, \quad (10)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i V_i)}{\partial x} = \beta N_a n_i, \quad (11)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{1}{n_i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k T_e}{m_i} n_i \right) = \nu_{eff} \left(\frac{I}{n_i e} - V_i \right) + \beta N_a (V_a - V_i), \quad (12)$$

$$\frac{n_i}{\sqrt{T_e}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T_e^{\frac{3}{2}}}{n_i} \right) + V_e \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T_e^{\frac{3}{2}}}{n_i} \right) \right] = Q_2, \quad (13)$$

where

$$Q_2 = -\frac{1}{k} \beta N_a \left(\gamma e E_{ion} + \frac{3}{2} k T_e - E_{ke} \right) + 2 \frac{\nu_m}{k} E_{ke} - \frac{\nu_{ew}}{k} (E_{ke} + 2k T_e) - \beta N_a T_e,$$

$$E_{ke} = \frac{m_e}{2} (V_{ex}^2 + V_{e\theta}^2) = \frac{m_e}{2} \left(1 + \frac{\omega_B^2}{\nu_e^2} \right) V_{ex}^2.$$

The initial conditions must be prescribed conditions with positive n_i , N_a , T_e and the boundary conditions are in the form

$$\begin{aligned} N_a(t, 0) &= N_{a0} \\ V_i(t, 0) &= -\sqrt{\frac{k T_e}{m_i}} \quad \text{the Bohm velocity} \\ T_e(t, l) &= T_e(l). \end{aligned}$$

The coefficients of system (10)-(13) depend on the unknown functions and the total current density. The total current density appears on the right hand side of Eq. (12) and moreover on the left and right hand side of Eq. (13). Indeed, the electron velocity V_e can be expressed in terms of the total current density I from the definition of the total current density, $I = e(n_i V_i - n_e V_e)$. Thus we have $V_e = V_i - \frac{I}{n_i e}$. **However, the total current density is given by a functional, therefore the coefficients of the system have non-local (functional) dependence on the solution.**

Further simplifications of the model are still possible. To accelerate the numerical computations, the time derivative in the electron energy equation can be neglected. As the result we obtain the hyperbolic system of three equations, where the electron temperature is formally given by an integral equation. Consequently we have to deal with systems whose coefficients and possible also boundary conditions (Bohm condition for V_i) are functionally dependent on two functionals: the total current density and the electron temperature.

The purpose of the dissertation is to prove, that these simplified systems modeling the plasma have unique, continuously differentiable solutions, which are also continuously dependent on the initial and boundary conditions. From the mathematical point of view we consider the general case of the quasilinear hyperbolic system whose coefficients and boundary conditions may functionally depend on solutions:

$$u_{,t} + A[u]u_{,x} = b[u], \tag{14}$$

$$u(0, x) = u^0(x), \quad x \in [0, l], \tag{15}$$

where the functional dependence refers to the variable x only. Thus u in $A[u]$, $b[u]$ and $D[u]$, $L[u]$, $L^{-1}[u]$ (below) is treated as a function of x , parametrically dependent on t . Similarly we admit that the operators A , b , D , L are parametrically dependent on t . For simplicity the dependence on t is not marked explicitly.

Let

$$X_0 = \left\{ u \in C([0, l]); \|u\|_0 := \sup_{x \in [0, l]} \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} < \infty \right\}.$$

$$X_1 = \{u \in C^1([0, l]); \|u\|_1 := \|u\|_0 + \|u_{,x}\|_0 < \infty\}.$$

We assume that for a given u from an open ball $B_r^1(u^0) \subset X_1$ with radius r , centered at u^0 , the matrix $A[u]$ ($t \in [0, T_0]$) has real eigenvalues $\xi_1[u], \dots, \xi_n[u]$ and can be diagonalized:

$$A[u] = L^{-1}[u] D[u] L[u],$$

$$D[u] = \text{diag}[\xi_1[u], \dots, \xi_n[u]], \quad L[u] = \begin{bmatrix} L_1[u] \\ \vdots \\ L_n[u] \end{bmatrix}.$$

The rows of the nonsingular matrix $L[u]$ are the left eigenvectors of $A[u]$ and $L^{-1}[u]$ is the inverse of $L[u]$.

If m_1 is the number of characteristics (including multiplicities) entering the domain through the boundary $(t, 0)$ at $x = 0$, then we assume m_1 boundary conditions of the form

$$F_j(t, u(t, 0), \varphi_j(t)) = 0, \quad j = 1, \dots, m_1, \tag{16}$$

where in general $\varphi_j(t)$ can be expressed by Stieltjes integral

$$\varphi_j(t) = \int_0^l K_j(t, y, u(t, y)) dg_j(y). \tag{17}$$

Functions $F_j \in C^1(\mathbb{R}^{n+2})$, $j = 1, \dots, m_1$.

Similarly we proceed for the right boundary (t, l) , $t > 0$.

It is also required that the consistency conditions between the boundary and initial conditions must hold at $(0, 0)$ and $(0, l)$ to avoid discontinuities at the characteristics starting from those points (pp 105-106). Moreover we need some nondegeneracy conditions for $x = 0$ and $x = l$ (pp

106).

For the operators L, L^{-1}, D, Z ($Z = Lb$) denoted below by K we assume that the following conditions are true:

(A₁) $K : B_r^1(u^0) \rightarrow X_1$ and for some constant $C < \infty$: $\|K[v]\|_1 \leq C$ for all $v \in B_r^1(u^0)$,

(A₂) L is a continuous nonlinear operator, $L : B_r^1(u^0) \rightarrow X_1$. In addition we assume that L is Fréchet differentiable and the derivative L'' can be continuously extended on X_0 , ie.

$$\exists C > 0 \forall v \in B_r^0(u^0) \subset X_0 \forall h \in X_0 \|L'(v)h\|_0 \leq C\|h\|_0.$$

(A₃) $L[v]$ is of C^1 class with respect to the parameter t and there is a constant C such that $\|\frac{\partial}{\partial t}L[v]\|_0 \leq C, v \in B_r^1(u^0)$.

(A₄) For $|x - \bar{x}| \leq \delta$ and all $v \in B_r^1(u^0)$, there is a constant C and a function $N(\delta), N(\delta) \rightarrow 0$ as $\delta \rightarrow 0$ such that

$$\left| \frac{\partial}{\partial x}K[v](t, x) - \frac{\partial}{\partial x}K[v](t, \bar{x}) \right| \leq C|v_x(x) - v_x(\bar{x})| + C|v(x) - v(\bar{x})| + N(\delta),$$

where K stands for L, D, Z . $|\cdot|$ denotes the Euclidean metric.

(A₅) There exists a constant C that $\|K[v] - K[\bar{v}]\|_0 \leq C\|v - \bar{v}\|_0$ for $v \in B_r^1(u^0)$, where K stands for L, L^{-1}, D, Z .

Then we prove the following

Theorem

Under the conditions stated above, there exists a local in time, unique solution of class C^1 of the problem (14)-(15), (16)-(17).

The system (10)-(13) with the definition (9) of the total current density describing the plasma flow in the Hall thruster appears to be a particular example satisfying the assumptions (A₁) – (A₅).

Wstęp

0.1 Omówienie pracy

Praca składa się z pięciu rozdziałów. W **pierwszym rozdziale** omawiamy budowę i zasadę działania silnika Halla, a następnie różne warianty modelu płynowego opisującego zachowanie się plazmy w silniku.

W silniku typu Halla plazma porusza się w poprzek radialnego pola magnetycznego w cylindrycznym tunelu. Pole magnetyczne jest wystarczająco silne, żeby wpływać na elektrony, ale nie na jony ($\frac{m_e}{m_i} \approx 10^{-5}$). Dlatego jony poruszają się praktycznie wzdłuż osi X, natomiast elektrony dryfują w skrzyżowanych polach - elektrycznym i magnetycznym. Większość elektronów pozostaje w pobliżu końca tunelu, natomiast jony są przyspieszane powodując odrzut. Elektrony zderzają się z wyrzucanymi z obszaru anody atomami neutralnymi powodując ich jonizację. Jednym z prostszych sposobów modelowania plazmy jest traktowanie jej jako trzyskładnikowego płynu składającego się z:

- atomów neutralnych o gęstości N_a i prędkości V_a ,
- elektronów o gęstości n_e i prędkości V_{ex} ¹ wzdłuż osi X oraz prędkości azymutalnej $V_{e\theta}$,
- jonów o gęstości n_i i prędkości V_i .

W istocie jest nawet więcej składników - oprócz jonów pojedynczych Xe^+ mamy również podwójne Xe^{++} . Jony mogą być traktowane jako zimny płyn z temperaturą zero, podczas gdy elektrony są relatywnie gorące. Stąd oprócz równań ciągłości i pędu potrzebne jest równanie energii, które definiuje temperaturę elektronów. Przy założeniu symetrii cylindrycznej dostajemy układ wyjściowy, który składa się z ośmiu równań (1.1) - (1.8) (§1.2.2):

1. równanie ciągłości dla atomów neutralnych,
2. równanie ciągłości dla jonów,
3. równanie ciągłości dla elektronów,
4. równanie pędu dla jonów,
5. równanie pędu dla elektronów w kierunku osi X,
6. równanie pędu dla elektronów w kierunku azymutalnym,
7. równanie energii dla elektronów,
8. równanie Poissona dla potencjału pola elektrycznego.

¹Dla uproszczenia notacji będziemy również często używać oznaczenia V_e w wyrażeniach, gdzie nie będzie występowała prędkość azymutalna elektronów.

Formalnie całkując ostatnie równanie otrzymujemy układ siedmiu równań, w którym prawa strona zależy funkcjonalnie od rozwiązania (ze względu na pole elektryczne wyrażone funkcjonalnie względem n_e i n_i). Układ ten jest jednak słabo hiperboliczny. Można pokazać, że posiada on co prawda rozwiązanie, ale ponieważ układy słabo hiperboliczne są niestabilne ze względu na zaburzenia prawej strony, to w obliczeniach należy się spodziewać niestabilności numerycznych. Fakt, że $\frac{n_i - n_e}{n_i} \approx 10^{-5}$ wpływa również na złe uwarunkowanie równań i pojawienie się dużego błędu w obliczeniach numerycznych. Na przykład wyznaczenie n_i i n_e z dokładnością do 1% nie pozwala znaleźć pola elektrycznego, a więc ruchu. Z powodu powyższych trudności dokonujemy pewnych sensownych przybliżeń pozwalających sprowadzić układ ośmiu równań (1.1) - (1.8) do prostszego, bardziej stabilnego układu. Przede wszystkim zakłada się elektryczną quasi-neutralność, czyli równość gęstości elektronów i jonów: $n_e \approx n_i$, co pozwala wyznaczyć E jako swego rodzaju siłę reakcji (podobnie jak ciśnienie w przybliżeniu cieczy nieściśnialnej). Biorąc pod uwagę, że w przypadku ksenonu masa elektronu m_e jest znacznie mniejsza niż masa jonu ($m_e \approx 10^{-5}m_i$), w równaniach pędu dla elektronów zaniedbujemy człony inercyjne i w ten sposób otrzymujemy uogólnione prawo Ohma.

Ostatecznie dochodzimy do układu czterech równań (układ standardowy) na zmienne N_a , n_i , V_i , T_e (temperatura elektronów):

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} + \frac{\partial(N_a V_a)}{\partial x} = -\beta N_a n_e, \quad (18)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(V_i n_i)}{\partial x} = \beta N_a n_e, \quad (19)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{1}{n_e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kT_e}{m_i} n_e \right) = \nu_{eff} \left(\frac{I}{n_e e} - V_i \right) + \beta N_a (V_a - V_i), \quad (20)$$

$$\frac{n_e}{\sqrt{T_e}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T_e^{\frac{3}{2}}}{n_e} \right) + V_e \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T_e^{\frac{3}{2}}}{n_e} \right) \right] = Q_2, \quad (21)$$

gdzie całkowity prąd:

$$I(t) = \left(\int_0^L \frac{\nu_{eff}}{e n_e} dx \right)^{-1} \cdot \left[\frac{e}{m_i} U_0 + \int_0^L \left(\nu_{eff} V_i + \frac{1}{n_e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kT_e}{m_i} n_e \right) \right) dx \right], \quad (22)$$

oraz

$$V_e = V_i - \frac{I}{n_e e}.$$

Równania (18) - (21) są to odpowiednio: równanie ciągłości dla atomów neutralnych, równanie ciągłości dla jonów, równanie pędu dla jonów, równanie na temperaturę elektronów.

Układ równań należy uzupełnić warunkiem quasi-neutralności $n_e = n_i$. Jednakże, jak łatwo zauważyć, dla $n_e = n_i = 0$ niektóre współczynniki występujące w układzie stają się osobliwe. Ponieważ nawet w przypadku, gdy $n_i = 0$, przez układ płynie pewien mały prąd resztkowy, któremu odpowiada pewna resztkowa gęstość elektronów n_r , wobec tego w układzie przynajmniej w mianownikach należy zastąpić n_e nie przez n_i , ale przez $n_i + n_r$. W ten sposób unikamy osobliwości. Tak otrzymany układ (18) - (22) jest hiperboliczny.

Układ zredukowany

Jeśli - dla przyspieszenia obliczeń numerycznych - pominiemy w (21) pochodną po czasie (uproszczenia modelu są omówione szerzej w § 1.2.3), to otrzymamy układ zredukowany postaci

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} + \frac{\partial(N_a V_a)}{\partial x} = -\beta N_a n_e,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i V_i)}{\partial x} &= \beta N_a n_e, \\ \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{5kT_e}{3m_i n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} &= \nu_{eff} \left(\frac{I}{n_e e} - V_i \right) + \beta N_a (V_a - V_i) - \frac{2kQ_2}{3m_i V_e}, \end{aligned}$$

przy czym temperatura elektronów T_e wyraża się w następujący sposób

$$T_e^{\frac{3}{2}}(x) = n_e \left(\int_L^x \frac{Q_2 \sqrt{T_e}}{V_e n_e} dx + \frac{T_e^{\frac{3}{2}}(L)}{n_e(t, L)} \right).$$

Dla tego układu zadajemy warunki brzegowe dla funkcji $N_a(t, 0) = N_{a0}$ oraz $V_i(t, 0) = -\sqrt{\frac{kT_e}{m_i}}$. Współczynniki postaci zredukowanej (tzn. T_e i I), jak również warunek brzegowy na V_i , zależą funkcjonalnie od rozwiązania.

Twierdzenie o istnieniu jednoznacznych rozwiązań powyższych zagadnień początkowo - brzegowych stanowiło motywację do powstania tej rozprawy doktorskiej. W pracy został jednakże rozważony ogólny przypadek hiperbolicznego układu równań quasi-liniowych, w którym wszystkie współczynniki i warunki brzegowe mogą zależeć funkcjonalnie od rozwiązania.

W następnych dwóch **rozdziałach (2 i 3)** dla kompletności rozważań zostało przedstawione zagadnienie Cauchy'ego dla liniowego i quasi-liniowego układu hiperbolicznego. Jest to rozwinięcie skrótowych dowodów zamieszczonych w książce B.L. Rozhdestvenskiego i N.N. Yanenki [29]. W obu przypadkach dowody opierają się na zastosowaniu metody charakterystyk. Twierdzenie o istnieniu dla układu liniowego ma znaczenie nie tylko merytoryczne jako prostszy przypadek, ale jest istotnym faktem, na który powołujemy się w dowodzie istnienia dla układu quasi-liniowego.

Ostatni paragraf rozdziału drugiego jest efektem pracy ([34]) nad osłabieniem założeń dla twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania uogólnionego. Dla układu liniowego ze współczynnikami i warunkiem początkowym klasy C^k , $k \geq 1$, istnieje rozwiązanie klasy C^k . Powstaje pytanie, na ile to twierdzenie daje się uogólnić dla przypadku $k = 0$. Zostało pokazane, że poza ciągłością współczynników, wektory własne macierzy układu muszą być funkcjami o wahanii ograniczonym wzdłuż charakterystyk.

Rozdział czwarty i piąty zawierają uogólnienie twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności dla quasi-liniowego układu hiperbolicznego z dwiema zmiennymi niezależnymi i stanowią główny rezultat pracy.

Czwarty rozdział poświęcony jest twierdzeniu o istnieniu i jednoznaczności lokalnego w czasie, różniczkowalnego rozwiązania układu postaci

$$u_{,t} + A[u]u_{,x} = b[u], \quad (23)$$

z warunkiem początkowym

$$u(0, x) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (24)$$

Zakładamy, że dla dowolnej funkcji u z pewnej kuli $B_r^1(u^0)$ (kula otwarta o środku u^0 i promieniu r z przestrzeni Banacha $X_1 = \{u \in C^1(\mathbb{R}); \|u\|_1 := \|u\|_0 + \|u_{,x}\|_0 < \infty\}$, gdzie $\|u\|_0 := \sup_{x \in \mathbb{R}} \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$) macierz $A[u]$ ($t \in [0, T]$) ma rzeczywiste wartości własne $\xi_1[u], \dots, \xi_n[u]$ i jest diagonalizowalna

$$A[u] = L^{-1}[u]D[u]L[u],$$

$$D[u] = \text{diag}[\xi_1[u], \dots, \xi_n[u]], \quad L[u] = \begin{bmatrix} L_1[u] \\ \vdots \\ L_n[u] \end{bmatrix}.$$

gdzie A, L, L^{-1}, D i b są operatorami o wartościach macierzowych. Wiersze nieosobliwej macierzy $L[u]$ są liniowo niezależnymi lewymi wektorami własnymi macierzy $A[u]$.

Zakładamy, że istnieje kula $B_r^1(u^0)$ w X_1 taka, że dla każdego $t \in [0, T]$ zachodzą następujące warunki:

- (A₁) $K : B_r^1(u^0) \rightarrow X_1$ i dla pewnej stałej $C < \infty$: $\|K[v]\|_1 \leq C$ dla dowolnego $v \in B_r^1(u^0)$, gdzie K oznacza L, L^{-1}, D, Z ($Z = Lb$).
- (A₂) L jest ciągłym nieliniowym operatorem, $L : B_r^1(u^0) \rightarrow X_1$. Zakładamy, że L jest różniczkowalny w sensie Frécheta i dodatkowo przyjmujemy, że pochodna $L' : X_1 \rightarrow X_1$ może być rozszerzona w sposób ciągły na całą przestrzeń X_0 , tzn.
 $\exists C > 0 \forall v \in B_r^1(u^0) \forall h \in X_1 \|L'(v)h\|_0 \leq C\|h\|_0$.
- (A₃) $L[v]$ jest klasy C^1 ze względu na parametr t i istnieje stała C taka, że $\|\frac{\partial}{\partial t}L[v]\|_0 \leq C$, $v \in B_r^1(u^0)$.
- (A₄) Dla $|x - \bar{x}| \leq \delta$ i dla każdego $v \in B_r^1(u^0)$, istnieje stała C i funkcja $N(\delta)$, $N(\delta) \rightarrow 0$ jeśli $\delta \rightarrow 0$ taka, że

$$\left| \frac{\partial}{\partial x}K[v](t, x) - \frac{\partial}{\partial x}K[v](t, \bar{x}) \right| \leq C|v_{,x}(x) - v_{,x}(\bar{x})| + C|v(x) - v(\bar{x})| + N(\delta),$$

gdzie K oznacza L, D, Z . $|\cdot|$ - metryka euklidesowa.

- (A₅) Istnieje stała C , że $\|K[v] - K[\bar{v}]\|_0 \leq C\|v - \bar{v}\|_0$ dla $v \in B_r^1(u^0)$, gdzie K symbolizuje L, L^{-1}, D, Z .

Przy powyższych założeniach formułujemy główne twierdzenie tego rozdziału: *Istnieje lokalne w czasie, jednoznaczne rozwiązanie zagadnienia (23) - (24)*.

Jak zauważamy na stronie 56, operatory występujące we współczynnikach modelu zachowania plazmy spełniają założenia (A₁) - (A₅) twierdzenia o istnieniu.

Schemat dowodu twierdzenia jest podobny jak dla przypadku "zwykłego" układu quasi-liniowego. Tworzymy układ przedłużony, który wiąże funkcje u i p ($p = L[u(t, \cdot)]_{u,x}$). Dowodząc jednoznaczności korzystamy z założeń o operatorach (ograniczoność i warunek Lipschitza). Istnienie rozwiązania pokazujemy korzystając z metody kolejnych przybliżeń. Kolejne przybliżenia $u^{(s+1)}$ są rozwiązaniami liniowych zagadnień początkowych postaci

$$L[u^{(s)}]_{u,t}^{(s+1)} + D[u^{(s)}]_{u,x}^{(s)} L[u^{(s)}]_{u,x}^{(s+1)} = Z[u^{(s)}] \quad (25)$$

$$u^{(s+1)}(0, x) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (26)$$

Twierdzenie o istnieniu dla układu liniowego gwarantuje istnienie rozwiązania $u^{(s+1)}$ klasy C^1 w kuli $B_r^1(u^0)$.

Zapisujemy kolejne przybliżenia dla układu przedłużonego. Najpierw pokazujemy, że ciąg $\{u^{(s)}\}$ jest zbieżny w przestrzeni Banacha $C([0, t_*] \times \mathbb{R})$, gdzie czas t_* jest określony wzorem (4.20).

Następnie dowodzimy, że ciąg $\{p^{(s)}\}$ jest jednostajnie zbieżny na zwartych podzbiorach \mathbb{R} dla ustalonego $t \in [0, t_*]$. Jednak aby to pokazać musimy skorzystać z twierdzenia Arzeli-Ascoli,

ponieważ prawa strona układu przedłużonego nie spełnia warunku Lipschitza względem u . Wykazujemy zatem jednakową ciągłość względem x (dla ustalonego t) funkcji należących do ciągu $\{p^{(s)}\}$ na dowolnym zbiorze zwartym. Zauważamy ponadto, że para $(u^{(s)}, p^{(s)})$ dla dowolnego $s = 0, 1, \dots$ należy do kuli $B_r^*(u^0, p^0)$ dla $t \in [0, t_*)$.

W **rozdziale piątym** rozpatrujemy problem początkowo-brzegowy na odcinku $[0, l]$ dla równania (23), gdzie również warunki brzegowe zależą funkcjonalnie od rozwiązania. Rozważania zaczynamy od jednego równania liniowego

$$u_{,t} + \xi(t, x) u_{,x} = b(t, x) + B(t, x) u \quad (27)$$

z dwoma warunkami:

- początkowym $u(0, x) = u^0(x)$ dla $x \in [0, l]$
- i brzegowym zadaniem na lewym brzegu prostokąta $G_{T_0} = [0, T_0] \times [0, l]$ ze względu na założenie, że $\xi(t, x) > 0$ dla $(t, x) \in G_{T_0}$.

Warunek brzegowy jest w postaci

$$u(t, 0) = u_b(t) = q \left(t, \int_0^l K(t, y, u(t, y)) dg(y) \right), \quad t \in [0, T_0].$$

Wyraża on zależność funkcji u na brzegu $x = 0$ od czasu t i w sposób funkcjonalny od u w całym prostokącie G_{T_0} . Chcemy, żeby ta zależność była możliwie ogólna i wobec tego zakładamy ją w postaci całki Stieltjesa. Jest to odbicie twierdzenia, że każdy funkcjonal liniowy i ciągły na przestrzeni funkcji ciągłych można przedstawić jako całkę Stieltjesa względem funkcji o wahanii skończonym (Twierdzenie 10.18, str. 165, [2]). Stąd - ponieważ dopuszczamy funkcjonal nieliniowy - funkcja q może w ogólności zależeć od całki Stieltjesa z funkcji $K(t, y, u(t, y))$. Podobny warunek założymy dla układu quasi-liniowego z funkcjonalną zależnością współczynników od rozwiązania. W zastosowaniach tego typu równanie spotyka się w dynamice populacji (Lotka-McKendric equation).

Na twierdzenie o istnieniu różniczkowalnego rozwiązania równania (27) powołamy się w dowodzie twierdzenia o istnieniu dla układu równań. Ponadto pewne techniczne szczegóły dowodu dla układu są lepiej widoczne w prostszym przypadku jednego równania.

Najpierw wykazujemy istnienie rozwiązania uogólnionego równania (27) przy założeniu ciągłości współczynników ξ , b , B (ξ dodatkowo spełnia warunek Lipschitza ze względu na x) oraz warunku początkowego i funkcji q , K (K spełnia również warunek Lipschitza ze względu na trzecią zmienną, natomiast q - ze względu na drugą zmienną). Przyjmujemy też, że g jest prawostronnie ciągła w zerze. Aby uzyskać rozwiązanie ciągłe w całym prostokącie G_{T_0} , a dokładniej - na charakterystyce startującej z punktu $(0, 0)$, zakładamy tzw. pierwszy warunek zgodności, czyli równość danych początkowych dla $x = 0$ i danych na brzegu dla $t = 0$: $u_b(0) = u^0(0)$.

Następną częścią tego rozdziału jest twierdzenie dla równania (27) o istnieniu rozwiązania klasy C^1 . Dla zapewnienia ciągłości rozwiązania w tym przypadku potrzebujemy jeszcze drugiego warunku zgodności wynikającego z postaci równania:

$$u_{b,t}(0) + \xi(0, 0) u_{,x}^0(0) = b(0, 0) + B(0, 0) u^0(0).$$

Kolejny etap rozważań dotyczy układu liniowego złożonego z trzech równań z diagonalną (dla ułatwienia na początku) macierzą układu. Zakładamy, że są dwie rodziny charakterystyk wchodzących - jedna przez lewy ($\xi_1 > 0$), a druga przez prawy ($\xi_2 < 0$) brzeg prostokąta G_{T_0} . Trzecia

rodzina ma tylko krzywe wychodzące z G_{T_0} . Stąd przyjmujemy dwa warunki brzegowe

$$\begin{aligned} u_1(t, 0) &= u_{b1}(t) = q_1 \left(t, u_2(t, 0), u_3(t, 0), \int_0^l K_1(t, y, u_1, u_2, u_3) dg_1(y) \right), \\ u_2(t, l) &= u_{b2}(t) = q_2 \left(t, u_1(t, l), u_3(t, l), \int_0^l K_2(t, y, u_1, u_2, u_3) dg_2(y) \right). \end{aligned}$$

W ostatniej części tego paragrafu podajemy twierdzenie o istnieniu różniczkowalnego rozwiązania sformułowane dla n równań.

Naszym celem jest dowód istnienia rozwiązania zagadnienia początkowo-brzegowego dla quasi-liniowego układu hiperbolicznego z funkcjonalną zależnością współczynników (a więc również i charakterystyk) oraz warunku brzegowego od rozwiązania. Jednak, aby to osiągnąć przy pomocy metody kolejnych przybliżeń, potrzebujemy twierdzenia o istnieniu dla układu liniowego. W ostatniej części rozdziału piątego zajmujemy się problemem istnienia rozwiązania zagadnienia mieszanego dla układu (23) z rozdziału czwartego, czyli z funkcjonalną zależnością współczynników od rozwiązania. Nie przedstawiamy całego dowodu, a jedynie fragmenty, które różnią się w stosunku do rozdziału czwartego ze względu na funkcjonalny warunek brzegowy.

W drugiej części wstępu podamy uwagi historyczne dotyczące układów hiperbolicznych. Odniesiemy się w nich do wybranych prac z tej dziedziny. Teraz jednak zwrócimy uwagę na dwóch autorów Z. Kamonta i J. Turo ze względu na bliskość rozważanych przez nich problemów i zagadnień poruszonych w rozprawie.

Z. Kamont [23] i J. Turo [30], [31], [32], [33] w swoich pracach (częściowo inspirowanych przez prace M. Cinquini Cibrario i L. Cesari) zajmowali się szeregiem przypadków zależności funkcjonalnej w układach quasi-liniowych z wieloma zmiennymi w postaci kanonicznej Schaudera zarówno dla problemu początkowego jak i mieszanego. W wymienionych artykułach Z. Kamonta i J. Turo występuje funkcjonalna zależność ze względu na wszystkie zmienne. W pracy [33] funkcjonalnie od rozwiązania zależą zarówno współczynniki układu jak i warunek brzegowy. Zakładając lipschitzowskość współczynników i warunków brzegowych ze względu na obie zmienne autor dowodzi istnienia uogólnionego rozwiązania układu spełniającego warunek Lipschitza ze względu na (x, y) . Jednak ciągła zależność od danych początkowych nie jest wykazana w normie Lipschitza, a jedynie w normie supremum. Ponadto - jak się wydaje ² - założenia dotyczące warunków brzegowych są ograniczające. Nie odpowiadają one w pełni wymaganiom stawianym przez rozważane modele zachowania plazmy w silniku Halla. Warunki brzegowe przyjęte w rozprawie są ogólniejsze.

W podejściu, które jest prezentowane w rozdziale czwartym i piątym rozprawy, funkcjonalna zależność dotyczy tylko jednej zmiennej x . Zajmujemy się układem z dwiema zmiennymi niezależnymi i w przeciwieństwie do [33] pokazujemy zależność od danych początkowych w topologii C^1 . Zakładamy też, że warunek brzegowy zależy w sposób funkcjonalny od wszystkich składowych funkcji wektorowej u .

Quasi-liniowy układ hiperboliczny w postaci Schaudera jest szczególnym, rzadko spotykanym w praktyce układem z wieloma zmiennymi. Rezultaty uzyskane w rozprawie można również przenieść na tego typu układy z wieloma zmiennymi. Dla dwóch zmiennych każdy układ sprowadza się do postaci kanonicznej Schaudera.

Główne wyniki niniejszej rozprawy zostały opublikowane w pracach [34] i [35]. Dały one pozytywną odpowiedź na pytanie o istnienie rozwiązania układu równań różniczkowych cząstkowych modelujących zachowanie plazmy w silniku jonowym typu Halla.

²Praca [33] jest trudno czytelna.

0.2 Uwagi historyczne

Hiperboliczny układ równań quasi-liniowych był rozważany przez wielu matematyków przy różnorodnych założeniach o współczynnikach i danych początkowych a także strukturze układu. W 1927 roku Levy [25] pokazał, że rozwiązywanie zagadnienia Cauchy'ego dla hiperbolicznego układu równań liniowych z dwiema zmiennymi niezależnymi sprowadza się do rozwiązywania zagadnienia Cauchy'ego dla układu równań różniczkowych zwyczajnych. Ta praca dała podstawy klasycznej metody charakterystyk.

W 1948 r. K.O. Friedrichs [17] rozpatrzył zagadnienie Cauchy'ego dla hiperbolicznego układu równań liniowych, półliniowych i quasi-liniowych. Dla przypadku liniowego autor założył różniczkowalność w sposób ciągły lewych wektorów własnych i wartości własnych macierzy układu oraz ciągłość prawej strony układu i warunku początkowego. Przy tych założeniach dowiódł istnienia rozwiązania słabego. Dla układu quasi-liniowego Friedrichs przyjął wszystkie współczynniki układu i warunek początkowy klasy C^2 i uzyskał rozwiązanie klasy C^2 .

Courant i Lax w pracy [14] posłużyli się przedstawieniem układu przedłużonego w inwariantach.

Natomiast Hartman i Wintner [20] dowiedli metodą charakterystyk istnienia i jednoznaczności rozwiązania klasy C^1 układu quasi-liniowego przy założeniu, że wszystkie współczynniki i warunek początkowy są klasy C^1 .

W tym samym roku A. Douglis [15] uzyskał podobny wynik jak Hartman i Wintner.

Istotnych uproszczeń w dowodzie istnienia, bazującego na pracy [20], dla układu quasi-liniowego w postaci wprowadzenia układu majoryzującego i oszacowań wzrostu rozwiązania dokonali w swojej książce Rozhdstvenski i Yanenko [29].

W dziedzinie hiperbolicznych układów równań quasi-liniowych dużą rolę odegrali matematycy włoscy. Maria Cinquini Cibrario w pracach [11], [12] udowodniła istnienie i jednoznaczność uogólnionego rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego dla układu quasi-liniowego w postaci kanonicznej Schaudera:

$$\sum_{j=1}^m A_{ij}(t, x, u) \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^r \rho_{ik}(t, x, u) \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) = f_i(t, x, u), \quad i = 1, \dots, m, \quad (28)$$

$$u(0, x) = \varphi(x). \quad (29)$$

$$\det A_{ij} \neq 0, \quad u(t, x_1, \dots, x_r) = [u_1, \dots, u_m]^T,$$

przy następujących założeniach dla współczynników:

1. dla A_{ij} , $i, j = 1, \dots, m$:

- $|A_{ij}(t, x, u) - A_{ij}(\bar{t}, x, u)| \leq \int_t^{\bar{t}} \mu_{ij}(\tau) d\tau$, gdzie $0 \leq t < \bar{t} \leq a_0$ oraz μ_{ij} funkcje absolutnie ciągłe, nieujemne i całkowne w $(0, a_0)$;
- $|A_{ij}(t, x, u) - A_{ij}(t, \bar{x}, \bar{u})| \leq \Lambda \sum_{k=1}^r |x_k - \bar{x}_k| + \Lambda \sum_{s=1}^m |u_s - \bar{u}_s|$;

2. dla ρ_{ik} , $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, r$ (oraz analogiczne dla f_i):

- $|\rho_{ik}(t, x, u)| \leq M_k(t)$;
- $|\rho_{ik}(t, x, u) - \rho_{ik}(t, \bar{x}, \bar{u})| \leq L(t) \sum_{\nu=1}^r |x_\nu - \bar{x}_\nu| + \sum_{s=1}^m |u_s - \bar{u}_s|$, gdzie $M_k(t)$, $L(t)$ funkcje absolutnie ciągłe, nieujemne i całkowne w $(0, a_0)$;

3. funkcja φ spełnia warunek Lipschitza.

Uzyskane zostało rozwiązanie absolutnie ciągle ze względu na t i lipschitzowskie względem x_1, \dots, x_r (w dowodzie jednoznaczności [12] spełniające nawet warunek ogólniejszy $|z_j(t, x) - z_j(t, \bar{x})| \leq \sum_{k=1}^r w_{jk}(t) \cdot |x_k - \bar{x}_k|$).

L. Cesari [10] przedstawił dowód istnienia i jednoznaczności uogólnionego rozwiązania układu (28) z warunkiem brzegowym postaci $\sum_{j=1}^m b_{ij} u_j(a_i, x) = \psi_i(x)$, $x \in \mathbb{R}^r$, $i = 1, \dots, m$, przy założeniach dla współczynników jak w pracach M. Cinquini Cibrario. Podobnymi problemami zajmował się P. Bassanini [5]. Na uwagę zasługują również prace M.G. Cazzani Nieri dotyczące problemu Cauchy'ego dla układu półliniowego [7], [8] oraz zagadnienia mieszanego dla układu quasi-liniowego [9].

Wymienione powyżej prace dotyczą układów liniowych i quasi-liniowych bez funkcjonalnej zależności współczynników od rozwiązania.

L. Bobisud [6] rozważał układ ze szczególną prawą stroną

$$\begin{aligned} u_t + B(t, x, u) u_x &= f(t, x, u) + \int_{-\infty}^t k(t, x, \sigma, u(\sigma, x)) d\sigma \\ u(t, x) &= g(t, x), \quad t \leq 0, \quad x \in [-\beta, \beta], \end{aligned}$$

gdzie B - macierz diagonalna. Pokazał, podobnie jak w [18], istnienie jednoznacznego, lokalnego w czasie rozwiązania klasy C^1 zakładając, że $g, k, B, f \in C^2$ oraz warunek Lipschitza względem u dla wszystkich pochodnych funkcji k i f .

Rezultaty dla układu półliniowego z macierzą diagonalną i z prawą stroną oraz warunkami brzegowymi zależnymi funkcjonalnie od rozwiązania otrzymali Abolinia i Myszkis [1]. Dowiedli oni przy pewnych szczególnych założeniach istnienia rozwiązania uogólnionego i klasycznego.

Na rozważanej problematyce koncentrują się również polscy matematycy ze szkoły gdańskiej: Z. Kamont [23] oraz J. Turo [30], [31], [32], [33].

Wśród pozycji dotyczących układów hiperbolicznych należy zwrócić uwagę na książkę Couranta i Hilberta [13] oraz monografię A. Jeffrey'a [22].

Rozdział 1

Silnik Halla

Silnik Halla inaczej nazywany również silnikiem z poprzecznym dryfem elektronów lub silnikiem plazmowym (SPT - Stationary Plasma Thruster), jest typem elektrycznego silnika raketowego, który wykorzystuje pole elektryczne do przyspieszania dodatnio naładowanych cząstek. Są one wyrzucane z dyszy z dużą prędkością i w ten sposób siłą napędową staje się siła odrzutu. Jest ona wprawdzie niewielka w porównaniu z ciężarem pojazdu, ale w warunkach kosmicznych (brak oporu) po dłuższym okresie czasu, może dawać znaczny wzrost prędkości. Stąd silniki mogą być szczególnie przydatne w dłuższych misjach.

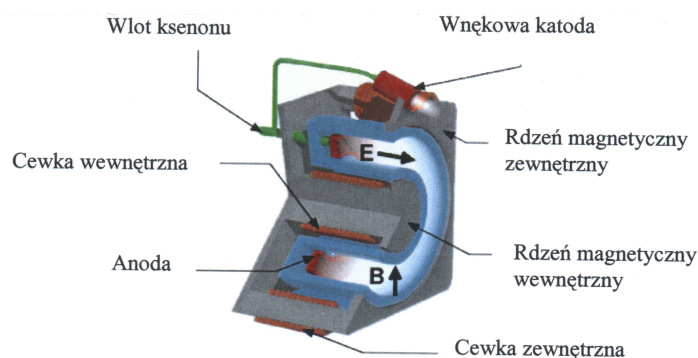
Badania nad silnikami typu Halla rozpoczęły się na początku lat sześćdziesiątych, niezależnie w USA i w ZSRR [36]. Do końca dekady ustaliły się pewne cechy silnika, takie jak: zewnętrzne źródło elektronów np. w postaci wnekowej katody i zewnętrznie stosowane pole magnetyczne. W USA prace nad silnikiem miały znacznie mniejsze natężenie niż w ZSRR i zostały w dużym stopniu wstrzymane około 1970 r. ze względu na znaczne osiągnięcia w pracach nad precyzyjnymi silnikami konwencjonalnymi oraz silnikami elektrycznymi innego typu. Miarę wielkości programu badawczego w USA z tamtego okresu może charakteryzować liczba około 200 inżynierów i naukowców pracujących nad silnikami różnych typów, podczas gdy w ZSRR pod koniec lat osiemdziesiątych zespół badawczy składał się z około 2000-3000 osób. Stąd też można powiedzieć, że rozwój technologii związanej z silnikiem Halla w owym czasie jest głównie zasługą Rosjan.

Silnik typu Halla został zbudowany w ZSRR na początku lat siedemdziesiątych. W ciągu ostatnich trzydziestu lat Rosjanie umieścili na orbicie ponad 100 silników Halla z powodzeniem wykorzystywanych w satelitach jako silniki korekcyjne do utrzymywania pozycji na orbicie. Od lat dziewięćdziesiątych nad silnikiem Halla zaczęto pracować również w innych krajach, w szczególności w USA, we Francji i Japonii. Obecnie silniki tego typu są stosowane w wielu komercyjnych i eksperymentalnych (np. STENTOR, Francja) satelitach stacjonarnych. Technologia ta została użyta w 2003 roku przez Europejską Agencję Kosmiczną (ESA) w sondzie Smart-1 w misji do Księżyca. Głównym celem misji było przetestowanie napędu elektrycznego na dystansie zbliżonym do odległości międzyplanetarnych. Sonda przeleciała 84 mln km a dotarcie do Księżyca zajęło jej ponad rok. Zużyła jednak tylko 59 kg ksenonu z zapasu 82 kg jaki miała na start. Dzięki temu możliwe było obranie niższej orbity okołoksiężycowej. Smart-1 to druga sonda międzyplanetarna z silnikiem jonowym. Pierwsza była amerykańska Deep Space 1, która w październiku 1998 poleciała na spotkanie komety Borelly. Silnik sprawdził się na tyle zadowalająco, że ESA wyposaży w niego kolejne sondy. W sierpniu 2013 r. dzięki współpracy ESA z Japońską Agencją Kosmiczną, rozpocznie się misja BepiColombo, która ma polegać na umieszczeniu sondy na niskiej orbicie Merkurego. Szacuje się, że podróż będzie trwała około 6 lat i w sierpniu 2019 r. rozpocznie się zasadnicza część misji. Silnik jonowy będzie również napędzać Solar Orbitera, kolejną sondę ESA, która ma zostać wystrzelona w tym samym okresie

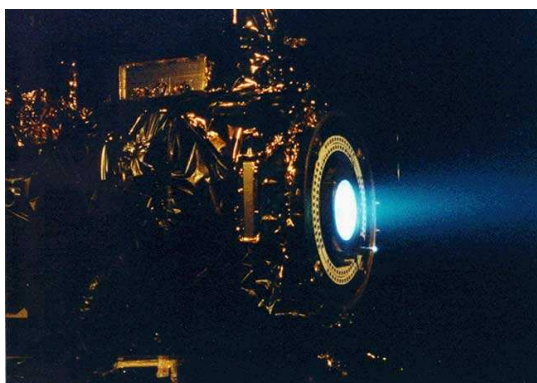
i wznieść się ponad płaszczyznę Układu Słonecznego. Silnik Halla sprawdził się w warunkach rzeczywistych również w latach 2001-2003. Posłużył do uratowania satelity Artemis, który 13 lipca 2001 został przez ракетę Ariane 5 umieszczony na niewłaściwej orbicie. Pierwsze manewry podnoszenia orbity wykonano za pomocą klasycznego napędu chemicznego i zużyto na to 95% paliwa. Ostatnie 5 tys. km satelita pokonał używając napędu jonowego i pod koniec stycznia 2003 Artemis osiągnął orbitę geostacjonarną.

1.1 Budowa i zasada działania

Schemat budowy silnika znajduje się na rysunku poniżej.



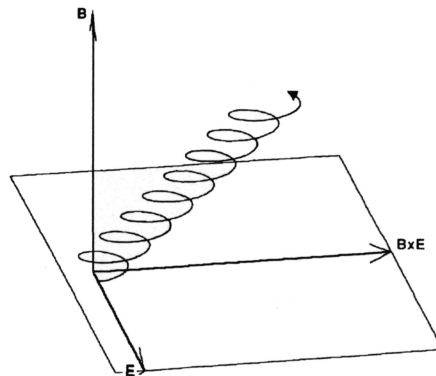
Rys. 1.1: Schemat budowy silnika typu Halla



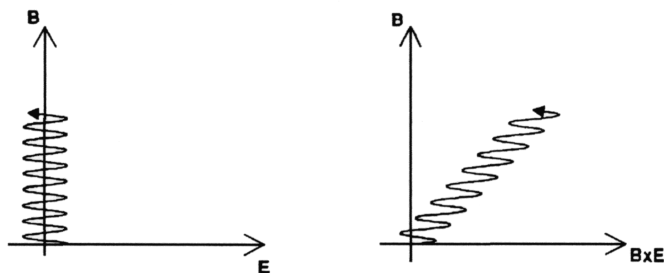
Rys. 1.2: Test silnika w laboratorium

Plazma generowana jest między dwoma współosiowymi cylindrami, wykonanymi z dielektrycznej ceramiki, z anodą na jednym końcu i wylotem gazu na drugim końcu pierścieniowego tunelu. Wewnątrz środkowego cylindra i na zewnątrz drugiego znajduje się układ cewek, który wytwarza radialne, prostopadłe do osi symetrii pole magnetyczne. Pole jest formowane na ogół w taki sposób, że indukcja pola magnetycznego jest największa blisko wylotu tunelu i maleje w kierunku anody. Różnica potencjałów między katodą i anodą wywołuje pole elektryczne skierowane wzdłuż osi tunelu, prostopadłe do linii pola magnetycznego. Na zewnątrz znajduje się wnękowa katoda, która emituje elektrony.

Od strony anody wpuszczany jest neutralny gaz, zazwyczaj ksenon lub krypton. Ksenon jest używany ze względu na dużą masę cząsteczkową i niski potencjał jonizacji.



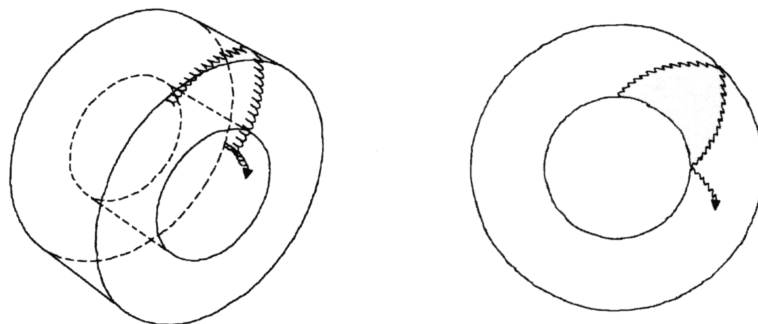
Rys. 1.3: Tor elektronu w skrzyżowanych polach B i E w przypadku różnej od zera początkowej prędkości w kierunku pola B



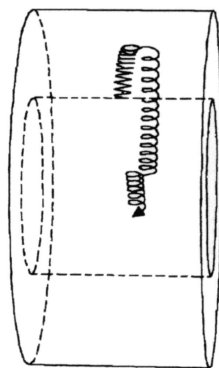
Rys. 1.4: Rzuty toru elektronu

Wewnątrz tunelu elektrony zderzają się z atomami ksenonu wybijając z nich nowe elektrony. Zderzenia elektronów z atomami ksenonu powodują, że w wyniku jonizacji atomów przybywają dodatkowe elektrony a także tworzą się jony dodatnie. W ten sposób natężenie prądu elektronowego rośnie w miarę posuwania się kierunku anody, natomiast prąd jonowy jest największy w pobliżu wylotu i stanowi tam do 80% całego prądu. Na skutek istnienia pola magnetycznego ruch elektronów w kierunku anody jest znacznie utrudniony. W istocie gdyby nie zderzenia ze ściankami oraz atomami neutralnymi elektrony poruszałyby się prostopadle do pola magnetycznego i elektrycznego, wykonując jedynie drobne oscylacje wzdłuż osi silnika związane z ruchem larmorowskim. Między kolejnymi zderzeniami ze ściankami tunelu (średnio 10^8 razy na sekundę), bądź z atomami, elektrony poruszają się po zdeformowanych liniach śrubowych, których "osie" leżą w płaszczyźnie prostopadłej do osi tunelu. Zderzenia powodują, że parametry tych orbit nagle się zmieniają i elektron może się przesunąć na sąsiednią orbitę larmorowską znajdującą się (ze względu na obecność pola elektrycznego) najczęściej bliżej anody. Tak więc ruch wzdłuż osi silnika ma charakter dyfuzyjny. W plazmie silnika płynie więc silny elektronowy prąd azymutalny, prostopadły zarówno do pola E jak i pola B (– zjawisko Halla), a jednocześnie znacznie słabszy elektronowy prąd dyfuzyjny wzdłuż osi silnika. Temu ostatniemu towarzyszy wydajne przyspieszanie jonów w kierunku od anody, kompensujące radykalne obniżenie poprzecznej ruchliwości elektronów w polu magnetycznym. Taka rola zjawiska Halla w procesie

przyspieszania jonów uzasadnia nazwanie tego urządzenia silnikiem Halla.¹ Ze względu na dużą masę jonów (dla ksenonu masa jonu jest około 10^5 razy większa niż masa elektronu), pole magnetyczne nie ma na nie znaczącego wpływu. Są one przyspieszane przez pole elektryczne i osiągają maksymalną prędkość przy wylocie.



Rys. 1.5: Ruch pojedynczego elektronu w silniku - widok z boku.
Ruch pojedynczego elektronu w płaszczyźnie prostopadłej do osi tunelu



Rys. 1.6: Elektron po zderzeniu ze ścianą tunelu "przeskakuje" na inną linię śrubową

Promień Larmora² dla jonu jest rzędu 1 m. Ponieważ długość tunelu z plazmą jest rzędu pojedynczych centymetrów, to można przyjąć, że jony poruszają się ruchem prostoliniowym wzdłuż osi tunelu. Po opuszczeniu silnika jony łączą się z elektronami emitowanymi z katody i już jako neutralne cząstki oddalają się z dużą prędkością (około 20 km/s) powodując siłę odrzutu. Zderzenia i rozproszenia elektronów na fluktuacjach pola elektrycznego (pojawiających się w wyniku rozwoju niestabilności plazmy) wywołują dyfuzję części elektronów emitowanych z katody do wnętrza komory silnika. Tak więc zderzenia i niestabilności (fluktuacje pola elektromagnetycznego wywołują ten sam efekt co zderzenia) pozwalają części elektronów uwolnić

¹W roku 1879 G.H. Hall zaprezentował doświadczenie, które pozwala określić znak ładunku. Płaski pasek miedziany, w którym płynie prąd został umieszczony w polu magnetycznym między biegunami elektromagnesu tak, że linie natężenia pola były prostopadle do płaszczyzny paska. Pole to działa na pasek powodując ruch ładunków w kierunku jednej krawędzi paska. Znak płynących ładunków jest określony przez znak wytworzonej różnicy potencjałów. Jeżeli ładunki mają znak dodatni, to po tej stronie paska, do której płyną ładunki, potencjał będzie wyższy, a jeżeli ujemny - będzie na odwrót.

²[Encyklopedyczny słownik techniczny, PWN, Warszawa 1967] Promień Larmora (dla cząstki wirującej) - promień toru kołowego lub śrubowego, wzdłuż którego wirują naładowane cząstki dookoła magnetycznych linii sił.

się z pola magnetycznego i przedostać się w kierunku anody. W ten sposób aż do 30% prądu wyładowania przy wylocie silnika stanowi prąd elektronowy, który nie daje ciągu. To ogranicza wydajność silnika. Pozostałe 70% prądu stanowią jony. Ponieważ elektrony podlegają zjawisku dryfu w skrzyżowanych polach elektrycznym i magnetycznym, więc długi czas pozostają w silniku i są zdolne zjonizować prawie wszystkie ($\sim 90\%$) cząsteczki ksenonu.

Typowe wielkości charakteryzujące silnik Halla model SPT-100 (100 mm średnicy zewnętrznego cylindra i 60 mm wewnętrznego) są następujące:

- Strumień ksenonu wpuszczany do kanału przy anodzie z wydajnością 5 mg/s
- Indukcja pola magnetycznego przy wylocie ~ 200 G
- Różnica potencjałów między anodą i katodą ~ 300 V
- Natężenie prądu ~ 5 A
- Prędkość jonów przy wylocie 15-20 km/s.

Obecna konstrukcja silnika Halla jest rezultatem badań głównie metodami eksperymentalnymi i mimo wielu lat pracy nadal są liczne możliwości ulepszeń. Wiele zjawisk dotyczących wydajności silnika nie jest jeszcze dobrze poznanych, jak np. pochodzenie oscylacji prądu elektronowego obserwowane eksperymentalnie, dokładny związek między topologią pola magnetycznego a zachowaniem silnika, dokładniejsza natura przewodnictwa elektronowego.

1.2 Modelowanie płynowe

1.2.1 Zmienne cylindryczne

Do matematycznego opisu zachowania plazmy w silniku przyjęto zmienne cylindryczne (x, r, θ) . Oś X jest zaczepiona na wysokości anody, natomiast wartości zmiennej x rosną w kierunku wylotu tunelu.

W układzie cylindrycznym prędkość płynu w punkcie (x_0, r_0, θ_0) można rozłożyć na składową osiową (wzdłuż osi X), radialną wzdłuż promienia wodzącego r_0 oraz azymutalną, tzn. składową prostopadłą do promienia wodzącego i osi X .

Pole magnetyczne jest skierowane radialnie. Dla ustalonego x indukcja pola magnetycznego jest nieco większa bliżej wewnętrznej ściany komory silnika. W rzeczywistości prędkości poruszania się i gęstości cząsteczek są zależne od współrzędnej r (odległości od osi symetrii). W modelu uśredniamy te funkcje względem zmiennej r .

Ze względu na symetrię obrotową, będziemy zakładać, że funkcje opisujące średnie prędkości cząsteczek nie zależą od kąta θ .

Ostatecznie funkcje występujące w modelu zależą tylko od zmiennych x i t , czyli położenia względem osi X i czasu.

1.2.2 Równania modelu jednowymiarowego niestacjonarnego

Jednym z prostszych sposobów modelowania plazmy w silniku jonowym jest potraktowanie plazmy jako wieloskładnikowego ośrodka ciągłego. Jest to tzw. model płynowy wyrażany w postaci równań różniczkowych cząstkowych [4], [27]. W najprostszej postaci mamy tu do czynienia z trzema płynami: płynem atomów neutralnych o gęstości N_a i prędkości V_a , płynem elektronów o gęstości n_e i prędkości V_e i płynem jonów o gęstości n_i i prędkości V_i . Płyn jonów

może być uważany za "zimny" z temperaturą zero, podczas gdy elektrony są relatywnie gorące (10 - 50 eV, co jest równoważne $10^5 - 5 \cdot 10^5$ K). Dlatego oprócz równania ciągłości i równania pędu, model powinien zawierać również równanie energii określające temperaturę elektronów. Ostatecznie na wyjściowy układ równań różniczkowych cząstkowych składają się:

- Równanie ciągłości dla atomów neutralnych

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} + \frac{\partial(N_a V_a)}{\partial x} = -\beta N_a n_e, \quad (1.1)$$

gdzie $\beta = \beta(T_e, E_{ke})$ - współczynnik jonizacji, który jest funkcją temperatury elektronów T_e i energii kinetycznej ruchu uporządkowanego elektronu

$$E_{ke} = \frac{1}{2} m_e (V_{ex}^2 + V_{e\theta}^2).$$

W większości prac zakłada się, że V_a jest stałe. W istocie prędkość ta wzrasta w kierunku wylotu w przybliżeniu liniowo (prawie dwukrotnie) [3]. Prawa strona opisuje ubytek atomów neutralnych wskutek jonizacji poprzez zderzenia z elektronami.

- Równanie ciągłości dla jonów

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i V_i)}{\partial x} = \beta N_a n_e. \quad (1.2)$$

- Równanie pędu dla jonów

$$\frac{\partial(n_i V_i)}{\partial t} + \frac{\partial(n_i V_i^2)}{\partial x} = \frac{n_i e E}{m_i} + \beta N_a n_e V_a, \quad (1.3)$$

gdzie m_i - masa jonu. Jony są rozpędzane przez pole elektryczne - stąd wyrażenie $n_i e E$. Na pęd jonów ma też wpływ pęd nowo utworzonych, na skutek jonizacji, jonów. Mają one prędkość atomów neutralnych V_a , zaś szybkość ich powstawania jest proporcjonalna do gęstości atomów neutralnych N_a i elektronów n_e .

- Równanie ciągłości dla elektronów

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial(n_e V_e)}{\partial x} = \beta N_a n_e. \quad (1.4)$$

- Równanie pędu dla elektronów w kierunku osi X

$$\frac{m_e}{m_i} \left(\frac{\partial(n_e V_{ex})}{\partial t} + \frac{\partial(n_e V_{ex}^2)}{\partial x} \right) + \frac{\partial \left(\frac{kT_e}{m_i} n_e \right)}{\partial x} = -\frac{n_e e E}{m_i} + n_e (\tilde{\omega}_B V_{e\theta} - \tilde{\nu}_m V_{ex}), \quad (1.5)$$

gdzie $V_{e\theta}$ i V_{ex} są składowymi wektora prędkości elektronów w kierunku azymutalnym i w kierunku osi X, $\tilde{\nu}_m = \frac{m_e}{m_i} \nu_m$, ν_m - częstość zderzeń na przekaz pędu dla elektronów, $\tilde{\omega}_B = \frac{m_e}{m_i} \omega_B$, ω_B - częstość cyklotronowa³, E - natężenie pola elektrycznego, e - wartość bezwzględna ładunku elektronu, T_e - temperatura elektronów. Elektrony są rozpędzane przez pole elektryczne, które

³Częstość kołowa obiegu cząstki naładowanej w jednorodnym polu magnetycznym. Zależy od indukcji magnetycznej B , masy cząstki (w półprzewodniku - masy efektywnej) m oraz wielkości ładunku elektrycznego q : $\omega_B = \frac{qB}{m}$.

działa na nie siłą $n_e e E$. W polu magnetycznym na elektrony działa siła Lorentza: $\vec{F} = e\vec{V}_e \times \vec{B}$, gdzie \vec{B} jest wektorem indukcji pola magnetycznego. Ruch elektronów w kierunku osi X oznacza powstanie siły prostopadłej do osi X. Siła ta powoduje pojawienie się prędkości azymutalnej $V_{e\theta}$. Oczywiście pojawienie się siły $V_{e\theta}$ powoduje z kolei powstanie siły Lorentza prostopadłej do \vec{E} . Zmiana pędu wywołana polem magnetycznym będzie tym większa, im większy będzie iloczyn $n_e \tilde{\omega}_B V_{e\theta}$. Na elektrony działa dodatkowo siła związana z gradientem ciśnienia $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kT_e}{m_i} n_e \right)$ oraz siła tarcia związana ze zderzeniami elektronów ze ścianami i atomami $n_e \tilde{\nu}_m V_{ex}$. Zakładając, że ruch ma symetrię cylindryczną tzn., że ciśnienie elektronów nie zależy od θ , dostajemy

- Równanie pędu dla elektronów w kierunku azymutalnym

$$\frac{m_e}{m_i} \left(\frac{\partial(n_e V_{e\theta})}{\partial t} + \frac{\partial(n_e V_{ex} V_{e\theta})}{\partial x} \right) = -n_e \tilde{\omega}_B V_{ex} - n_e \tilde{\nu}_m V_{e\theta}. \quad (1.6)$$

- Równanie energii dla elektronów

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(n_e E_{ke} + \frac{3}{2} n_e k T_e \right) + \frac{\partial \left(n_e V_{ex} E_{ke} + n_e V_{ex} \frac{3}{2} k T_e \right)}{\partial x} + \frac{\partial(n_e V_{ex} k T_e)}{\partial x} = Q_{Joules} - Q_{ioniz} - Q_{wall} \quad (1.7)$$

dla

$$\begin{aligned} Q_{Joules} &= -V_{ex} n_e e E, \\ Q_{ioniz} &= \gamma e E_{ion} \beta N_a n_e, \\ Q_{wall} &= \nu_{ew} n_e (E_{ke} + 2k T_e), \end{aligned}$$

gdzie ν_{ew} - współczynnik nieelastycznych zderzeń elektronów ze ścianami, E_{ion} - energia jonizacji ksenonu, γ - tzw. koszt jonizacji ($\gamma \approx 2,5 \div 3$).

Do wyznaczenia ruchu potrzebne jest również równanie na pole elektryczne.

- Równanie definiujące pole elektryczne

$$\varepsilon_0 E_{,x} = e(n_i - n_e) \quad (1.8)$$

gdzie ε_0 - przenikalność dielektryczna próżni.

Równanie (1.8) jest ściśle związane z równaniem Poissona na potencjał elektryczny $E = -\Phi_{,x}$:

$$\varepsilon_0 \Phi_{,xx} = -e(n_i - n_e), \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi(L) = U_0. \quad (1.9)$$

Jeśli scałkować formalnie powyższe równanie, to pozostałe tworzą układ siedmiu równań, w którym prawa strona zależy funkcjonalnie od rozwiązania, ponieważ pole E wyraża się funkcjonalnie poprzez n_e i n_i .

Po pewnych przekształceniach lewa strona układu (1.1) - (1.7) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} N_a \\ n_i \\ V_i \\ n_e \\ V_{ex} \\ V_{e\theta} \\ T_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_i & n_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_{ex} & n_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k T_e}{m_e n_e} & V_{ex} & 0 & \frac{k}{m_e} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{ex} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} T_e & 0 & V_{ex} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} N_a \\ n_i \\ V_i \\ n_e \\ V_{ex} \\ V_{e\theta} \\ T_e \end{bmatrix}$$

Charakterystyki tego układu mają następujące nachylenia:

$$V_a, \quad V_i, \quad V_i, \quad V_{ex}, \quad V_{ex} + \sqrt{\frac{5kT_e}{3m_e}}, \quad V_{ex}, \quad V_{ex} - \sqrt{\frac{5kT_e}{3m_e}}.$$

Odpowiadające im wektory własne to:

$$\begin{aligned} \text{dla } \xi_1 = V_a & : & [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T, \\ \text{dla } \xi_{2,3} = V_i & : & [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]^T, \\ \text{dla } \xi_{4,6} = V_{ex} & : & [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0]^T, \quad \left[0, 0, 0, -\frac{n_e}{T_e}, 0, 0, 1\right]^T \\ \text{dla } \xi_5 = V_{ex} + \sqrt{\frac{5kT_e}{3m_e}} & : & \left[0, 0, 0, \frac{3n_e}{2T_e}, \frac{3}{2T_e} \sqrt{\frac{5kT_e}{3m_e}}, 0, 1\right]^T \\ \text{dla } \xi_7 = V_{ex} - \sqrt{\frac{5kT_e}{3m_e}} & : & \left[0, 0, 0, \frac{3n_e}{2T_e}, -\frac{3}{2T_e} \sqrt{\frac{5kT_e}{3m_e}}, 0, 1\right]^T \end{aligned}$$

Mamy więc dwie podwójne wartości własne i sześć wektorów własnych. Pierwiastkowi V_i odpowiada tylko jeden wektor własny, ponieważ blok związany z równaniami (1.2) i (1.3) oraz zmiennymi n_i i V_i ma macierz niediagonalizowalną. W związku z tym układ (1.1) - (1.7) jest słabo hiperboliczny.

Zagadnienie Cauchy'ego dla układu słabo hiperbolicznego albo nie ma rozwiązania, albo - jeśli je ma (przy pewnych założeniach o prawej stronie) - to jest ono niestabilne ze względu na zaburzenia prawej strony członami zerowego rzędu, co powoduje, że rozwiązanie może przestać istnieć. W obliczeniach numerycznych takie właśnie zaburzenia mogą się pojawić i doprowadzić do niestabilności numerycznej. Można pokazać, że układ (1.1) - (1.7) mimo słabej hiperboliczności posiada rozwiązanie, gdyż pole elektryczne, które występuje po prawej stronie równania (1.5) ma lepszą różniczkowalność niż n_e i n_i .

Równanie (1.8) również stwarza pewne problemy numeryczne. Zwykle jest $|n_i - n_e| \ll n_i$, co prowadzi do niestabilności w obliczeniach. Małe niedokładności w wyznaczaniu n_i i n_e dają duży błąd pola, który z kolei powoduje jeszcze większy błąd przy wyznaczaniu ruchu. Z tego powodu przyjmuje się zazwyczaj założenie quasi-neutralności, tzn. w równaniach ruchu kładzie się $n_i = n_e$. Pole elektryczne pojawia się wtedy jako "siła reakcji" odpowiadająca więzom $n_i = n_e$, podobnie jak ciśnienie w modelu cieczy nieściśliwej jest reakcją na warunek nieściśliwości. Równanie (1.8) należy wtedy pominąć. Takie właśnie przybliżenie będzie podstawą naszych dalszych rozważań.

Komentarz

Ze względu na to, że jony nie są ściśle monoenergetyczne i mają pewną dyspersję, można próbować ([3]) uzupełnić równanie (1.3) o człon dyspersyjny, który odgrywa rolę temperatury jonów. W ten sposób układ (1.1) - (1.7) staje się hiperboliczny i do niego również stosują się twierdzenia uzyskane w rozprawie. Układ taki ma jednak nadal wady. Oprócz problemów związanych z równaniem (1.8) mamy tu jeszcze problem z występowaniem dużych prędkości charakterystycznych (ze względu na małą masę elektronu w mianownikach wzorów na wartości własne). To oczywiście prowadzi do trudności numerycznych - krótki krok i w związku z tym długi czas obliczeń.

1.2.3 Uproszczenia modelu

Dla ksenonu jest $\frac{m_e}{m_i} \approx 10^{-5}$. Przechodząc z $\frac{m_e}{m_i} \rightarrow 0$ i trzymając $\tilde{\omega}_B$ i $\tilde{\nu}_m$ niezmiennie, dostajemy z (1.6)

$$-n_e \tilde{\omega}_B V_{ex} - n_e \tilde{\nu}_m V_{e\theta} = 0,$$

czyli

$$V_{e\theta} = -\frac{\tilde{\omega}_B V_{ex}}{\tilde{\nu}_m}, \quad (1.10)$$

oraz z (1.5)

$$\frac{1}{n_e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kT_e}{m_i} n_e \right) = -\frac{eE}{m_i} - \left(\frac{\tilde{\omega}_B^2}{\tilde{\nu}_m} + \tilde{\nu}_m \right) V_{ex}.$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\nu_{eff} = \frac{\tilde{\omega}_B^2}{\tilde{\nu}_m} + \tilde{\nu}_m,$$

otrzymujemy zamiast (1.5) uproszczoną wersję równania pędu dla elektronów, która jest prawem Ohma dla prądu elektronowego:

$$\frac{eE}{m_i} = -\nu_{eff} V_{ex} - \frac{1}{n_e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kT_e}{m_i} n_e \right). \quad (1.11)$$

Ze związków (1.2) i (1.3), po prostych przekształceniach dostajemy równanie

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} = \frac{eE}{m_i} + \beta N_a (V_a - V_i),$$

które ze względu na (1.11) zapisujemy w postaci

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{1}{n_e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kT_e}{m_i} n_e \right) = -\nu_{eff} V_{ex} + \beta N_a (V_a - V_i). \quad (1.12)$$

Odejmując od siebie równania (1.2) i (1.4) oraz korzystając z warunku elektrycznej neutralności: $n_i - n_e = 0$, dostajemy $\frac{\partial}{\partial x} (n_i V_i - n_e V_{ex}) = 0$, co pokazuje, że prąd całkowity

$$I = (n_i V_i - n_e V_{ex})e,$$

nie zależy od x i jest tylko funkcją czasu $I = I(t)$. Prędkość elektronów w kierunku osi X może być więc wyrażona przez I oraz V_i :

$$V_{ex} = \frac{n_i}{n_e} V_i - \frac{I}{n_e e}. \quad (1.13)$$

Użyjemy zależności (1.13) we wzorze (1.12):

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{1}{n_e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kT_e}{m_i} n_e \right) = \nu_{eff} \left(\frac{I}{n_e e} - \frac{n_i}{n_e} V_i \right) + \beta N_a (V_a - V_i). \quad (1.14)$$

Warunek brzegowy dla pola elektrycznego $\int_0^L E dx = U_0 = const$ pozwala wyliczyć z (1.11) (używając (1.13)) całkowity prąd. Ponieważ

$$\frac{e}{m_i} U_0 = \int_0^L \frac{\nu_{eff} \left(\frac{I}{e} - n_i V_i \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kT_e}{m_i} n_e \right)}{n_e} dx,$$

stąd mamy

$$I(t) = \left(\int_0^L \frac{\nu_{eff}}{e n_e} dx \right)^{-1} \cdot \left[\frac{e}{m_i} U_0 + \int_0^L \left(\nu_{eff} V_i + \frac{1}{n_e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kT_e}{m_i} n_e \right) \right) dx \right]. \quad (1.15)$$

Po prostych przekształceniach, z wyjątkiem bardziej skomplikowanych przekształceń równania energii dla elektronów (1.7) zawartych w dodatku B, dochodzimy do standardowego układu czterech równań:

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} + \frac{\partial(N_a V_a)}{\partial x} = -\beta N_a n_e, \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i V_i)}{\partial x} = \beta N_a n_e, \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{1}{n_e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kT_e}{m_i} n_e \right) = \nu_{eff} \left(\frac{I}{n_e e} - \frac{n_i}{n_e} V_i \right) + \beta N_a (V_a - V_i), \quad (1.18)$$

$$\frac{1}{\sqrt{T_e}} \left(\frac{\partial T_e^{\frac{3}{2}}}{\partial t} + \frac{\partial(V_e T_e^{\frac{3}{2}})}{\partial x} \right) = Q_1, \quad (1.19)$$

gdzie

$$Q_1 = -\frac{1}{k} \beta N_a \left(\gamma e E_{ion} + \frac{3}{2} k T_e - E_{ke} \right) + 2 \frac{\nu_m}{k} E_{ke} - \frac{\nu_{ew}}{k} (E_{ke} + 2kT_e),$$

$$E_{ke} = \frac{m_e}{2} (V_{ex}^2 + V_{e\theta}^2) = \frac{m_e}{2} \left(1 + \frac{\omega_B^2}{\nu_e^2} \right) V_{ex}^2.$$

W powyższym układzie (i w dalszych przekształceniach) V_e oznacza prędkość w kierunku osi X.

Pomimo założenia elektrycznej neutralności w układzie (1.16) - (1.19) pozostawiliśmy obie zmienne n_i i n_e tak jak one oryginalnie występują. Jednym z powodów jest fakt, że n_e często pojawia się w mianowniku. Wtedy możemy położyć $n_e = n_i + n_r$ zamiast n_i , ponieważ nawet w przypadku nieobecności jonów ($n_i = 0$) w układzie płynie mały resztkowy prąd elektronowy, któremu odpowiada pewna resztkowa gęstość elektronowa n_r . W ten sposób unikamy osobliwości, które mogłyby się pojawić we współczynnikach. Prąd resztkowy jest tak mały, że tam, gdzie nie grozi osobliwość można go pominąć i przyjąć $n_e = n_i$.

Zauważmy, że funkcja $\Psi_a = \ln N_a$ spełnia na charakterystyce równanie

$$\frac{d\Psi_a}{dt} = -\beta n_e.$$

Jeśli więc β i n_e są ograniczone, a ponadto $N_a(0, x) \geq 0$ i $N_a(t, 0) \geq 0$, to $N_a(t, x) \geq 0$.

Podobnie $\Psi_i = \ln n_i$ spełnia równanie

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = \beta N_a - V_{i,x}.$$

Jeżeli zatem $n_i(0, x) > 0$, to przy założeniu, że $|\beta N_a|, |V_{i,x}| < C$ otrzymujemy, że $n_i(t, x) \geq 0$. To natomiast oznacza, że $n_e = n_i + n_r$ (w mianowniku) jest niezerowe.

Okazuje się (dodatek B), że równanie (1.19) możemy przedstawić też w innej formie:

$$\frac{n_e}{\sqrt{T_e}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T_e^{\frac{3}{2}}}{n_e} \right) + V_e \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T_e^{\frac{3}{2}}}{n_e} \right) \right] = Q_2, \quad (1.20)$$

gdzie

$$Q_2 = Q_1 - \beta N_a T_e.$$

Pomimo, że postać ta nie jest zachowawcza, to w niektórych przypadkach - jak pokażemy - jest ona wygodniejsza.

Dla $n_e = n_i$, charakterystyki dla układu (1.16) - (1.19) (ewentualnie (1.20) zamiast (1.19)) mają następujące nachylenia:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= V_a, \\ \xi_2 &= V_i - \sqrt{\frac{5kT_e}{3m_i}}, \\ \xi_3 &= V_i + \sqrt{\frac{5kT_e}{3m_i}}, \\ \xi_4 &= V_e,\end{aligned}$$

przy czym wiadomo, że $\xi_1 > 0$, $\xi_3 > 0$, $\xi_4 < 0$.

Równania (1.16) - (1.19) stanowią więc układ hiperboliczny. Prawa strona tego układu poprzez prąd całkowity I dany równaniem (1.15) zależy funkcjonalnie od rozwiązania.

Warunki brzegowe

Oprócz warunków początkowych, dla układu (1.16) - (1.19) zadajemy również warunki brzegowe.

Ponieważ atomy neutralne poruszają się z prędkością V_a , można by więc sądzić, że jony powstające w okolicy anody będą miały tę właśnie prędkość. Wtedy warunek na anodzie miałby postać

$$V_i(t, 0) = V_a.$$

W rzeczywistych warunkach

$$V_a < \sqrt{\frac{5kT_e}{3m_i}},$$

zatem w takim przypadku $\xi_2 < 0$ dla $x = 0$ i warunki brzegowe dla układu (1.16) - (1.19) byłyby następujące:

$$N_a = N_{a0} \quad \text{dla } x = 0, \quad (1.21)$$

$$V_i = V_a \quad \text{dla } x = 0, \quad (1.22)$$

$$T_e = T_e(L) \quad \text{dla } x = L. \quad (1.23)$$

Rozważania fizyczne pokazują, że w większości przypadków w pobliżu anody tworzy się (z powodu nadmiaru elektronów), tzw. warstwa anodowa, w której następuje odwrócenie pola. Struktura tej warstwy jest dość złożona. Tuż przy anodzie powstaje bardzo cienka warstwa, na brzegu której jony uzyskują tzw. prędkość Bohma $V_B = \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}}$. Tak więc w tych przypadkach warunek na anodzie (dla $x = 0$) można przyjąć

$$V_i(t, 0) = -\sqrt{\frac{kT_e}{m_i}}. \quad (1.24)$$

Ilość (dwa) warunków brzegowych ((1.21) i (1.24)) na lewym brzegu jest równa ilości rodzin charakterystyk wchodzących przez lewy brzeg. Podobnie, zadajemy jeden warunek brzegowy (1.23) na prawym brzegu, ponieważ $\xi_4 < 0$.

Silnik jest tak zaprojektowany, że wypływ jest mocno naddźwiękowy ($V_i > \sqrt{\frac{5kT_e}{3m_i}}$) w pobliżu

wylotu. Wartość własna ξ_2 zmienia znak w zbiorze $[0, T] \times [0, L]$ - jest ujemna na anodzie ($\xi_2 < 0$ dla $x = 0$) i dodatnia na wylocie ($\xi_2 > 0$ dla $x = L$). W związku z tym druga charakterystyka wychodzi zarówno przez lewy jak i przez prawy brzeg. Dlatego nie zadajemy warunku brzegowego związanego z charakterystyką ξ_2 .

Dalsze możliwe uproszczenia

Dla przyspieszenia obliczeń okazuje się, że wygodnie jest pominąć pochodną czasową temperatury elektronów w równaniu na temperaturę. Dzieje się tak dlatego, że relaksacja temperatury następuje bardzo szybko (10^{-7} sek.). Uwzględnienie czasu relaksacji wprowadza nową krótką skalę czasową, co zwalnia znacznie obliczenia.

A) Jeśli wyjść z równania (1.19) to dostajemy

$$\frac{\partial T_e}{\partial x} = \frac{2Q_1}{3V_e} - \frac{2T_e}{3V_e} \frac{\partial V_e}{\partial x}, \quad (1.25)$$

oraz

$$T_e^{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{V_e} \left(\int_L^x \sqrt{T_e} Q_1 dx + T_e^{\frac{3}{2}}(L) V_e(t, L) \right). \quad (1.26)$$

Ponieważ $V_e = V_i - \frac{I}{n_e e}$, więc

$$\frac{\partial V_e}{\partial x} = \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{I}{en_e^2} \frac{\partial n_e}{\partial x}. \quad (1.27)$$

Stąd układ zredukowany przyjmuje postać

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} + \frac{\partial(N_a V_a)}{\partial x} = -\beta N_a n_e, \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i V_i)}{\partial x} = \beta N_a n_e, \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{kT_e}{m_i n_e} \left(1 + \frac{2I}{3I_e} \right) \frac{\partial n_e}{\partial x} + \frac{2kT_e}{3m_i |V_e|} \frac{\partial V_i}{\partial x} &= \nu_{eff} \left(\frac{I}{n_e e} - V_i \right) \\ &+ \beta N_a (V_a - V_i) \\ &- \frac{2kQ_1}{3m_i V_e}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

gdzie prąd elektronowy $I_e = -en_e V_e$, I wyraża się przez (1.15), natomiast T_e przez (1.26). W tym przypadku nachylenia charakterystyk są postaci

$$\begin{aligned} \xi_1 &= V_a, \\ \xi_2 &= V_i + \frac{k^2 T_e^2}{3m_i^2 |V_e|} - \sqrt{\frac{k^4 T_e^4}{9m_i^4 V_e^2} + \frac{k^2 T_e^2}{m_i^2} \left(1 + \frac{2I}{3I_e} \right)} \\ \xi_3 &= V_i + \frac{k^2 T_e^2}{3m_i^2 |V_e|} + \sqrt{\frac{k^4 T_e^4}{9m_i^4 V_e^2} + \frac{k^2 T_e^2}{m_i^2} \left(1 + \frac{2I}{3I_e} \right)}. \end{aligned}$$

Widzimy więc, że redukcja oparta o równanie (1.19) prowadzi do charakterystyk różniących się bardzo od charakterystyk równania wyjściowego.

B) Jeśli jako punkt wyjścia wziąć równanie (1.20), wówczas po pominięciu pochodnej po czasie dostajemy

$$\frac{\partial T_e}{\partial x} = \frac{2Q_2}{3V_e} + \frac{2T_e}{3n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x}, \quad (1.31)$$

oraz

$$T_e^{\frac{3}{2}}(x) = n_e \left(\int_L^x \frac{\sqrt{T_e} Q_2}{V_e n_e} dx + \frac{T_e^{\frac{3}{2}}(L)}{n_e(t, L)} \right). \quad (1.32)$$

Uwzględniając (1.31) w równaniu (1.18) otrzymujemy układ zredukowany

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} + \frac{\partial(N_a V_a)}{\partial x} = -\beta N_a n_e, \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i V_i)}{\partial x} = \beta N_a n_e, \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{5kT_e}{3m_i n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} = \nu_{eff} \left(\frac{I}{n_e e} - V_i \right) + \beta N_a (V_a - V_i) - \frac{2kQ_2}{3m_i V_e}. \quad (1.35)$$

Charakterystyki powyższego układu mają nachylenia

$$\begin{aligned} \xi_1 &= V_a, \\ \xi_2 &= V_i + \sqrt{\frac{5kT_e}{3m_i}}, \\ \xi_3 &= V_i - \sqrt{\frac{5kT_e}{3m_i}}. \end{aligned}$$

Czyli postać (1.20) równania energii elektronów jest lepsza, ponieważ w przeciwieństwie do poprzedniego podejścia nie zmienia prędkości charakterystycznych.

Wektory własne odpowiadające wartościom własnym ξ_1, ξ_2, ξ_3 są to odpowiednio:

$$[1, 0, 0]^T, \quad \left[0, n_i, \sqrt{\frac{5kT_e}{3m_i}} \right]^T, \quad \left[0, n_i, -\sqrt{\frac{5kT_e}{3m_i}} \right]^T.$$

Ze względu na to, że I dane jest wzorem (1.15), zaś T_e wzorem (1.32), współczynniki, a więc również i charakterystyki układu zredukowanego zależą funkcjonalnie od rozwiązania.

Warunki brzegowe dla układu zredukowanego

W tym wypadku nie ma już warunku brzegowego na temperaturę i przyjmujemy jedynie

$$N_a = N_{a0} \quad \text{dla} \quad x = 0, \quad (1.36)$$

$$V_i = -V_B = -\sqrt{\frac{kT_e}{m_i}} \quad \text{dla} \quad x = 0. \quad (1.37)$$

Ponieważ T_e zależy funkcjonalnie od rozwiązania, więc tym samym warunek brzegowy $V_i(t, 0)$ zależy funkcjonalnie od rozwiązania.

Rozdział 2

Zagadnienie Cauchy'ego dla układu liniowego

W tym rozdziale przedstawimy zagadnienie Cauchy'ego dla układu liniowego. Metoda rozwiązania problemu pochodzi z książki B.L. Rozhdestvenski, N.N. Yanenko [29] bazującej na pracy K.O. Friedrichsa [17]. Autorzy książki [29] prezentują dowód w sposób skrótowy tak, aby były czytelne główne idee postępowania dowodowego. My jednak przytoczymy wszystkie pominięte szczegóły ze względu na wagę twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania układu liniowego dla przypadku układu quasi-liniowego, dla którego dowód opiera się na metodzie kolejnych przybliżeń. Dostajemy bowiem ciąg liniowych układów przedłużonych, dla których Twierdzenie 2.2 zapewnia istnienie rozwiązań.

Weźmy pod uwagę liniowy układ n równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu z dwiema zmiennymi niezależnymi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = b(t, x) + B(t, x) u, \quad (2.1)$$

i warunkiem początkowym

$$u(0, x) = u^0(x), \quad x \in [\alpha, \beta]. \quad (2.2)$$

Przyjmujemy, że współczynniki układu są określone w ograniczonym¹ prostokącie $[0, T_0] \times [\alpha_0, \beta_0]$ oraz $[\alpha, \beta] \subset [\alpha_0, \beta_0]$. Zakładamy, że układ (2.1) jest hiperboliczny w całym zbiorze $[0, T_0] \times [\alpha_0, \beta_0]$, tzn. macierz A jest diagonalizowalna i wszystkie jej wartości własne są rzeczywiste (nie żądamy, aby były jednokrotne). Zatem macierz A jest postaci $A = L^{-1}DL$, gdzie L jest nieosobliwą macierzą, której wiersze stanowią liniowo niezależne lewe wektory własne macierzy A :

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix},$$

oraz $L_k = [L_{k1}, \dots, L_{kn}]$, $k = 1, \dots, n$, jest wektorem wierszowym. Macierz L^{-1} odwrotna do L jest macierzą, której kolumny są liniowo niezależnymi prawymi wektorami własnymi macierzy A . Wprowadzimy dla niej nowe oznaczenie. Niech

$$\Gamma = L^{-1}.$$

Natomiast D , to macierz diagonalna z wartościami własnymi macierzy A na przekątnej, $D = \text{diag}[\xi_1, \dots, \xi_n]$. Przez ξ_k , $k = 1 \dots, n$, oznaczamy wartość własną odpowiadającą lewemu wektorowi własnemu L_k .

¹Obszar może być nieograniczony, ale wówczas należy założyć ograniczoność współczynników.

Z postaci równania (2.1) wynika, że do zdefiniowania klasycznego rozwiązania problemu początkowego (2.1) - (2.2) wystarczy ciągłość współczynników układu i warunku początkowego. Wówczas rozwiązaniem klasycznym nazwiemy funkcję u różniczkowalną w sposób ciągły względem t , x i spełniającą warunek początkowy (2.2). Okazuje się jednak, że ciągłość współczynników układu (2.1) nie wystarczy nawet do wykazania istnienia i jednoznaczności rozwiązania uogólnionego, tzn. rozwiązania ciągłego, spełniającego pewien układ równań całkowych.

W kolejnych paragrafach prześledzimy dowód twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania uogólnionego. Następnie przypomnimy twierdzenie, że jeśli współczynniki i dane początkowe są klasy C^1 to rozwiązanie jest klasy C^1 i, co więcej, jeśli współczynniki i warunek początkowy mają ciągłe pochodne aż do rzędu n włącznie, wówczas rozwiązanie układu również posiada takie pochodne. Na koniec zauważymy, że dla istnienia rozwiązania uogólnionego możemy osłabić założenia dotyczące lewych wektorów własnych. Ta część pochodzi z opublikowanej pracy [34].

2.1 Układ w inwariantach Riemanna

Założmy, że $L \in C^1([0, T_0] \times [\alpha_0, \beta_0])$. Przekształcimy układ (2.1) do postaci kanonicznej. W tym celu mnożymy go lewostronnie przez macierz L :

$$L \frac{\partial u}{\partial t} + D L \frac{\partial u}{\partial x} = L b + L B u.$$

Wprowadzając nową funkcję

$$r = L u, \tag{2.3}$$

otrzymujemy układ

$$\frac{\partial r}{\partial t} + D \frac{\partial r}{\partial x} = L b + \left(L B \Gamma + \left(\frac{\partial L}{\partial t} + D \frac{\partial L}{\partial x} \right) \Gamma \right) r, \tag{2.4}$$

z warunkiem początkowym

$$r(0, x) = r^0(x) = L(0, x) \cdot u^0(x), \quad x \in [\alpha, \beta]. \tag{2.5}$$

Składowe $r_k(t, x)$, $k = 1, \dots, n$, szukanej funkcji wektorowej r będącej rozwiązaniem układu w postaci kanonicznej (2.4), nazywają się niezmiennikami Riemanna, a układ (2.4) - układem zapisanym w inwariantach Riemanna².

2.2 Charakterystyki i obszar określoności rozwiązania

Definicja 2.1 *Charakterystyką przychodzącą do punktu (\bar{t}, \bar{x}) , należącą do k -tej rodziny, nazywamy krzywą $x = x_k(t; \bar{t}, \bar{x})$ określoną dla $t \in [0, \bar{t}]$ będącą rozwiązaniem równania różniczkowego zwyczajnego*

$$\frac{dx}{dt} = \xi_k(t, x), \tag{2.6}$$

z warunkiem początkowym

$$x_k(t; \bar{t}, \bar{x})|_{t=\bar{t}} = \bar{x}. \tag{2.7}$$

Charakterystyką startującą z punktu (\bar{t}, \bar{x}) , należącą do k -tej rodziny, nazywamy krzywą $x = x_k(t; \bar{t}, \bar{x})$ określoną dla $t \geq \bar{t}$ (maksymalnie do T_0 , o ile nie wychodzi wcześniej z prostokąta

²Od nazwiska niemieckiego matematyka B. Riemanna, który wprowadził je w związku z dynamiką gazu.

$[0, T_0] \times [\alpha_0, \beta_0]$), będącą rozwiązaniem zagadnienia (2.6) - (2.7).

Charakterystyką przechodzącą przez punkt (\bar{t}, \bar{x}) , należącą do k -tej rodziny, nazywamy krzywą $x = x_k(t; \bar{t}, \bar{x})$ będącą wysyconym rozwiązaniem zagadnienia (2.6) - (2.7).

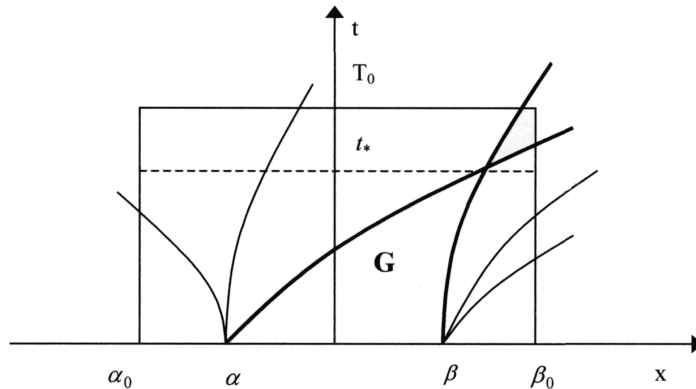
Charakterystyka przechodząca przez punkt (\bar{t}, \bar{x}) składa się z dwóch części: charakterystyki przychodzącej do punktu (\bar{t}, \bar{x}) i startującej z punktu (\bar{t}, \bar{x}) .

Założmy, że funkcja $\xi_k(t, x)$ ($k = 1, \dots, n$) jest ciągła w $[0, T_0] \times [\alpha_0, \beta_0]$ i spełnia w tym zbiorze warunek Lipschitza ze względu na x . Wówczas, na mocy twierdzenia Picarda o istnieniu i jednoznaczności dla równań różniczkowych zwyczajnych, istnieje dokładnie jedna krzywa przechodząca przez punkt (\bar{t}, \bar{x}) i różniczkowalna w sposób ciągły względem t w pewnym otoczeniu wartości początkowej \bar{t} . Ponieważ $\xi_k(t, x)$ jest ograniczona w prostokącie $[0, T_0] \times [\alpha_0, \beta_0]$, więc krzywa reprezentowana przez rozwiązanie $x = x_k(t; \bar{t}, \bar{x})$, $(\bar{t}, \bar{x}) \in (0, T_0) \times (\alpha_0, \beta_0)$, istnieje dla wszystkich $t \in [0, T_0]$, o ile nie przetnie wcześniej brzegów $[0, T_0] \times \{\alpha_0\} \cup [0, T_0] \times \{\beta_0\}$ prostokąta $[0, T_0] \times [\alpha_0, \beta_0]$.

Definicja 2.2 Obszarem określoności odcinka $[\alpha, \beta] \subset [\alpha_0, \beta_0]$ dla liniowego układu (2.1) - (2.2) nazywamy obszar $G \subset [0, T_0] \times [\alpha_0, \beta_0]$ taki, że dane Cauchy’ego wyznaczają jednoznacznie rozwiązanie tego zagadnienia.

Uwaga 2.1 Obszar określoności ma tę własność, że żadna charakterystyka startująca spoza odcinka $[\alpha, \beta]$ nie wchodzi do tego obszaru.

Uwaga 2.2 Dla układu quasi-liniowego powyższa definicja również obowiązuje. Jednakże ze względu na zależność współczynników od niewiadomej funkcji u , obszar określoności nie jest znany z góry, a dopiero po wyznaczeniu rozwiązania.



Rys. 2.1

Dla liniowego układu hiperbolicznego (2.1) obszarem określoności G rozwiązania zagadnienia Cauchy’ego jest zbiór wyznaczony przez “wewnętrzne” charakterystyki startujące z końców odcinka $[\alpha, \beta]$:

$$G = \{(t, x) \in [0, T] \times [\alpha_0, \beta_0] : X(t) \leq x \leq Y(t)\}, \quad (2.8)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= \max_{k=1, \dots, n} \{\xi_k(t, X)\}, & X(0) &= \alpha, \\ \frac{dY(t)}{dt} &= \min_{k=1, \dots, n} \{\xi_k(t, Y)\}, & Y(0) &= \beta. \end{aligned}$$

Czas T jest określony w następujący sposób: jeśli $X(t)$ i $Y(t)$ mają pierwszy punkt przecięcia w czasie $t_* \leq T_0$, $X(t_*) = Y(t_*)$, wówczas $T = t_*$, w przeciwnym razie $T = T_0$. (Rys. 2.1)

Zauważmy, że obszar określoności G ma tę własność, że każda charakterystyka przychodząca do punktu $(\bar{t}, \bar{x}) \in G$ jest całkowicie zawarta w G dla $t \in [0, \bar{t}]$ oraz $x_k(0; \bar{t}, \bar{x}) \in [\alpha, \beta]$, $k = 1, \dots, n$.

Przykład 2.1 Przyjrzyjmy się charakterystykom następującego układu dwóch równań liniowych³

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

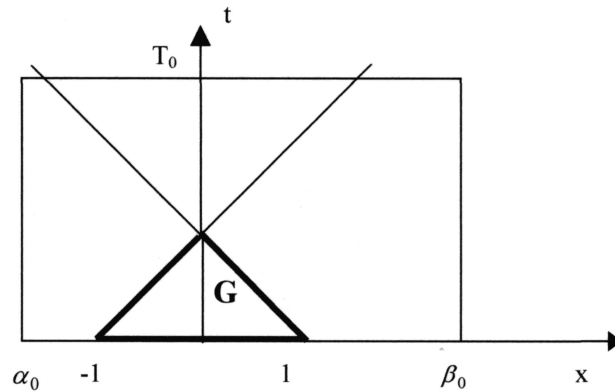
z warunkami początkowymi dla $x \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} u(0, x) &= 1 \\ v(0, x) &= -1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Układ posiada dwie rodziny charakterystyk:

$$\begin{aligned} x &= t - \bar{t} + \bar{x} \\ x &= -t + \bar{t} + \bar{x}. \end{aligned}$$

Obszar określoności jest trójkątem ograniczonym prostymi: $x = t - 1$, $x = -t + 1$, $t = 0$ (Rys. 2.2).



Rys. 2.2: Obszar określoności zagadnienia Cauchy'ego (2.9)-(2.10)

Przykład 2.2 Dla układu⁴

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{x}{1+t} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{x + \frac{1}{4}}{1+t} \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

³Rozwiązanie: $u = 1$ i $v = -1$

⁴Rozwiązanie: $u = \frac{x}{1+t}$, $v = \frac{x+0.25}{1+t}$

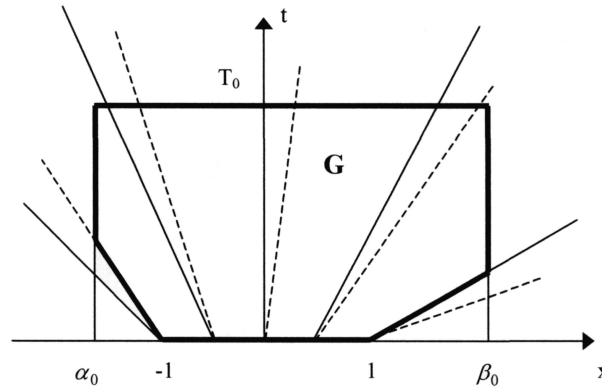
z warunkami początkowymi

$$\begin{aligned} u(0, x) &= x \\ v(0, x) &= x + \frac{1}{4}, \quad \text{dla } x \in [-1, 1], \end{aligned} \quad (2.12)$$

którego współczynniki są określone w prostokącie $[0, T_0] \times [\alpha_0, \beta_0]$, rodziny charakterystyk są postaci:

$$\begin{aligned} x &= (1+t) \frac{\bar{x}}{1+\bar{t}} \\ x &= (1+t) \frac{\frac{1}{4} + \bar{x}}{1+\bar{t}} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Obszar określoności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego jest wyznaczony przez proste $x = -\frac{3}{4}t - 1$, $x = t + 1$ oraz boki prostokąta $[0, T_0] \times [\alpha_0, \beta_0]$. (Rys. 2.3)



Rys. 2.3: Obszar określoności zagadnienia Cauchy'ego (2.11)-(2.12)

2.3 Układ równań całkowych

Operator różniczkowy $\frac{\partial}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial}{\partial x}$, ($k = 1, \dots, n$) występujący w równaniu (2.4) jest w rzeczywistości pochodną kierunkową względem zmiennej t wzdłuż charakterystyki $x = x_k(t; \bar{t}, \bar{x})$. Dla dowolnej różniczkowalnej funkcji $f(t, x)$ mamy bowiem, zgodnie z Definicją 2.1 i z (2.6):

$$\frac{df(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))}{dt} = \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}.$$

Stąd układ (2.4) zapisujemy w postaci ($k = 1, \dots, n$)

$$\begin{aligned} \frac{dr_k(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))}{dt} &= L_k(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) b(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) \\ &+ L_k(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) B(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) \Gamma(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) r(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) \\ &+ \frac{dL_k(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))}{dt} \Gamma(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) r(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Wyrażenie $\frac{dL_k}{dt}$ oznacza wektor wierszowy $\left[\frac{dL_{k1}}{dt}, \dots, \frac{dL_{kn}}{dt} \right]$.

Scałkujemy teraz obie strony układu (2.13) wzdłuż k -tej charakterystyki względem t w granicach od 0 do \bar{t} . Otrzymamy w ten sposób układ równań całkowych ($k = 1, \dots, n$):

$$\begin{aligned} r_k(\bar{t}, x_k(\bar{t}; \bar{t}, \bar{x})) &= r_k(0, x_k(0; \bar{t}, \bar{x})) + \int_0^{\bar{t}} L_k(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) b(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) dt \\ &+ \int_0^{\bar{t}} L_k(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) B(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) \Gamma(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) r(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) dt \\ &+ \int_0^{\bar{t}} \frac{dL_k(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))}{dt} \Gamma(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) r(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) dt. \end{aligned}$$

Ponieważ warunek początkowy dla funkcji r oznaczyliśmy przez r^0 oraz $x_k(\bar{t}; \bar{t}, \bar{x}) = \bar{x}$, dostajemy ($k = 1, \dots, n$)

$$\begin{aligned} r_k(\bar{t}, \bar{x}) &= r_k^0(x_k(0; \bar{t}, \bar{x})) + \int_0^{\bar{t}} L_k(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) b(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) dt \\ &+ \int_0^{\bar{t}} L_k(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) B(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) \Gamma(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) r(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) dt \\ &+ \int_0^{\bar{t}} \frac{dL_k(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))}{dt} \Gamma(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) r(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) dt. \end{aligned} \quad (2.14)$$

W ten sposób doszliśmy do układu równań całkowych dla niewiadomej funkcji wektorowej r . Oczywiście każde rozwiązanie układu (2.1) spełniające warunek początkowy (2.2) jest rozwiązaniem układu (2.14). Na odwrót: funkcja wektorowa r mająca ciągłe pochodne rzędu pierwszego względem t i x spełnia zagadnienie Cauchy'ego (2.1) - (2.2).

Zdefiniujemy teraz pojęcie uogólnionego rozwiązania zagadnienia (2.4) - (2.5).

Definicja 2.3 Ciągłą w G funkcję wektorową r będącą rozwiązaniem układu równań całkowych (2.14) nazywamy uogólnionym rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego (2.4) - (2.5).

Jeśli funkcja r jest uogólnionym rozwiązaniem zagadnienia (2.4) - (2.5), to oczywiście funkcja $u = \Gamma r$ jest uogólnionym rozwiązaniem zagadnienia (2.1) - (2.2).

2.4 Operator \mathcal{P}

Po całkowaniu wzdłuż charakterystyk układ przyjmuje postać dosyć skomplikowaną w zapisie ze względu na dużą ilość symboli. Dlatego w celu uproszczenia, zdefiniujemy następujący liniowy operator podstawiania:

$$\mathcal{P} : \left(C([0, T] \times [\alpha_0, \beta_0]) \right)^{nm} \longrightarrow \left(C([0, T] \times [0, T] \times [\alpha_0, \beta_0]) \right)^{nm},$$

działający na funkcje macierzowe $f(t, x) = [f_{ij}(t, x)]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$ w następujący sposób:

$$(\mathcal{P}f)_k(t, \bar{t}, \bar{x}) = [f_{k1}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})), \dots, f_{km}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))], \quad k = 1, \dots, n.$$

Działanie tego operatora polega na zamianie x na $x_k(t; \bar{t}, \bar{x})$ w k -tym wierszu ($k = 1, \dots, n$) funkcji macierzowej $f(t, x)$.

Ponieważ

$$\sup_{(t, \bar{t}, \bar{x}) \in [0, T] \times G} |f_k(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))| = \sup_{(t, x) \in G} |f_k(t, x)|,$$

dlatego operator \mathcal{P} jest ograniczony, a zatem również ciągły. Dla dogodności będziemy używali następującej notacji:

$$\mathcal{P}_t f = (\mathcal{P}f)(t, \cdot, \cdot).$$

Zastosowanie operatora \mathcal{P} do układów (2.13) i (2.14) napotyka pewne trudności w zapisie wyrażenia

$$\frac{dL_k(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))}{dt} \Gamma(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) r(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})). \quad (2.15)$$

Jak łatwo zauważyć \mathcal{P} nie ma własności

$$\mathcal{P}_t(fg) = (\mathcal{P}_t f)(\mathcal{P}_t g),$$

gdzie $f : G \rightarrow \mathbb{R}^{nm}$, $g : G \rightarrow \mathbb{R}^{ml}$. Nie możemy zatem zapisać (2.15) jako

$$\left(\frac{d}{dt} (\mathcal{P}_t L) \right) \mathcal{P}_t (\Gamma r),$$

mimo, iż najpierw następuje podstawienie równania charakterystyki, a dopiero potem różniczkowanie. Wobec tego (2.15) potrafimy wyrazić jedynie w postaci

$$\mathcal{P}_t \left(\left(\frac{\partial L}{\partial t} + D \frac{\partial L}{\partial x} \right) \Gamma r \right). \quad (2.16)$$

To wyrażenie będziemy jednak pisać umownie w skróconej formie

$$\mathcal{P}_t \left(\frac{dL}{dt} \Gamma r \right),$$

rozumianej zawsze tylko w sensie (2.16).

Ostatecznie układ (2.13) zapiszemy przy użyciu operatora \mathcal{P} w postaci

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{P}_t r) = \mathcal{P}_t \left(Lb + LB\Gamma r + \frac{dL}{dt} \Gamma r \right). \quad (2.17)$$

Podobnie układ (2.14):

$$r(\bar{t}, \bar{x}) = \mathcal{P}_0 r^0 + \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(Lb + LB\Gamma + \frac{dL}{dt} \Gamma r \right) dt. \quad (2.18)$$

2.5 Rozwiązanie uogólnione

Twierdzenie 2.1 *Niech elementy macierzy $L(t, x)$ będą funkcjami różniczkowalnymi w sposób ciągły w zbiorze $[0, T_0] \times [\alpha_0, \beta_0]$. Przyjmijmy również, że elementy macierzy $D(t, x)$ są funkcjami spełniającymi warunek Lipschitza ze względu na zmienną x i ciągłymi ze względu na zmienną t . Ponadto założmy, że składowe wektora $b(t, x)$ i macierzy $B(t, x)$ oraz $\Gamma(t, x)$ są funkcjami ciągłymi na $[0, T_0] \times [\alpha_0, \beta_0]$, natomiast warunek początkowy $u^0(x)$ jest funkcją ciągłą dla $x \in [\alpha, \beta]$. Przy tych założeniach w zbiorze G istnieje jednoznaczne uogólnione rozwiązanie zagadnienia (2.4) - (2.5).*

Dowód twierdzenia zaczniemy od wykazania jednoznaczności rozwiązania przy pomocy lematu Gronwalla.

2.5.1 Jednoznaczność

Lemat 2.1 *Jeśli istnieje rozwiązanie problemu początkowego (2.4) - (2.5), to jest ono jednoznaczne.*

Przypuśćmy, że w G istnieją dwa różne rozwiązania zagadnienia (2.4) - (2.5): $r(t, x)$ i $\bar{r}(t, x)$. Oznaczamy ich różnicę:

$$v(t, x) = r(t, x) - \bar{r}(t, x).$$

Funkcje r i \bar{r} spełniają układ równań (2.4). Stąd funkcja v jest rozwiązaniem następującego układu liniowego z zerowym warunkiem początkowym

$$\frac{\partial v}{\partial t} + D \frac{\partial v}{\partial x} = \left(LB\Gamma + \left(\frac{\partial L}{\partial t} + D \frac{\partial L}{\partial x} \right) \Gamma \right) v, \quad (2.19)$$

$$v(0, x) = [0, \dots, 0]^T. \quad (2.20)$$

Funkcje $v_k(t, x)$, $k = 1, \dots, n$, wzdłuż charakterystyk, czyli funkcje $v_k(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))$, spełniają układ równań

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{P}_t v) = \mathcal{P}_t \left(LB\Gamma v + \frac{dL}{dt} \Gamma v \right).$$

Całkując względem t od 0 do \bar{t} dostajemy

$$v(\bar{t}, \bar{x}) = \mathcal{P}_0 v + \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(LB\Gamma v + \frac{dL}{dt} \Gamma v \right) dt.$$

Ponieważ $v_k(0, x) = 0$ dla $k = 1, \dots, n$, więc

$$v(\bar{t}, \bar{x}) = \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(LB\Gamma v + \frac{dL}{dt} \Gamma v \right) dt. \quad (2.21)$$

Wprowadzimy oznaczenie normy dla dowolnej funkcji macierzowej $f(t, x) = [f_{i,j}(t, x)]_{\substack{i=1, \dots, n, \\ j=1, \dots, m}}$ ciągłej w G ze względu na zmienną x

$$\|f(t, x)\|_0 = \sup_{x \in [X(t), Y(t)]} |f(t, x)|, \quad (2.22)$$

gdzie

$$|f(t, x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_{ij}^2(t, x)}.$$

Oszacujemy teraz normę wektora v . Składowe macierzy $L, \Gamma, \frac{\partial L}{\partial t}, \frac{\partial L}{\partial x}, D, B$ są funkcjami ciągłymi w G , a więc i ograniczonymi. Niech

$$C = \sup_{(t,x) \in G} |LB\Gamma| + \sup_{(t,x) \in G} \left| \left(\frac{\partial L}{\partial t} + D \frac{\partial L}{\partial x} \right) \Gamma \right|.$$

Wówczas dla każdego $k = 1, \dots, n$ mamy

$$|v_k(\bar{t}, \bar{x})| \leq C \int_0^{\bar{t}} |v(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))| dt \leq C \int_0^{\bar{t}} \sup_{\substack{\bar{x} \in [X(\bar{t}), Y(\bar{t})] \\ k=1, \dots, n}} |v(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))| dt.$$

Zatem w dowolnym punkcie $(\bar{t}, \bar{x}) \in G$ jest

$$|v(\bar{t}, \bar{x})| \leq nC \int_0^{\bar{t}} \sup_{\substack{\bar{x} \in [X(\bar{t}), Y(\bar{t})] \\ k=1, \dots, n}} |v(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))| dt.$$

Ponieważ każda charakterystyka przychodząca do dowolnego punktu w G startuje dla $t = 0$ z odcinka $[\alpha, \beta]$ osi OX , więc przez każdy punkt (t, x) taki, że $x \in [X(t), Y(t)]$, $t \leq \bar{t}$, przechodzi co najmniej jedna charakterystyka przychodząca do punktu (\bar{t}, \bar{x}) gdzie $\bar{x} \in [X(\bar{t}), Y(\bar{t})]$. Dlatego dla dowolnej ciągłej funkcji wektorowej $f = [f_j]_{j=1, \dots, n}$ mamy:

$$\sup_{\substack{\bar{x} \in [X(\bar{t}), Y(\bar{t})] \\ k=1, \dots, n}} |f_j(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))| = \sup_{\bar{x} \in [X(t), Y(t)]} |f_j(t, \bar{x})|, \quad j = 1, \dots, n$$

co oznacza, że również

$$\sup_{\substack{\bar{x} \in [X(\bar{t}), Y(\bar{t})] \\ k=1, \dots, n}} |f(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))| = \sup_{\bar{x} \in [X(t), Y(t)]} |f(t, \bar{x})|. \quad (2.23)$$

Stąd otrzymujemy

$$|v(\bar{t}, \bar{x})| \leq nC \int_0^{\bar{t}} \sup_{\bar{x} \in [X(t), Y(t)]} |v(t, \bar{x})| dt.$$

Ponieważ powyższa nierówność zachodzi dla każdego $\bar{x} \in [X(\bar{t}), Y(\bar{t})]$, więc

$$\sup_{\bar{x} \in [X(\bar{t}), Y(\bar{t})]} |v(\bar{t}, \bar{x})| \leq nC \int_0^{\bar{t}} \sup_{\bar{x} \in [X(t), Y(t)]} |v(t, \bar{x})| dt.$$

Używając symbolu normy (2.22) zapiszemy tą nierówność w postaci

$$\|v(\bar{t}, \bar{x})\|_0 \leq nC \int_0^{\bar{t}} \|v(t, \bar{x})\|_0 dt.$$

Stosując lemat Gronwalla dostajemy tożsamość:

$$\|v(\bar{t}, \bar{x})\|_0 \equiv 0.$$

Dlatego $r(\bar{t}, \bar{x}) \equiv \bar{r}(\bar{t}, \bar{x})$. Oznacza to, że również rozwiązanie zagadnienia (2.1) - (2.2) jest jednoznaczne.

2.5.2 Istnienie

Uogólnione rozwiązanie zagadnienia (2.4) - (2.5) skonstruujemy metodą kolejnych przybliżeń. Ciąg kolejnych przybliżeń budujemy następująco:

$$r^{(0)}(\bar{t}, \bar{x}) = r^0(\bar{x}), \quad (2.24)$$

$$r^{(s+1)}(\bar{t}, \bar{x}) = \mathcal{P}_0 r^0 + \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t(Lb) dt + \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(H \begin{pmatrix} r^{(s)} \\ r \end{pmatrix} \right) dt, \quad (2.25)$$

gdzie

$$H = LB\Gamma + \left(\frac{\partial L}{\partial t} + D \frac{\partial L}{\partial x} \right) \Gamma.$$

Z określenia ciągu $\{r^{(s)}\}$ wynika, że

$$r^{(s)}(0, x) = r^0(x), \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

Funkcja $r^{(0)}$ jest ciągła w zbiorze G na mocy założenia o ciągłości warunku początkowego dla układu (2.4). Jeśli funkcja $r^{(s)}$ jest ciągła, to oczywiście $r^{(s+1)}$ również jest ciągła⁵. Dlatego wszystkie wyrazy ciągu $\{r^{(s)}\}$ są funkcjami ciągłymi w G .

Pokażemy, że ciąg kolejnych przybliżeń jest zbieżny jednostajnie w G do ciągłej funkcji $r(\bar{t}, \bar{x})$. W tym celu oszacujemy najpierw różnicę dwóch kolejnych przybliżeń w dowolnym punkcie $(\bar{t}, \bar{x}) \in G$.

Z (2.25) mamy dla $k = 1, \dots, n$:

$$\left| r_k^{(s+1)}(\bar{t}, \bar{x}) - r_k^{(s)}(\bar{t}, \bar{x}) \right| \leq \int_0^{\bar{t}} \left| r^{(s)}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - r^{(s-1)}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) \right| \sup_{(t,x) \in G} |H| dt.$$

Ponieważ elementy macierzy H są ograniczone w G , więc istnieje nieujemna stała C_H taka, że $\sup_{(t,x) \in G} |H| \leq C_H$:

$$\begin{aligned} \left| r_k^{(s+1)}(\bar{t}, \bar{x}) - r_k^{(s)}(\bar{t}, \bar{x}) \right| &\leq C_H \int_0^{\bar{t}} \left| r^{(s)}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - r^{(s-1)}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) \right| dt \\ &\leq C_H \int_0^{\bar{t}} \left\| r^{(s)}(t, \bar{x}) - r^{(s-1)}(t, \bar{x}) \right\| dt, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Stąd zachodzi

$$\left\| r^{(s+1)}(\bar{t}, \bar{x}) - r^{(s)}(\bar{t}, \bar{x}) \right\|_0 \leq nC_H \int_0^{\bar{t}} \left\| r^{(s)}(t, \bar{x}) - r^{(s-1)}(t, \bar{x}) \right\|_0 dt. \quad (2.27)$$

Oczywiście dla $\bar{t} \in [0, T]$ prawdziwa jest nierówność

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{t}} \left\| r^{(s)}(t, \bar{x}) - r^{(s-1)}(t, \bar{x}) \right\|_0 dt &\leq \int_0^T \left\| r^{(s)}(t, \bar{x}) - r^{(s-1)}(t, \bar{x}) \right\|_0 dt \\ &\leq \int_0^T \max_{\eta \in [0, t]} \left\| r^{(s)}(\eta, \bar{x}) - r^{(s-1)}(\eta, \bar{x}) \right\|_0 dt. \end{aligned}$$

Z powyższego oszacowania i ze wzoru (2.27) dostajemy dla każdego $\bar{t} \in [0, T]$:

$$\left\| r^{(s+1)}(\bar{t}, \bar{x}) - r^{(s)}(\bar{t}, \bar{x}) \right\|_0 \leq nC_H \int_0^T \max_{\eta \in [0, t]} \left\| r^{(s)}(\eta, \bar{x}) - r^{(s-1)}(\eta, \bar{x}) \right\|_0 dt,$$

i dlatego

$$\max_{\bar{t} \in [0, T]} \left\| r^{(s+1)}(\bar{t}, \bar{x}) - r^{(s)}(\bar{t}, \bar{x}) \right\|_0 \leq nC_H \int_0^T \max_{\eta \in [0, t]} \left\| r^{(s)}(\eta, \bar{x}) - r^{(s-1)}(\eta, \bar{x}) \right\|_0 dt. \quad (2.28)$$

Wprowadzamy następujące funkcje

$$Q_0^{(i)}(t) = \max_{\eta \in [0, t]} \left\| r^{(i+1)}(\eta, \bar{x}) - r^{(i)}(\eta, \bar{x}) \right\|_0, \quad i = 0, 1, \dots \quad (2.29)$$

⁵Ze względu na ciągłość wszystkich funkcji podcałkowych na zbiorze zwartym, prawa strona (2.25) jest funkcją ciągłą zmiennych (\bar{t}, \bar{x}) . Twierdzenie 3, str. 567, [16]

i zapisujemy nierówność (2.28) w postaci:

$$Q_0^{(s)}(T) \leq nC_H \int_0^T Q_0^{(s-1)}(t) dt, \quad s \geq 1. \quad (2.30)$$

Stosując s-krotnie (2.30) uzyskamy:

$$Q_0^{(s)}(T) \leq C_Q \frac{(nC_H T)^s}{s!}, \quad (2.31)$$

gdzie

$$\begin{aligned} Q_0^{(0)}(\tau) &= \max_{\bar{t} \in [0, \tau]} \left\| r^{(1)}(\bar{t}, \bar{x}) - r^{(0)}(\bar{t}, \bar{x}) \right\|_0 \\ &= \max_{\bar{t} \in [0, \tau]} \left\| \mathcal{P}_0(r^0) + \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t(Lb) dt + \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(H \begin{pmatrix} r^0 \end{pmatrix} \right) dt - r^0(\bar{x}) \right\|_0 =: C_Q. \end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika stąd, że w zbiorze G współczynniki układu i warunek początkowy są ograniczone.

Niech $C_0 := \max\{C_Q; nC_H\}$. Ostatecznie dostajemy:

$$Q_0^{(s)}(T) \leq C_0 \frac{(C_0 T)^s}{s!}. \quad (2.32)$$

Zbieżność ciągu $\{r^{(s)}\}$ w zbiorze G jest równoważna zbieżności szeregu funkcyjnego $\sum_{s=0}^{\infty} f_s$ dla

$$f_s = \begin{cases} r^{(0)} & , \text{gd}y \quad s = 0 \\ r^{(s)} - r^{(s-1)} & , \text{gd}y \quad s \geq 1 \end{cases} \quad (2.33)$$

Dzięki (2.32), dla $s \geq 1$ prawdziwa jest nierówność:

$$\max_{(t,x) \in G} |f_s(t,x)| \leq C_0 \frac{(C_0 \cdot T)^{s-1}}{(s-1)!}$$

Szereg liczbowy $\sum_{s=1}^{\infty} C_0 \frac{(C_0 \cdot T)^{s-1}}{(s-1)!}$ jest zbieżny. Zatem na mocy kryterium Weierstrassa szereg funkcyjny (2.33) jest zbieżny jednostajnie na zbiorze G . Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest ciągła, czyli funkcja $r(\bar{t}, \bar{x})$ jest ciągła w G . Przechodząc w układzie (2.25) z granicą przy $s \rightarrow +\infty$ widzimy, że $r(\bar{t}, \bar{x})$ jest uogólnionym rozwiązaniem zagadnienia (2.4) - (2.5), a tym samym funkcja $u(\bar{t}, \bar{x})$ jest uogólnionym rozwiązaniem zagadnienia (2.1) - (2.2).

2.6 Rozwiązanie klasy C^1

Twierdzenie 2.2 *Jeśli elementy macierzy L, D, B i wektora b są funkcjami klasy $C^1([0, T_0] \times [\alpha_0, \beta_0])$ oraz $u^0 \in C^1([\alpha, \beta])$, to istnieje jednoznaczne rozwiązanie $u \in C^1(G)$ zagadnienia (2.4) - (2.5).*

Istnienie pochodnych kierunkowych funkcji r nie implikuje istnienia pochodnych cząstkowych $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial t}$. Dlatego istnienie i ciągłość $\frac{\partial r}{\partial x}$ zostanie udowodniona przy założeniach Twierdzenia 2.2

przez pokazanie zbieżności jednostajnej ciągu pochodnych $\{\frac{\partial r^{(s)}}{\partial x}\}$ w G . Ciągłość pochodnej $\frac{\partial r}{\partial t}$ będzie wówczas konsekwencją istnienia pochodnej $\frac{\partial r}{\partial x}$, ponieważ

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -D \frac{\partial r}{\partial x} + Lb + LB\Gamma r + \left(\frac{\partial L}{\partial t} + D \frac{\partial L}{\partial x} \right) \Gamma r.$$

Najpierw jednak przytoczymy lemat, który wykorzystamy do wyznaczenia pochodnej $\frac{\partial r^{(s)}}{\partial x}$.

Lemat 2.2 *Niech $u(\tau, t, x)$, $v(\tau, t, x) \in C^1([0, T] \times [0, T] \times [\alpha_0, \beta_0])$.*

Wtedy funkcja

$$J(t, x) = \int_0^t v_{,\tau}(\tau, t, x) u(\tau, t, x) d\tau,$$

jest klasy $C^1([0, T] \times [0, T] \times [\alpha_0, \beta_0])$ oraz

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(t, x)}{\partial x} &= \left[v_{,x}(\tau, t, x) u(\tau, t, x) \right]_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t \left(v_{,\tau}(\tau, t, x) u_{,x}(\tau, t, x) - v_{,x}(\tau, t, x) u_{,\tau}(\tau, t, x) \right) d\tau, \\ \frac{\partial J(t, x)}{\partial t} &= v_{,\tau}(\tau, t, x) u(\tau, t, x) \Big|_{\tau=t} + \left[v_{,t}(\tau, t, x) u(\tau, t, x) \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &\quad + \int_0^t \left(v_{,\tau}(\tau, t, x) u_{,t}(\tau, t, x) - v_{,t}(\tau, t, x) u_{,\tau}(\tau, t, x) \right) d\tau. \end{aligned}$$

Dowód lematu znajduje się w dodatku A.

Uwaga 2.3 Często w celu skrócenia zapisu będziemy oznaczali pochodną cząstkową symbolem przecinka. Konsekwentnie będziemy go używali nawet tam, gdzie może się to wydawać zbędne. Będziemy zatem pisali $f_{,x}$ zamiast f_x . Pozwoli to uniknąć niejasności w odróżnianiu indeksu dolnego od pochodnej w takich notacjach jak np. $f_{,u_i}$ - pochodna f względem u_i lub $u_{i,x}$ - pochodna i -tej składowej funkcji wektorowej u względem x .

Uzasadnimy teraz, że wyrazy ciągu $\{r^{(s)}\}$ możemy różniczkować względem x oraz względem t . Składowe wektora r^0 są, z założenia, funkcjami klasy $C^1([\alpha, \beta])$. Ze wzoru (2.25), funkcja $r^{(1)}$ wyraża się następująco:

$$r^{(1)}(\bar{t}, \bar{x}) = \mathcal{P}_0 r^0 + \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t(Lb) dt + \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t(LB\Gamma r^0) dt + \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(\frac{dL}{dt} \Gamma r^0 \right) dt \quad (2.34)$$

Trzy pierwsze składniki sumy po prawej stronie wzoru (2.34) są różniczkowalne⁶ względem x oraz t w sposób ciągły, ponieważ L , b , B , r^0 są funkcjami klasy $C^1(G)$. Istnienie ciągłych pochodnych po x i po t funkcji $\int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(\frac{dL}{dt} \Gamma r^0 \right) dt$ wynika z Lematu 2.2. Zatem przybliżenie $r^{(1)}(\bar{t}, \bar{x})$ jest funkcją klasy $C^1(G)$. Analogicznie, z istnienia ciągłych pochodnych funkcji $r^{(s)}$ wynika, że $r^{(s+1)} \in C^1(G)$. Stąd wszystkie wyrazy ciągu $\{r^{(s)}\}$ są klasy $C^1(G)$.

Przejdziemy teraz do wyznaczenia pochodnej $\frac{\partial r^{(s+1)}}{\partial \bar{x}}$. Ponieważ $D \in C^1(G)$ stąd (Twierdzenie 3.3, [19]) charakterystyki $x = x_k(t; \bar{t}, \bar{x})$, ($k = 1, \dots, n$), są różniczkowalne w sposób ciągły

⁶Na mocy Twierdzenia 3, str. 568 i Twierdzenia 2, str. 567, [16]

względem t , \bar{t} i \bar{x} . Na podstawie Lematu 2.2 dostajemy:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(\frac{dL}{dt} \Gamma \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right) dt &= \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_{\bar{t}} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \Gamma \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right) \\
&- \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_0 \left(\frac{\partial L}{\partial x} \Gamma \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right) \\
&+ \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{dL}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right) dt \\
&+ \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{dL}{dt} \Gamma \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right) dt \\
&- \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right) dt \\
&- \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}} \frac{\partial x_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \frac{\partial x_n}{\partial t} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right) dt \\
&- \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{\partial L}{\partial x} \Gamma \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right) dt \\
&- \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}} \frac{\partial x_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \frac{\partial x_n}{\partial t} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{\partial L}{\partial x} \Gamma \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right) dt
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Pochodną $\left. \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right|_{(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))}$ wyrazimy za pomocą $\left. \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right|_{(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))}$. Z układu (2.4), którego wszystkie równania zapisane są na charakterystyce $x = x_k(t; \bar{t}, \bar{x})$, mamy:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right|_{(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))} = -D \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} + Lb + LB \Gamma \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} + \left[\frac{\partial L}{\partial t} + D \frac{\partial L}{\partial x} \right] \Gamma \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \Bigg|_{(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))}.$$

Stąd (2.35) przyjmuje ostatecznie postać:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(\frac{dL}{dt} \Gamma \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right) dt &= \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_{\bar{t}} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \Gamma \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right) \\
&- \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_0 \left(\frac{\partial L}{\partial x} \Gamma \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right) \\
&+ \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{dL}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right) dt \\
&+ \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{dL}{dt} \Gamma \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right) dt \\
&- \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right) dt \\
&- \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}} \frac{\partial x_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \frac{\partial x_n}{\partial t} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right) dt \\
&- \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{\partial L}{\partial x} b \right) dt
\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{\partial L}{\partial x} B \Gamma \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right) dt \\
& - \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{\partial L}{\partial x} \Gamma \left(\frac{\partial L}{\partial t} + D \frac{\partial L}{\partial x} \right) \Gamma \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right) dt \\
& - \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}} \frac{\partial x_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \frac{\partial x_n}{\partial t} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{\partial L}{\partial x} \Gamma \frac{\partial \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix}}{\partial x} \right) dt \\
& + \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{\partial L}{\partial x} \Gamma D \frac{\partial \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix}}{\partial x} \right) dt.
\end{aligned}$$

Teraz możemy zapisać wzór na pochodną $\frac{\partial \begin{pmatrix} s+1 \\ r_k \end{pmatrix}}{\partial \bar{x}}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \begin{pmatrix} s+1 \\ r \end{pmatrix}(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\mathcal{P}_0 r^0 + \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t(Lb) dt \right) \\
&+ \int_0^{\bar{t}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\mathcal{P}_t(LB\Gamma) \right) \begin{pmatrix} s \\ M \end{pmatrix} dt \\
&+ \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_t \left(LB\Gamma \frac{\partial \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix}}{\partial x} \right) dt \\
&+ \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_{\bar{t}} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \Gamma \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right) \\
&- \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_0 \left(\frac{\partial L}{\partial x} \Gamma \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right) \\
&+ \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{dL}{dt} \frac{\partial \Gamma \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix}}{\partial x} \right) dt \\
&+ \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{dL}{dt} \Gamma \frac{\partial \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix}}{\partial x} \right) dt \\
&- \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial \Gamma \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix}}{\partial t} \right) dt \\
&- \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}} \frac{\partial x_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \frac{\partial x_n}{\partial t} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial \Gamma \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix}}{\partial x} \right) dt \\
&- \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{\partial L}{\partial x} b \right) dt \\
&- \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{\partial L}{\partial x} B \Gamma \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right) dt \\
&- \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{\partial L}{\partial x} \Gamma \left(\frac{\partial L}{\partial t} + D \frac{\partial L}{\partial x} \right) \Gamma \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \right) dt \\
&- \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}} \frac{\partial x_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \frac{\partial x_n}{\partial t} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{\partial L}{\partial x} \Gamma \frac{\partial \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix}}{\partial x} \right) dt \\
&+ \int_0^{\bar{t}} \text{diag} \left[\frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}} \right] \mathcal{P}_t \left(\frac{\partial L}{\partial x} \Gamma D \frac{\partial \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix}}{\partial x} \right) dt,
\end{aligned} \tag{2.37}$$

gdzie

$$M = \begin{bmatrix} \binom{(s)}{r_1}(t, x_1(t; \bar{t}, \bar{x})) & \dots & \binom{(s)}{r_1}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) & \dots & \binom{(s)}{r_1}(t, x_n(t; \bar{t}, \bar{x})) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{(s)}{r_n}(t, x_1(t; \bar{t}, \bar{x})) & \dots & \binom{(s)}{r_n}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) & \dots & \binom{(s)}{r_n}(t, x_n(t; \bar{t}, \bar{x})) \end{bmatrix}$$

Oszacujemy teraz normę $\left\| \frac{\partial \binom{(s+1)}{r}(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \binom{(s)}{r}(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \right\|_0$ korzystając ze wzoru (2.37). Ograniczając współczynniki układu i ich pochodne przez stałe oraz uwzględniając (2.23) dostajemy:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \binom{(s+1)}{r}(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \binom{(s)}{r}(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \right\|_0 &\leq C \left\| \binom{(s)}{r}(\bar{t}, \bar{x}) - \binom{(s-1)}{r}(\bar{t}, \bar{x}) \right\|_0 \\ &+ C \int_0^{\bar{t}} \left\| \binom{(s)}{r}(t, \bar{x}) - \binom{(s-1)}{r}(t, \bar{x}) \right\|_0 dt \\ &+ C \int_0^{\bar{t}} \left\| \frac{\partial \binom{(s)}{r}(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \binom{(s-1)}{r}(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \right\|_0 dt, \end{aligned} \quad (2.38)$$

dla pewnej nieujemnej stałej C .

Dwa pierwsze składniki po prawej stronie możemy ograniczyć przy pomocy (2.32):

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \binom{(s+1)}{r}(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \binom{(s)}{r}(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \right\|_0 &\leq C C_0 \frac{(C_0 \bar{t})^{s-1}}{(s-1)!} + C \int_0^{\bar{t}} C_0 \frac{(C_0 t)^{s-1}}{(s-1)!} dt \\ &+ C \int_0^{\bar{t}} \left\| \frac{\partial \binom{(s)}{r}(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \binom{(s-1)}{r}(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \right\|_0 dt. \end{aligned}$$

Niech $\tilde{C} := \max\{C; C_0; CC_0\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \binom{(s+1)}{r}(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \binom{(s)}{r}(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \right\|_0 &\leq \tilde{C} \frac{(\tilde{C} \bar{t})^{s-1}}{(s-1)!} + \tilde{C} \frac{(\tilde{C} \bar{t})^s}{s!} \\ &+ \tilde{C} \int_0^{\bar{t}} \left\| \frac{\partial \binom{(s)}{r}(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \binom{(s-1)}{r}(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \right\|_0 dt. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Zauważmy, że dla $\bar{t} \in [0, T]$ zachodzi

$$\begin{aligned} &\tilde{C} \frac{(\tilde{C} \bar{t})^{s-1}}{(s-1)!} + \tilde{C} \frac{(\tilde{C} \bar{t})^s}{s!} + \tilde{C} \int_0^{\bar{t}} \left\| \frac{\partial \binom{(s)}{r}(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \binom{(s-1)}{r}(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \right\|_0 dt \\ &\leq \tilde{C} \frac{(\tilde{C} T)^{s-1}}{(s-1)!} + \tilde{C} \frac{(\tilde{C} T)^s}{s!} + \tilde{C} \int_0^T \max_{\tau \in [0, t]} \left\| \frac{\partial \binom{(s)}{r}(\tau, \bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \binom{(s-1)}{r}(\tau, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \right\|_0 dt. \end{aligned}$$

Z nierówności (2.39), dla każdego $\bar{t} \in [0, T]$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \binom{(s+1)}{r}(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \binom{(s)}{r}(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \right\|_0 &\leq \tilde{C} \frac{(\tilde{C} T)^{s-1}}{(s-1)!} + \tilde{C} \frac{(\tilde{C} T)^s}{s!} \\ &+ \tilde{C} \int_0^T \max_{\tau \in [0, t]} \left\| \frac{\partial \binom{(s)}{r}(\tau, \bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \binom{(s-1)}{r}(\tau, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \right\|_0 dt, \end{aligned}$$

A zatem

$$\begin{aligned} \max_{\bar{t} \in [0, T]} \left\| \frac{\partial^{(s+1)} r}{\partial \bar{x}}(\bar{t}, \bar{x}) - \frac{\partial^{(s)} r}{\partial \bar{x}}(\bar{t}, \bar{x}) \right\|_0 &\leq \tilde{C} \frac{(\tilde{C} T)^{s-1}}{(s-1)!} + \tilde{C} \frac{(\tilde{C} T)^s}{s!} \\ &+ \tilde{C} \int_0^T \max_{\tau \in [0, t]} \left\| \frac{\partial^{(s)} r}{\partial \bar{x}}(\tau, \bar{x}) - \frac{\partial^{(s-1)} r}{\partial \bar{x}}(\tau, \bar{x}) \right\|_0 dt, \end{aligned} \quad (2.40)$$

Wprowadzamy analogicznie do (2.29) funkcje $Q_1^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots$):

$$Q_1^{(i)}(t) = \max_{\eta \in [0, t]} \left\| \frac{\partial^{(i+1)} r}{\partial \bar{x}}(\eta, \bar{x}) - \frac{\partial^{(i)} r}{\partial \bar{x}}(\eta, \bar{x}) \right\|_0, \quad (2.41)$$

i zapisujemy nierówność (2.40) w postaci:

$$Q_1^{(s)}(T) \leq \tilde{C} \frac{(\tilde{C} T)^{s-1}}{(s-1)!} + \tilde{C} \frac{(\tilde{C} T)^s}{s!} + \tilde{C} \int_0^T Q_1^{(s-1)}(\tau) d\tau. \quad (2.42)$$

Stosując s-krotnie wzór rekurencyjny (2.42) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} Q_1^{(s)}(T) &\leq s \tilde{C} \frac{(\tilde{C} T)^{s-1}}{(s-1)!} + s \tilde{C} \frac{(\tilde{C} T)^s}{s!} + C_{Q_1} \frac{(\tilde{C} T)^s}{s!} \\ &= \tilde{C} \frac{(\tilde{C} T)^{s-1}}{s!} (s^2 + s \tilde{C} T + C_{Q_1} T) \\ &\leq s^2 \tilde{C} \frac{(\tilde{C} T)^{s-1}}{s!} (1 + \tilde{C} T + C_{Q_1} T), \end{aligned}$$

gdzie $C_{Q_1} := Q_1^{(0)}$ ze względu na ograniczoność współczynników układu (2.1) i ich pochodnych w zbiorze G .

Weźmy stałą $C_T \geq \max\{\tilde{C}; C_{Q_1}\}$ i taką, że $C_T \cdot T \geq 1$. Wówczas

$$s^2 \tilde{C} \frac{(\tilde{C} T)^{s-1}}{s!} (1 + \tilde{C} T + C_{Q_1} T) \leq s^2 \tilde{C} \frac{(\tilde{C} T)^{s-1}}{s!} 3 C_T T.$$

Jeśli teraz oznaczymy przez $C_1 = 3C_T$, to ostatecznie otrzymamy

$$Q_1^{(s)}(T) \leq s^2 C_1 \frac{(C_1 T)^s}{s!}. \quad (2.43)$$

Zbieżność ciągu $\left\{ \frac{\partial^{(s)} r}{\partial \bar{x}} \right\}$ w zbiorze G jest równoważna zbieżności szeregu funkcyjnego $\sum_{s=0}^{\infty} f_s$, gdzie

$$f_s = \begin{cases} \frac{dr^0}{d\bar{x}}, & \text{gdym } s = 0 \\ \frac{\partial^{(s)} r}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial^{(s-1)} r}{\partial \bar{x}}, & \text{gdym } s \geq 1. \end{cases} \quad (2.44)$$

Z (2.43) mamy:

$$\max_{(t, x) \in G} |f_s| \leq (s-1)^2 C_1 \frac{(C_1 T)^{s-1}}{(s-1)!}.$$

Szereg liczbowy $\sum_{s=1}^{\infty} a_s$, gdzie $a_s = (s-1)^2 C_1 \frac{(C_1 T)^{s-1}}{(s-1)!}$ jest zbieżny na mocy kryterium d'Alemberta, ponieważ $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{a_{s+1}}{a_s} = 0$. Z kryterium Weierstrassa szereg funkcyjny (2.44) jest zbieżny jednostajnie na zbiorze G , co oznacza jednostajną zbieżność ciągu $\left\{ \frac{\partial^{(s)} r}{\partial \bar{x}} \right\}$ na zbiorze G i ostatecznie ciągłość funkcji $\frac{\partial r(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}}$.

2.7 Ocena wzrostu rozwiązania

Twierdzenie 2.3 *Przy założeniach Twierdzenia 2.2, dla $t \in [0, T]$ zachodzi następująca nierówność:*

$$\|u(t, x)\|_0 \leq K_3 K_0 e^{K_2 t} + K_3 \frac{K_1}{K_2} (e^{K_2 t} - 1), \quad (2.45)$$

gdzie

$$\begin{aligned} K_0 &= \|L(0, x) u^0\|_0 = \|r^0(x)\|_0, \\ K_1 &= \max_{t \in [0, T]} \|L b\|_0, \\ K_2 &= \max_{t \in [0, T]} \|L B \Gamma\|_0 + \max_{t \in [0, T]} \left\| \left(\frac{\partial L}{\partial t} + D \frac{\partial L}{\partial x} \right) \Gamma \right\|_0, \\ K_3 &= \max_{t \in [0, T]} \|\Gamma\|_0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Dowód. Szacujemy (2.14) w normie (2.22):

$$\begin{aligned} \|r(t, x)\|_0 &\leq \|r^0(x)\|_0 + \int_0^t \|L(\tau, x) b(\tau, x)\|_0 d\tau \\ &\quad + \int_0^t \|L(\tau, x) B(\tau, x) \Gamma(\tau, x)\|_0 \|r(\tau, x)\|_0 d\tau \\ &\quad + \int_0^t \left\| \left(\frac{\partial L(\tau, x)}{\partial \tau} + D(\tau, x) \frac{\partial L(\tau, x)}{\partial x} \right) \Gamma(\tau, x) \right\|_0 \|r(\tau, x)\|_0 d\tau. \end{aligned}$$

Na mocy lematu Gronwalla dla $t \in [0, T]$ zachodzi nierówność:

$$\|r(t, x)\|_0 \leq K_0 e^{K_2 t} + \frac{K_1}{K_2} (e^{K_2 t} - 1),$$

gdzie stałe K_0, K_1, K_2 są zdefiniowane wzorami (2.46). Ponieważ

$$\|u(t, x)\|_0 \leq \|\Gamma(t, x)\|_0 \|r(t, x)\|_0,$$

oraz

$$K_3 = \max_{t \in [0, T]} \|\Gamma\|_0,$$

stąd natychmiast dostajemy nierówność (2.45). □

2.8 Zagadnienie z zerowym warunkiem początkowym

Jak w ogólności wiadomo, zagadnienie (2.1)-(2.2) można łatwo sprowadzić do zagadnienia z zerowym warunkiem początkowym. Podstawiamy

$$v(t, x) = u(t, x) - u^0(x),$$

i dostajemy układ następującej postaci:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A(t, x) \frac{\partial v}{\partial x} = b(t, x) - A(t, x) \frac{d u^0}{d x} + B(t, x) u^0 + B(t, x) v, \quad (2.47)$$

$$v(0, x) = 0, \quad x \in [\alpha, \beta]. \quad (2.48)$$

Jeśli $A, b, B \in C^1([0, T_0] \times [\alpha_0, \beta_0])$, $u^0 \in C^1([\alpha, \beta])$ wówczas prawa strona (2.47) jest jedynie ciągła. Jednak nie musimy zakładać $u^0 \in C^2([\alpha, \beta])$, aby dla zagadnienia (2.47)-(2.48) otrzymać rozwiązanie klasy C^1 .

Zapiszemy układ (2.47) w inwariantach Riemanna ($r = Lv$):

$$\frac{\partial r}{\partial t} + D \frac{\partial r}{\partial x} = Lb + LBu^0 - DL \frac{du^0}{dx} + \left[LB\Gamma + \left(\frac{\partial L}{\partial t} + D \frac{\partial L}{\partial x} \right) \Gamma \right] r, \quad (2.49)$$

$$r(0, x) = 0, \quad x \in [\alpha, \beta]. \quad (2.50)$$

Jednoznaczność i istnienie uogólnionego rozwiązania zagadnienia (2.49)-(2.50) wykazuje się tak, jak dla zagadnienia (2.4)-(2.5).

W dowodzie istnienia rozwiązania klasy C^1 problem stanowi składnik postaci $DL \frac{du^0}{dx}$ będący wektorem, którego składowe są funkcjami tylko ciągłymi. Podobna uwaga dotyczy wyrażenia $\frac{\partial L}{\partial t} + D \frac{\partial L}{\partial x}$, z którym poradziliśmy sobie w dowodzie Twierdzenia 2.1 przy pomocy Lematu 2.2. Zauważyliśmy bowiem, że jest to macierz, której elementy są pochodnymi elementów macierzy L wzdłuż odpowiednich charakterystyk. W ten sam sposób podejmiemy do problemu związanego z wyrażeniem $DL \frac{du^0}{dx}$.

k -ta składowa wektora $DL \frac{du^0}{dx}$ ma postać

$$\sum_{j=1}^n L_{kj}(t, x) \xi_k(t, x) \frac{du_j^0(x)}{dx},$$

Każdy składnik tej sumy jest iloczynem funkcji L_{kj} różniczkowalnej w sposób ciągły przez $\xi_k \frac{du_j^0(x)}{dx}$ - pochodną funkcji $u_j^0(x)$ wzdłuż charakterystyki $x = x_k(t; \bar{t}, \bar{x})$. Zauważmy, że klasę tych funkcji odzyskujemy całkując wzdłuż charakterystyk, ponieważ na podstawie Lematu 2.2 całki

$$\int_0^{\bar{t}} L_{kj}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) \frac{du_j^0(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))}{dt} dt, \quad j, k = 1, \dots, n,$$

są funkcjami klasy C^1 .

Chcemy zatem przedstawić $DL \frac{du^0}{dx}$ jako iloczyn funkcji macierzowej klasy C^1 przez funkcję wektorową, której k -ta składowa ($k = 1, \dots, n$) jest pochodną funkcji u wzdłuż k -tej charakterystyki.

Jeśli macierz D jest odwracalna, to $DL \frac{du^0}{dx}$ możemy łatwo zapisać w postaci

$$DL \frac{du^0}{dx} = (DL D^{-1}) \left(D \frac{du^0}{dx} \right).$$

W przeciwnym przypadku przyjmijmy

$$DL \frac{du^0}{dx} = \sum_{j=1}^n H^j \left(D \frac{dF^j}{dx} \right),$$

dla

$$H^j = \begin{bmatrix} L_{1j} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & L_{kj} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & L_{nj} \end{bmatrix}, \quad F^j = \begin{bmatrix} u_j^0 \\ \vdots \\ u_j^0 \\ \vdots \\ u_j^0 \end{bmatrix}.$$

Na podstawie powyższych spostrzeżeń sformułujemy

Twierdzenie 2.4 Niech elementy macierzy $D(t, x) = \text{diag}[\xi_1(t, x), \dots, \xi_n(t, x)]$ i $[H^j(t, x)]_{j=1, \dots, m}$ oraz wektorów $[F^j(t, x)]_{j=1, \dots, m}$ będą funkcjami klasy $C^1([0, T_0] \times [\alpha_0, \beta_0])$. Niech ponadto $V^0(x) \in C^1([\alpha, \beta])$. Wówczas zagadnienie

$$\frac{\partial V}{\partial t} + D \frac{\partial V}{\partial x} = \sum_{j=1}^m H^j \left(\frac{\partial F^j}{\partial t} + D \frac{\partial F^j}{\partial x} \right) \quad (2.51)$$

$$V(0, x) = V^0(x), \quad x \in [\alpha, \beta] \quad (2.52)$$

ma jednoznaczne rozwiązanie klasy $C^1(G)$.

Dowód. Zapisujemy układ w postaci

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{P}_t V) = \sum_{j=1}^m \mathcal{P}_t \left(H^j \frac{dF^j}{dt} \right).$$

Całkując względem t od 0 do \bar{t} dostajemy:

$$V(\bar{t}, \bar{x}) = \mathcal{P}_0 V^0 + \sum_{j=1}^m \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(H^j \frac{dF^j}{dt} \right) dt.$$

Z założenia $V^0 \in C^1([\alpha, \beta])$.

Niech H_{kl}^j oznacza element macierzy H^j stojący w k -tym wierszu i l -tej kolumnie, zaś F_l^j niech będzie l -tą składową wektora kolumnowego F^j . Na mocy Lematu 2.2 każda całka

$$\int_0^{\bar{t}} H_{kl}^j(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) \frac{dF_l^j(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))}{dt} dt, \quad k, l = 1, \dots, n;$$

jest funkcją klasy C^1 . Stąd wnioskujemy, że $V \in C^1([0, T_0] \times [\alpha_0, \beta_0])$.

Jednoznaczność. Niech V i \bar{V} będą dwoma różnymi rozwiązaniami. Wtedy oznaczając

$$R(t, x) = V(t, x) - \bar{V}(t, x)$$

dostajemy z (2.51):

$$R_t + D R_x = 0, \quad R(0, x) = (0, \dots, 0)^T$$

Zapisujemy powyższy układ w postaci

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{P}_t R) = 0,$$

i całkując otrzymujemy

$$R(\bar{t}, \bar{x}) \equiv 0.$$

□

2.9 Uogólnienie twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności na przypadek funkcji klasy C^k , $k \geq 1$

Twierdzenie 2.5 Jeśli $D, L, b, B \in C^k([0, T_0] \times [\alpha_0, \beta_0])$, $k \geq 1$ oraz $u^0 \in C^k([\alpha, \beta])$, to istnieje jednoznaczne rozwiązanie $u \in C^k(G)$ zagadnienia (2.1) - (2.2).

Jednoznaczność rozwiązania klasy C^k wynika z wykazanej w Twierdzeniu 2.1 jednoznaczności uogólnionego rozwiązania zagadnienia (2.1) - (2.2).

Istnienie. Niech $\overset{(s)}{r} = L \overset{(s)}{u}$, $s = 0, 1, \dots$. Zgodnie ze wzorem (2.24) przyjmujemy, że $\overset{(0)}{r}(t, x) = r^0(x) = L(0, x) u^0(x)$. Każda następną funkcją ciągu $\{\overset{(s)}{r}\}$ jest rozwiązaniem równania całkowego (2.25). Funkcja $\overset{(0)}{r}$ jest na podstawie założeń o współczynnikach układu funkcją klasy $C^k(G)$. Jeśli s -te przybliżenie $\overset{(s)}{r}$ jest funkcją klasy $C^k(G)$, to na mocy Lematu 2.2, funkcja $J(\bar{t}, \bar{x}) = \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(\frac{dL}{dt} \Gamma \overset{(s)}{r} \right) dt$ jest klasy C^k . To oznacza, że również $\overset{(s+1)}{r} \in C^1(G)$.

Ponieważ funkcje L , Γ , b , B , D i ich pochodne aż do rzędu k włącznie są ograniczone w $[0, T_0] \times [\alpha_0, \beta_0]$, dlatego łatwo zauważyć, że dla dowolnego $j = 1, \dots, k$ istnieje nieujemna stała C_k taka, że zachodzi nierówność:

$$\left\| \frac{\partial^j \overset{(s+1)}{r}(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}^j} - \frac{\partial^j \overset{(s)}{r}(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right\|_0 \leq C_k \sum_{m=0}^{j-1} \left\| \frac{\partial^m \overset{(s)}{r}(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}^m} - \frac{\partial^m \overset{(s-1)}{r}(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}^m} \right\|_0 \quad (2.53)$$

$$+ C_k \sum_{m=0}^j \int_0^{\bar{t}} \left\| \frac{\partial^m \overset{(s)}{r}(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}^m} - \frac{\partial^m \overset{(s-1)}{r}(t, \bar{x})}{\partial \bar{x}^m} \right\|_0 dt.$$

Dla dowolnego $s \geq 0$ oraz $j = 0, \dots, k$ oznaczamy

$$Q_j^{(s)}(t) = \max_{\eta \in [0, t]} \left\| \frac{\partial^j \overset{(s+1)}{r}(\eta, \bar{x})}{\partial \bar{x}^j} - \frac{\partial^j \overset{(s)}{r}(\eta, \bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right\|_0. \quad (2.54)$$

Niech $\bar{t} \in [0, T]$. Wówczas z (2.53) dostajemy:

$$Q_j^{(s)}(T) \leq C_k \sum_{m=0}^{j-1} Q_m^{(s-1)}(T) + C_k \sum_{m=1}^j \int_0^T Q_m^{(s-1)}(t) dt. \quad (2.55)$$

Lemat 2.3 Dla $j = 0, \dots, k$ oraz $s \geq 0$ zachodzi nierówność:

$$Q_j^{(s)}(T) \leq C_j \frac{(C_j T)^s s^{2j}}{s!}, \quad \text{gdzie } C_j = \text{const}. \quad (2.56)$$

Dowód. Rozumowanie indukcyjne ze względu na j .

Na podstawie (2.32) i (2.43) mamy:

$$Q_0^{(s)}(T) \leq C_0 \frac{(C_0 T)^s}{s!}, \quad Q_1^{(s)}(T) \leq C_1 \frac{(C_1 T)^s s^2}{s!},$$

czyli nierówność (2.56) zachodzi dla $j = 0$ i $j = 1$.

Założmy, że teza jest prawdziwa dla wszystkich $j = 0, \dots, \tilde{k} - 1$, gdzie $\tilde{k} - 1 < k$. Pokażemy, że nierówność (2.56) zachodzi również dla $j = \tilde{k}$.

Korzystając z (2.55) zapisujemy:

$$Q_{\tilde{k}}^{(s)}(T) \leq C \sum_{m=0}^{\tilde{k}-1} Q_m^{(s-1)}(T) + C \sum_{m=1}^{\tilde{k}} \int_0^T Q_m^{(s-1)}(t) dt$$

$$= C \sum_{m=0}^{\tilde{k}-1} Q_m^{(s-1)}(T) + C \sum_{m=1}^{\tilde{k}-1} \int_0^T Q_m^{(s-1)}(t) dt + C \int_0^T Q_{\tilde{k}}^{(s-1)}(t) dt.$$

Każde $Q_j^{(s)}(T)$ dla $j = 0, \dots, \tilde{k}-1$ oraz $s \geq 0$, możemy oszacować z góry przez wyrażenie postaci $s^{2j} C_j \frac{(C_j T)^s}{s!}$:

$$\begin{aligned} Q_{\tilde{k}}^{(s)}(T) &\leq C \sum_{m=0}^{\tilde{k}-1} \frac{C_m (C_m T)^{s-1} (s-1)^{2m}}{(s-1)!} \\ &\quad + C \sum_{m=0}^{\tilde{k}-1} \int_0^T \frac{C_m (C_m t)^{s-1} (s-1)^{2m}}{(s-1)!} dt + C \int_0^T Q_{\tilde{k}}^{(s-1)}(t) dt \\ &= C \sum_{m=0}^{\tilde{k}-1} \frac{C_m (C_m T)^{s-1} (s-1)^{2m}}{(s-1)!} \\ &\quad + C \sum_{m=0}^{\tilde{k}-1} \frac{(C_m T)^s (s-1)^{2m}}{s!} + C \int_0^T Q_{\tilde{k}}^{(s-1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Niech stała $\tilde{C} \geq \max\{C, C \cdot C_m; m = 0, \dots, \tilde{k}-1\}$ i taka, że $\tilde{C} \cdot T \geq 1$. Wówczas

$$(\tilde{C}T)^{s-1} \leq (\tilde{C}T)^s$$

oraz

$$\begin{aligned} Q_{\tilde{k}}^{(s)}(T) &\leq 2 \sum_{m=0}^{\tilde{k}-1} \frac{\tilde{C} (\tilde{C}T)^s (s-1)^{2m}}{(s-1)!} + \tilde{C} \int_0^T Q_{\tilde{k}}^{(s-1)}(t) dt \\ &\leq 2\tilde{k}\tilde{C} \frac{(\tilde{C}T)^s (s-1)^{2(\tilde{k}-1)}}{(s-1)!} + \tilde{C} \int_0^T Q_{\tilde{k}}^{(s-1)}(t) dt \\ &\leq 2\tilde{k}\tilde{C} \frac{(2\tilde{k}\tilde{C}T)^s (s-1)^{2(\tilde{k}-1)}}{(s-1)!} + 2\tilde{k}\tilde{C} \int_0^T Q_{\tilde{k}}^{(s-1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Oznaczamy stałą $\tilde{C}_{\tilde{k}} = 2\tilde{k}\tilde{C}$ i zapisujemy powyższą nierówność w postaci:

$$Q_{\tilde{k}}^{(s)}(T) \leq \tilde{C}_{\tilde{k}} \frac{(\tilde{C}_{\tilde{k}} T)^s}{(s-1)!} (s-1)^{2(\tilde{k}-1)} + \tilde{C}_{\tilde{k}} \int_0^T Q_{\tilde{k}}^{(s-1)}(t) dt, \quad s \geq 1. \quad (2.57)$$

Stosujemy teraz s -krotnie (2.57) i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} Q_{\tilde{k}}^{(s)}(T) &\leq \tilde{C}_{\tilde{k}} \frac{(\tilde{C}_{\tilde{k}} T)^s}{s!} (s-1)^{2(\tilde{k}-1)} s \\ &\quad + \tilde{C}_{\tilde{k}} \frac{(\tilde{C}_{\tilde{k}} T)^s}{s!} (s-2)^{2(\tilde{k}-1)} (s-1) \\ &\quad + \tilde{C}_{\tilde{k}} \frac{(\tilde{C}_{\tilde{k}} T)^s}{s!} (s-3)^{2(\tilde{k}-1)} (s-2) \\ &\quad + \dots + \tilde{C}_{\tilde{k}} \frac{(\tilde{C}_{\tilde{k}} T)^s}{s!} 2^{2(\tilde{k}-1)} 3 \\ &\quad + \tilde{C}_{\tilde{k}} \frac{(\tilde{C}_{\tilde{k}} T)^s}{s!} 2 \\ &\quad + \tilde{C}_{\tilde{k}} \int_0^T d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_3 \dots \int_0^{\tau_{s-1}} Q_{\tilde{k}}^{(0)}(\tau_s) d\tau_s \\ &\leq \tilde{C}_{\tilde{k}} \frac{(\tilde{C}_{\tilde{k}} T)^s}{s!} s^{2\tilde{k}} + Q_{\tilde{k}}^{(0)} \frac{(\tilde{C}_{\tilde{k}} T)^s}{s!} \\ &\leq \left(\tilde{C}_{\tilde{k}} + Q_{\tilde{k}}^{(0)} \right) \frac{(\tilde{C}_{\tilde{k}} T)^s}{s!} s^{2\tilde{k}} \end{aligned}$$

gdzie $Q_{\bar{k}}^{(0)}$ jest stałe.

Niech $C_{\bar{k}} = \tilde{C}_{\bar{k}} + Q_{\bar{k}}^{(0)}$. Ostatecznie dostajemy

$$Q_{\bar{k}}^{(s)}(T) \leq C_{\bar{k}} \frac{(C_{\bar{k}} T)^s}{s!} s^{2\bar{k}},$$

co kończy dowód lematu. □

Zbieżność ciągu $\{\frac{\partial^k r^{(s)}}{\partial \bar{x}^k}\}$ na zbiorze G jest równoważna zbieżności szeregu funkcyjnego $\sum_{s=0}^{\infty} f_s$ dla

$$f_s = \begin{cases} \frac{d^k r^0}{d\bar{x}^k} & , \text{gd}y \quad s = 0 \\ \frac{\partial^k r^{(s)}}{\partial \bar{x}^k} - \frac{\partial^k r^{(s-1)}}{\partial \bar{x}^k} & , \text{gd}y \quad s \geq 1. \end{cases} \quad (2.58)$$

Na mocy Lematu 2.3 mamy, że dla $s \geq 1$ prawdziwa jest nierówność:

$$\max_{(\bar{t}, \bar{x}) \in G} |f_s| \leq C_k \frac{(C_k T)^{s-1}}{(s-1)!} (s-1)^{2k}$$

Szereg liczbowy $\sum_{s=1}^{\infty} a_s$, gdzie $a_s = C_k \frac{(C_k T)^{s-1}}{(s-1)!} (s-1)^{2k}$ jest zbieżny na mocy kryterium d'Alemberta, ponieważ $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{a_{s+1}}{a_s} = \lim_{s \rightarrow +\infty} C_k T \frac{s^{2k-1}}{(s-1)^{2k}} = 0$. Z kryterium Weierstrassa szereg

(2.58) jest zbieżny jednostajnie na zbiorze G , co oznacza jednostajną zbieżność ciągu $\{\frac{\partial^k r^{(s)}}{\partial \bar{x}^k}\}$ na zbiorze G . Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest ciągła, więc funkcja $\frac{\partial^k r(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}^k}$ jest ciągła w G .

Istnienie i ciągłość pochodnych mieszanych do rzędu k wynika z istnienia ciągłych pochodnych względem zmiennej x aż do rzędu k oraz z równania $u_t = b + Bu - Au_{,x}$. Wyjaśnimy to na przykładzie pochodnych rzędu drugiego. Jeśli współczynniki układu są klasy $C^2([0, T_0] \times [\alpha_0, \beta_0])$ oraz $u^0 \in C^2([\alpha, \beta])$, to w G istnieje ciągła pochodna $u_{,xx}$. Z równania $u_t = b + Bu - Au_{,x}$ dostajemy (różniczkując względem x) ciągłą pochodną mieszaną $u_{,tx}$:

$$u_{,tx} = b_{,x} + B_{,x}u + Bu_{,x} - A_{,x}u_{,x} - Au_{,xx}.$$

Pozostaje jeszcze wyznaczenie $u_{,tt}$. Ponownie z równania $u_t = b + Bu - Au_{,x}$ mamy

$$u_{,tt} = b_{,t} + B_{,t}u + Bu_{,t} - A_{,t}u_{,x} - Au_{,xt}.$$

Pochodna $u_{,tt}$ jest ciągła wobec ciągłości wyrażeń po prawej stronie.

Analogicznie należy postępować z pochodnymi wyższych rzędów.

2.10 Rozwiązanie uogólnione układu z wahaniem skończonym lewych wektorów własnych wzdłuż charakterystyk

We wstępie rozdziału zasygnalizowaliśmy, że twierdzenie o istnieniu rozwiązania ciągłego zostanie również sformułowane przy osłabionych założeniach dotyczących współczynników układu. Przypomnijmy całkową postać układu (2.1):

$$u(\bar{t}, \bar{x}) = \Gamma(\bar{t}, \bar{x}) \mathcal{P}_0 r^0 + \Gamma(\bar{t}, \bar{x}) \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t (Lb + LBu) dt + \Gamma(\bar{t}, \bar{x}) \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(\frac{dL}{dt} u \right) dt. \quad (2.59)$$

W celu uogólnienia rozwiązania tego układu potraktujemy ostatnią całkę jako całkę Stieltjesa ze względu na zmienną t :

$$u(\bar{t}, \bar{x}) = \Gamma(\bar{t}, \bar{x})\mathcal{P}_0 r^0 + \Gamma(\bar{t}, \bar{x}) \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t (Lb + LBu) dt + \Gamma(\bar{t}, \bar{x}) \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t (dL u). \quad (2.60)$$

Jeśli funkcja u jest ciągła, wówczas dla istnienia całki Stieltjesa w (2.60) wystarczy, że składniki macierzy lewych wektorów własnych L będą miały wahanie skończone wzdłuż charakterystyk dla $t \in [0, \bar{t}]$ (odpowiednio L_{sj} wzdłuż $x_s(t; \bar{t}, \bar{x})$, $s, j = 1, \dots, n$).

Sformułujemy teraz twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania uogólnionego zawierające spostrzeżenie dotyczące lewych wektorów własnych

Twierdzenie 2.6 *Niech elementy macierzy $L(t, x)$ i $\Gamma(t, x)$ będą funkcjami ciągłymi w $[0, T_0] \times [\alpha_0, \beta_0]$. Przypuśćmy też, że $L(t, x)$ ma wahanie skończone wzdłuż każdej charakterystyki $x = x_k(t; \bar{t}, \bar{x})$ zawartej w $[0, T] \times [\alpha_0, \beta_0]$, tzn. $L_{kj}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))$, $k, j = 1, \dots, n$ ma wahanie skończone jako funkcja zmiennej t . Niech ponadto wahanie to będzie funkcją ciągłą zmiennych (\bar{t}, \bar{x}) . Przyjmijmy również, że $D(t, x)$, $b(t, x)$, $B(t, x)$ są funkcjami ciągłymi na $[0, T_0] \times [\alpha_0, \beta_0]$, natomiast warunek początkowy $u^0(x)$ jest funkcją ciągłą dla $x \in [\alpha, \beta]$. Ponadto załóżmy, że składowe macierzy $D(t, x)$ spełniają warunek Lipschitza ze względu na zmienną x . Wówczas w zbiorze G istnieje jednoznaczne uogólnione rozwiązanie zagadnienia (2.1) - (2.2).*

Dowód. W dowodzie użyjemy twierdzenia Banacha o punkcie stałym.

Zdefiniujemy najpierw (dla $T^* \in [0, T]$) zbiór

$$G_{T^*} = G \cap ([0, T^*] \times [\alpha_0, \beta_0]). \quad (2.61)$$

Rozważmy teraz liniowe odwzorowanie \mathcal{Q} , które funkcji wektorowej $u \in C^0(G_{T^*})$ przyporządkowuje funkcję wektorową $U \in C^0(G_{T^*})$, $U = \mathcal{Q}(u)$, gdzie - zgodnie z (2.60) - przyjmujemy:

$$\mathcal{Q}(u) = U(\bar{t}, \bar{x}) = \Gamma(\bar{t}, \bar{x})\mathcal{P}_0 r^0 + \Gamma(\bar{t}, \bar{x}) \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t (Lb + LBu) dt + \Gamma(\bar{t}, \bar{x}) \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t (dL u). \quad (2.62)$$

Pokażemy, że dla odpowiednio małego T^* odwzorowanie \mathcal{Q} jest zwężające.

Będziemy potrzebowali następującego lematu

Lemat 2.4 *Niech $f, g : [0, T] \times G \rightarrow \mathbb{R}$. Załóżmy, że funkcje $f(\tau, t, x)$ i $g(\tau, t, x)$ są ciągłe na $[0, T] \times G$. Przyjmijmy, że g jest funkcją o wahanii skończonym ze względu na zmienną τ dla każdego ustalonego t, x . Ponadto niech jej wahanie będzie ciągłą funkcją zmiennych (t, x) ⁷.*

Wtedy

$$J(t, x) = \int_0^t f(\tau; t, x) dg(\tau; t, x) \quad (2.63)$$

jest funkcją ciągłą dwóch zmiennych.

Uwaga. W całce (2.63): t i x są traktowane jako parametry.

⁷Ciągłość funkcji $h(x, y)$ i jej wahanie skończone ze względu na y nie gwarantują, że wahanie będzie funkcją ciągłą ze względu na zmienną x . Jako przykład rozważmy funkcję

$$h : [-1, 1] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{y}{x} & , \quad x > 0, \\ 0 & , \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Funkcja h jest ciągła na zbiorze $[-1, 1] \times [-\pi, \pi]$ i ma skończone wahanie ze względu na y (dla każdego ustalonego x). Wahanie to wyraża się wzorem

$$\mathcal{V}_{-\pi}^{\pi}(h(x, \cdot)) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in [-1, 0] \\ 2x \left[\frac{\pi}{x} \right] + 2x \left| \sin \frac{\pi}{x} - \sin \left(\frac{\pi}{2} \left[\frac{2}{x} \right] \right) \right| & , \quad x \in (0, 1] \end{cases}$$

Nie jest to ciągła funkcja zmiennej x , ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{V}_{-\pi}^{\pi}(h(x, \cdot)) = 4$, podczas gdy $\lim_{x \rightarrow 0^-} \mathcal{V}_{-\pi}^{\pi}(h(x, \cdot)) = 0$.

Dowód. Niech $\mathcal{V}_{t_1}^{t_2}(g(\tau; t, x))$ oznacza wahanie funkcji g dla $\tau \in [t_1, t_2]$.
Zachodzi następujące oszacowanie

$$\begin{aligned}
|J(t, x) - J(t_0, x_0)| &= \left| \int_0^t f(\tau; t, x) dg(\tau; t, x) - \int_0^{t_0} f(\tau; t_0, x_0) dg(\tau; t_0, x_0) \right| \\
&\leq \left| \int_0^t f(\tau; t, x) dg(\tau; t, x) - \int_0^t f(\tau; t_0, x_0) dg(\tau; t_0, x_0) \right| \\
&\quad + \left| \int_0^t f(\tau; t_0, x_0) dg(\tau; t_0, x_0) - \int_0^{t_0} f(\tau; t_0, x_0) dg(\tau; t_0, x_0) \right| \\
&\leq \left| \int_0^t [f(\tau; t, x) - f(\tau; t_0, x_0)] dg(\tau; t, x) \right| \\
&\quad + \left| \int_0^t f(\tau; t_0, x_0) d[g(\tau; t, x) - g(\tau; t_0, x_0)] \right| \\
&\quad + \left| \int_{t_0}^t f(\tau; t_0, x_0) dg(\tau; t_0, x_0) \right| \\
&\leq \mathcal{V}_0^T(g(\tau; t, x)) \max_{\tau \in [0, T]} |f(\tau; t, x) - f(\tau; t_0, x_0)| \\
&\quad + \mathcal{V}_0^T(g(\tau; t, x) - g(\tau; t_0, x_0)) \max_{\tau \in [0, T]} |f(\tau; t_0, x_0)| \\
&\quad + \mathcal{V}_{t_0}^t(g(\tau; t_0, x_0)) \max_{\tau \in [0, T]} |f(\tau; t_0, x_0)|.
\end{aligned}$$

Ponieważ f jest ciągła, więc

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ x \rightarrow x_0}} \max_{\tau \in [0, T]} |f(\tau; t, x) - f(\tau; t_0, x_0)| = 0.$$

Ponadto funkcja g jest ciągła i ma wahanie skończone ze względu na τ dla każdego ustalonego t_0 i x_0 . Stąd⁸

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathcal{V}_{t_0}^t(g(\tau; t_0, x_0)) = 0.$$

Na mocy założenia, wahanie jest ciągłą funkcją (t, x) . Dlatego

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ x \rightarrow x_0}} V_0^T(g(\tau; t, x) - g(\tau; t_0, x_0)) = 0.$$

Ze względu na powyższe uwagi zachodzi równość

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ x \rightarrow x_0}} J(t, x) = J(t_0, x_0),$$

co dowodzi tezy lematu. □

Na podstawie Lematu 2.4, \mathcal{Q} odwzorowuje przestrzeń $C^0(G_{T^*})$ w siebie. Czas T^* możemy wybrać w taki sposób, że liniowe odwzorowanie \mathcal{Q} będzie kontrakcją. Rzeczywiście, niech u i \bar{u} będą dwiema dowolnymi funkcjami wektorowymi z przestrzeni $C^0(G_{T^*})$ z normą

$$\|u\| = \max_{(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{T^*}} \max_{k=1, \dots, n} |u_k(\bar{t}, \bar{x})|.$$

⁸Twierdzenie 4, str. 23, [26]: Jeżeli f jest funkcją o wahanii skończonym w $[a, b]$, ciągłą prawostronnie (lewostronnie) w x_0 , to wahanie $x \rightarrow \mathcal{V}_a^{x_0}(f)$ jest funkcją ciągłą prawostronnie (lewostronnie) w x_0 .

Dostajemy

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}(u) - \mathcal{Q}(\bar{u})\| &= \|U - \bar{U}\| \\ &\leq \left\| \Gamma \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t(LB(u - \bar{u})) dt \right\| + \left\| \Gamma \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t(dL(u - \bar{u})) \right\| \\ &\leq \|u - \bar{u}\| \|\Gamma\| \left(T^* \|LB\| + n \max_{(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{T^*}} \max_{s,j=1,\dots,n} \mathcal{V}_0^{T^*}(L_{sj}(t, x_s(t; \bar{t}, \bar{x}))) \right), \end{aligned} \quad (2.64)$$

gdzie $\mathcal{V}_0^{T^*}(L_{sj}(t, x_s(t; \bar{t}, \bar{x})))$ oznacza wahanie funkcji L_{sj} ze względu na t . Składowe macierzy L i Γ są ciągłe w $[0, T^*] \times [\alpha_0, \beta_0]$, zatem $\|\Gamma\| < \infty$, $\|LB\| < \infty$.

\mathcal{Q} będzie odwzorowaniem zwiężającym jeśli T^* spełni warunek

$$\|\Gamma\| \left(T^* \|LB\| + n \max_{(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{T^*}} \max_{s,j=1,\dots,n} \mathcal{V}_0^{T^*}(L_{sj}(t, x_s(t; \bar{t}, \bar{x}))) \right) < 1. \quad (2.65)$$

Naszym zadaniem jest teraz pokazanie, że (2.65) zachodzi dla pewnego $T^* > 0$.

Pierwsze wyrażenie w nawiasie zawiera T^* i może stać się dowolnie małe dla odpowiednio małego T^* :

$$T^* \|\Gamma\| \|LB\| \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad T^* \rightarrow 0. \quad (2.66)$$

Zauważmy, że dla $s, j = 1, \dots, n$ mamy

$$\mathcal{V}_0^{T^*}(L_{sj}(t, x_s(t; \bar{t}, \bar{x}))) \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad T^* \rightarrow 0. \quad (2.67)$$

Skoro \mathcal{Q} jest kontrakcją, więc jako liniowe odwzorowanie w przestrzeni Banacha jest również ciągłe. Ze zwartości zbioru G_{T^*} wynika, że czas $T^* > 0$ może być wybrany w taki sposób, iż (2.67) zachodzi dla wszystkich $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{T^*}$ jednocześnie.

Z (2.66) i (2.67) dostajemy istnienie T^* , $0 < T^* \leq T$ spełniającego warunek (2.65). Na mocy zasady Banacha, istnieje dokładnie jeden punkt stały odwzorowania \mathcal{Q} . Udowodniliśmy istnienie lokalnego w czasie rozwiązania układu (2.60) w G_{T^*} . Ponieważ normy macierzy L , B , Γ nie zależą od t , więc rozwiązanie może być przedłużone na cały zbiór G . Rzeczywiście, biorąc $t = T^*$ jako czas początkowy i $u(T^*, x)$ jako nowy warunek początkowy przechodzimy do problemu określonego na zbiorze

$$G_2 = \{(t, x) \in [T^*, \tilde{T}] \times [\alpha_0, \beta_0] : X(t) \leq x \leq Y(t)\}.$$

Postępując dalej w sposób analogiczny do zaprezentowanego, dostajemy rozwiązanie w zbiorze G , co kończy dowód Twierdzenia 2.6.

Na koniec zauważmy, że twierdzenie o istnieniu (lokalnego w czasie rozwiązania) podobne do Twierdzenia 2.6 może być również udowodnione dla układu półliniowego, tj. kiedy prawa strona układu jest ciągłą nieliniową funkcją, lipschitzowską ze względu na u .

W zastosowaniach często się zdarza, że współczynniki układu zależą tylko od x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(x) \frac{\partial u}{\partial x} = b(x), \quad (2.68)$$

$$u(0, x) = u^0(x), \quad x \in [\alpha, \beta]. \quad (2.69)$$

Jeśli zamiast ciągłości funkcji wektorowej $b(x)$ założymy jedynie, że jest ona pochodną wzdłuż charakterystyki pewnej ciągłej funkcji $f(x)$, tzn.

$$b(x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + D(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) f(x) = D(x) \frac{\partial}{\partial x} f(x), \quad (2.70)$$

to Twierdzenie 2.6 jest nadal prawdziwe. Rzeczywiście, układ (2.60) zapisany dla problemu Cauchy'ego (2.68) - (2.69) jest następujący

$$u(\bar{t}, \bar{x}) = \Gamma(\bar{t}, \bar{x}) \mathcal{P}_0 r^0 + \Gamma(\bar{t}, \bar{x}) \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t(L df) + \Gamma(\bar{t}, \bar{x}) \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t(dL u).$$

Całkując przez części otrzymujemy

$$\int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t(L df) = - \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t(dL f) + \mathcal{P}_{\bar{t}}(Lf) - \mathcal{P}_0(Lf). \quad (2.71)$$

Ze względu na (2.71), definiujemy rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego (2.68)-(2.69) jako funkcję ciągłą, spełniającą następujący układ równań całkowych:

$$\begin{aligned} u(\bar{t}, \bar{x}) = & \Gamma(\bar{t}, \bar{x}) \mathcal{P}_0 r^0 + \Gamma(\bar{t}, \bar{x}) \mathcal{P}_{\bar{t}}(Lf) - \Gamma(\bar{t}, \bar{x}) \mathcal{P}_0(Lf) \\ & - \Gamma(\bar{t}, \bar{x}) \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t(dL f) + \Gamma(\bar{t}, \bar{x}) \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t(dL u) \end{aligned}$$

Całka $\int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t(dL f)$ istnieje i na mocy Lematu 2.4, jest ciągłą funkcją dwóch zmiennych (\bar{t}, \bar{x}) .

Jeśli macierz $D(x)$ jest nieosobliwa i $b(x) \in \mathcal{L}^1([\alpha_0, \beta_0])$, wówczas funkcja wektorowa $f(x)$ z (2.70) zawsze istnieje i jest postaci

$$f(x) = \int_{\alpha_0}^x D^{-1}(y)b(y)dy.$$

Rozdział 3

Zagadnienie Cauchy'ego dla układu quasi-liniowego

Rozdział ten poświęcony będzie twierdzeniu o istnieniu i jednoznaczności zagadnienia Cauchy'ego dla układu quasi-liniowego. Dowód, który zostanie tu zaprezentowany pochodzi, podobnie jak dla układu liniowego, z książki Rozhdestvenskiego i Yanenki [29]. Bazuje on na metodzie charakterystyk i w zasadzie opiera się na pracy [20]. Nowymi elementami wprowadzonymi przez Rozhdestvenskiego i Yanenka są oszacowania wzrostu rozwiązania przy pomocy układu majoryzującego oraz sposób wykazania zbieżności ciągu pochodnych kolejnych przybliżeń. Idea układu majoryzującego stanowi element uproszczenia dowodu dla układu quasi-liniowego w stosunku do prezentowanego w [20].

W przeciwieństwie do układu liniowego, zazwyczaj nie jest możliwe sprowadzenie układu quasi-liniowego do układu w inwariantach. Stąd też istotną rolę w dowodzie odgrywa układ przedłużony, który już tę własność posiada. Zauważmy też, że obszar określoności zagadnienia Cauchy'ego, na ogół nie jest wiadomy na początku i otrzymujemy go jednocześnie z rozwiązaniem. Kolejna trudność wynika z faktu, że charakterystyki również nie są znane a priori.

Dla ułatwienia warunków początkowy zadamy na \mathbb{R} , dzięki czemu dowód będzie mniej zawiły technicznie. Nie straci jednak nic z ogólności, mimo iż rozwiązanie uzyskamy w pasie $[0, t_2] \times \mathbb{R}$ (dla pewnego t_2).

3.1 Zagadnienie Cauchy'ego

Będziemy rozważali quasi-liniowy układ hiperboliczny złożony z n równań:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial x} = b(t, x, u), \quad (3.1)$$

z warunkiem początkowym

$$u(0, x) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

gdzie niewiadoma funkcja wektorowa $u = [u_1, \dots, u_n]^T$ jest funkcją dwóch zmiennych t i x oraz macierz A jest diagonalizowalna i ma rzeczywiste wartości własne

$$A = \Gamma D L, \quad \Gamma = L^{-1}, \quad D = \text{diag} [\xi_1, \dots, \xi_n], \quad L = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}.$$

Wierszami macierzy L są liniowo niezależne lewe wektory własne $L_k = [L_{k1}, \dots, L_{kn}]$ ($k = 1, \dots, n$), macierzy A odpowiadające wartościom własnym - odpowiednio: wektor L_k odpowiada wartości

ξ_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Kolumnami macierzy Γ (macierzy odwrotnej do L) są liniowo niezależne prawe wektory własne macierzy A .

Po pomnożeniu układu (3.1) lewostronnie przez macierz L , zapisujemy go w postaci

$$L \frac{\partial u}{\partial t} + D L \frac{\partial u}{\partial x} = Lb. \quad (3.3)$$

Dla dowolnej funkcji macierzowej $f(t, x) = [f_{ij}(t, x)]_{\substack{i=1, \dots, n, \\ j=1, \dots, m}}$ ciągłej w $[0, T] \times \mathbb{R}$ ze względu na zmienną x , wprowadzamy normę

$$\|f(t, x)\|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(t, x)|, \quad (3.4)$$

przy czym

$$|f(t, x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_{ij}^2(t, x)}.$$

Oznaczamy następujący zbiór

$$G_0(U) = \{(t, x, u) \in \mathbb{R}^{n+2} : t \in [0, T], |u| \leq U\}, \quad U \in \mathbb{R}_+.$$

Zakładamy, że

- (i) $L, \Gamma, D, b \in C^1(G_0(U))$ dla dowolnego $U \in \mathbb{R}_+$ oraz są ograniczone wraz z pochodnymi w $G_0(U)$;
- (ii) $u^0 \in C^1(\mathbb{R})$ i jest ograniczone wraz z pochodną w zbiorze \mathbb{R} .

Pokażemy, że przy tych założeniach zachodzi następujące

Twierdzenie 3.1 *Istnieje lokalne w czasie, jednoznaczne rozwiązanie klasy C^1 zagadnienia (3.1) - (3.2).*

Dowód zaczniemy od zapisania układu przedłużonego dla układu (3.1). Następnie zauważymy, że rozwiązanie układu (jeśli istnieje) oraz jego pochodne są ograniczone przez rozwiązanie pewnego układu majoryzującego. Jednoznaczność rozwiązania dostaniemy na podstawie twierdzenia dla układu liniowego. Dowód istnienia będzie przebiegał metodą kolejnych przybliżeń. W pierwszym etapie utworzymy ciąg liniowych układów przedłużonych. Następnie pokażemy wspólną ograniczoność rozwiązań skonstruowanego wcześniej ciągu liniowych układów. Ta własność pozwoli nam pokazać jednostajną zbieżność ciągu kolejnych przybliżeń. W ostatnim kroku wykażemy jednakową ciągłość ciągu pochodnych $(p = L \overset{(s)}{u}, \overset{(s-1)}{u}, \overset{(s)}{u}_{,x})$ na zbiorze zwartym i stąd, korzystając z twierdzenia Arzeli-Ascoliego, otrzymamy niemal jednostajną zbieżność ciągu pochodnych.

Jak już wspomnieliśmy we wstępie, obszar określoności G zagadnienia Cauchy'ego nie jest z góry znany.

3.2 Struktura układu przedłużonego

W celu utworzenia układu przedłużonego należy zróżniczkować układ (3.3) względem zmiennej x . Załóżmy zatem w tym paragrafie, że $u \in C^2$.

Uwaga 3.1 Dla funkcji $z = f(\tau, \zeta)$, gdzie $\zeta = g(\tau, \eta)$ symbolem \sharp będziemy oznaczali pochodną

$$\frac{\partial^\sharp z}{\partial \tau} = \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial g}{\partial \tau}.$$

Różniczkując zatem układ (3.3) względem x dostajemy

$$\begin{aligned} & (L_{,x} + \sum_{i=1}^n L_{,u_i} u_{i,x}) u_{,t} + Lu_{,tx} + (D_{,x} + \sum_{i=1}^n D_{,u_i} u_{i,x}) Lu_{,x} + D \frac{\partial^\sharp(Lu_x)}{\partial x} = \\ & = (L_{,x} + \sum_{i=1}^n L_{,u_i} u_{i,x}) b + L(b_{,x} + \sum_{i=1}^n b_{,u_i} u_{i,x}). \end{aligned}$$

Z równania (3.1) mamy

$$u_{,t} = b - \Gamma D Lu_{,x},$$

natomiast z wyrażenia

$$\frac{\partial^\sharp(Lu_{,x})}{\partial t} = Lu_{,tx} + \left(L_{,t} + \sum_{i=1}^n L_{,u_i} (b - \Gamma D Lu_{,x})_i \right) u_{,x}.$$

wyznaczamy $Lu_{,tx}$. W ten sposób otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & (L_{,x} + \sum_{i=1}^n L_{,u_i} u_{i,x}) (b - \Gamma D Lu_{,x}) + \frac{\partial^\sharp(Lu_{,x})}{\partial t} - \left(L_{,t} + \sum_{i=1}^n L_{,u_i} (b - \Gamma D Lu_{,x})_i \right) u_{,x} + \\ & + (D_{,x} + \sum_{i=1}^n D_{,u_i} u_{i,x}) Lu_{,x} + D \frac{\partial^\sharp(Lu_{,x})}{\partial x} = (L_{,x} + \sum_{i=1}^n L_{,u_i} u_{i,x}) b + L(b_{,x} + \sum_{i=1}^n b_{,u_i} u_{i,x}), \end{aligned}$$

a po uproszczeniu

$$\begin{aligned} & -(L_{,x} + \sum_{i=1}^n L_{,u_i} u_{i,x}) \Gamma D Lu_{,x} + \frac{\partial^\sharp(Lu_{,x})}{\partial t} - \left(L_{,t} + \sum_{i=1}^n L_{,u_i} (b - \Gamma D Lu_{,x})_i \right) u_{,x} + \\ & + (D_{,x} + \sum_{i=1}^n D_{,u_i} u_{i,x}) Lu_{,x} + D \frac{\partial^\sharp(Lu_{,x})}{\partial x} = L(b_{,x} + \sum_{i=1}^n b_{,u_i} u_{i,x}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Zauważmy teraz, że skoro $L\Gamma = I$, więc

$$-(L_{,x} + \sum_{i=1}^n L_{,u_i} u_{i,x}) \Gamma = L(\Gamma_{,x} + \sum_{i=1}^n \Gamma_{,u_i} u_{i,x}),$$

oraz

$$\begin{aligned} -(L_{,t} + \sum_{i=1}^n L_{,u_i} u_{i,t}) \Gamma & = L(\Gamma_{,t} + \sum_{i=1}^n \Gamma_{,u_i} u_{i,t}) \\ & = L(\Gamma_{,t} + \sum_{i=1}^n \Gamma_{,u_i} (b - \Gamma D Lu_{,x})_i). \end{aligned}$$

Stąd układ (3.5) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} & L(\Gamma_{,x} + \sum_{i=1}^n \Gamma_{,u_i} u_{i,x}) D Lu_{,x} + \frac{\partial^\sharp(Lu_{,x})}{\partial t} + L(\Gamma_{,t} + \sum_{i=1}^n \Gamma_{,u_i} (b - \Gamma D Lu_{,x})_i) Lu_{,x} + \\ & + (D_{,x} + \sum_{i=1}^n D_{,u_i} u_{i,x}) Lu_{,x} + D \frac{\partial^\sharp(Lu_{,x})}{\partial x} = L(b_{,x} + \sum_{i=1}^n b_{,u_i} u_{i,x}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Otrzymany układ nie jest jednak zapisany w inwariantach Riemanna. Aby uzyskać taką postać wprowadzimy funkcję

Definicja 3.1

$$p = L u_x. \quad (3.7)$$

W ten sposób dostajemy

$$\begin{aligned} & L\left(\Gamma_{,x} + \sum_{i=1}^n \Gamma_{,u_i} (\Gamma p)_i\right) Dp + p_{,t} + L\left(\Gamma_{,t} + \sum_{i=1}^n \Gamma_{,u_i} (b - \Gamma Dp)_i\right) p + \\ & + \left(D_{,x} + \sum_{i=1}^n D_{,u_i} (\Gamma p)_i\right) p + Dp_{,x} = L\left(b_{,x} + \sum_{i=1}^n b_{,u_i} (\Gamma p)_i\right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ostatecznie układ przedłużony składa się z $2n$ równań postaci

$$u_{,t} = b - \Gamma Dp, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} p_{,t} + Dp_{,x} &= Lb_{,x} - L(\Gamma_{,t} + \Gamma_{,x} D)p + \\ &+ L \sum_{i=1}^n b_{,u_i} (\Gamma p)_i - L \sum_{i=1}^n \Gamma_{,u_i} b_i p - D_{,x} p \\ &- \sum_{i=1}^n D_{,u_i} (\Gamma p)_i p - L\left(\sum_{i=1}^n \Gamma_{,u_i} ((\Gamma p)_i D + (\Gamma Dp)_i)\right) p. \end{aligned} \quad (3.10)$$

lub ogólniej

$$u_{,t} = b - \Gamma Dp, \quad (3.11)$$

$$p_{,t} + Dp_{,x} = \Lambda + \Psi p + \Phi(p, p), \quad (3.12)$$

gdzie Λ , Ψ , Φ zależą od t , x , u oraz Φ jest formą dwuliniową o wartościach wektorowych.

3.3 Ograniczoność rozwiązania i jego pochodnych

Wykażemy istnienie czasu $t_0 \leq T$ takiego, że jeśli istnieje rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego (3.1) - (3.2) to jest ono wraz z pochodnymi ograniczone dla $t \in [0, t_0]$.

Definiujemy funkcje:

$$H_0(U) = \sup_{G_0(U)} |b|, \quad (3.13)$$

$$H_1(U) = \sup_{G_0(U)} |\Gamma D|,$$

$$H_2(U) = \sup_{G_0(U)} |\Lambda|,$$

$$H_3(U) = \sup_{G_0(U)} |\Psi|,$$

$$H_4(U) = \sup_{G_0(U)} |\Phi|.$$

Następujący układ dwóch równań różniczkowych zwyczajnych będziemy nazywać układem majoryzującym:

$$\frac{dU}{dt} = H_0(U) + H_1(U) P \quad (3.14)$$

$$\frac{dP}{dt} = H_2(U) + H_3(U) P + H_4(U) P^2. \quad (3.15)$$

Dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ określamy warunki początkowe:

$$U(0) = \|u^0(x)\|_0 + \varepsilon, \quad (3.16)$$

$$P(0) = \|L(0, x, u^0(x)) \frac{du^0(x)}{dx}\|_0 + \varepsilon. \quad (3.17)$$

Funkcje prawych stron układu (3.14) - (3.15) są ciągłe ze względu na U i P , a zatem i ograniczone dla $t \in [0, T]$. Nie spełniają natomiast warunku Lipschitza ze względu na zmienną U , ponieważ nie spełniają go (względem u) prawe strony równań (3.10). Na podstawie twierdzenia Peano o istnieniu rozwiązania układu równań różniczkowych zwyczajnych istnieje (być może niejednoznaczne) rozwiązanie zagadnienia (3.14) - (3.17) i jest ono ograniczone dla $t \in [0, t_0]$, gdzie $t_0 \leq T_0$.

Lemat 3.1 *Jeśli istnieje rozwiązanie zagadnienia (3.1) - (3.2), to jest ono ograniczone dla $t \in [0, t_0]$ przez rozwiązanie układu majoryzującego (3.14) - (3.17):*

$$\|u(t, x)\|_0 < U(t), \quad \|p(t, x)\|_0 < P(t). \quad (3.18)$$

Dowód. Z nierówności $\|u(0, x)\|_0 < U(0)$ i $\|p(0, x)\|_0 < P(0)$ oraz z ciągłości funkcji u , U , p , P dostajemy nierówność (3.18) dla wszystkich t dostatecznie bliskich 0. Jeśli zatem nierówność zachodzi w całym przedziale $[0, t_0]$, to otrzymujemy natychmiast tezę. W przypadku, gdy tak nie jest, rozszerzamy przedział czasu do największego przedziału dla którego zachodzi (3.18). Przedział ten jest postaci $[0, t^*)$, przy czym dla $t = t^*$:

$$\|u(t^*, x)\|_0 = U(t^*), \quad \|p(t^*, x)\|_0 = P(t^*). \quad (3.19)$$

Zapisujemy równania układu (3.12) na charakterystykach:

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{P}_t p) = \mathcal{P}_t (\Lambda + \Psi p + \Phi(p, p)).$$

Skoro dla $t \in [0, t^*)$ zachodzi (3.18), więc

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| < \sup_{G_0(U)} |b| + P \cdot \sup_{G_0(U)} |\Gamma D| = H_0(U) + P H_1(U) = \frac{dU}{dt} \quad (3.20)$$

oraz

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt}(\mathcal{P}_t p) \right| &< \sup_{G_0(U)} |\Lambda| + P \sup_{G_0(U)} |\Psi| + P^2 \sup_{G_0(U)} |\Phi| \\ &= H_2(U) + P H_3(U) + P^2 H_4(U) = \frac{dP}{dt}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Przy pomocy (3.21) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\mathcal{P}_t p| &= \frac{\sum_{k=1}^n (\mathcal{P}_t p)_k \frac{d}{dt} (\mathcal{P}_t p)_k}{|\mathcal{P}_t p|} \leq \frac{\left| \sum_{k=1}^n (\mathcal{P}_t p)_k \frac{d}{dt} (\mathcal{P}_t p)_k \right|}{|\mathcal{P}_t p|} \\ &\leq \frac{|\mathcal{P}_t p| \left| \frac{d}{dt} (\mathcal{P}_t p) \right|}{|\mathcal{P}_t p|} = \left| \frac{d(\mathcal{P}_t p)}{dt} \right| < \frac{dP}{dt}, \end{aligned}$$

i analogicznie

$$\frac{\partial}{\partial t} |u(t, x)| \leq \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| < \frac{dU}{dt}.$$

Rozważmy różnicę:

$$P(t^*) - |p(t^*, \bar{x})| = P(0) - |\mathcal{P}_0 p| + \int_0^{t^*} \left(\frac{dP}{dt} - \frac{\partial}{\partial t} |\mathcal{P}_t p| \right) dt > P(0) - |\mathcal{P}_0 p|.$$

Ostatnia nierówność wynika stąd, że całka jest dodatnia. Ostatecznie

$$P(t^*) - \|p(t^*, \bar{x})\|_0 \geq P(0) - \sup_{\bar{x} \in \mathbb{R}} |\mathcal{P}_0 p| = P(0) - \|p(0, \bar{x})\|_0 > 0,$$

co przeczy (3.19). Podobnie jest dla funkcji U i u .

□

Dla $t \in [0, t_0]$ funkcje $U(t)$ i $P(t)$ są ograniczone, a zatem na podstawie Lematu 3.1, również funkcje u i p są ograniczone.

3.4 Jednoznaczność rozwiązania

Lemat 3.2 *Jeśli istnieje rozwiązanie problemu początkowego (3.1) - (3.2), to jest ono jednoznaczne.*

Dowód. Załóżmy, że w obszarze określoności G zagadnienia (3.1) - (3.2) istnieją dwa rozwiązania: u i \bar{u} , przy czym

$$u(0, x) = \bar{u}(0, x) = u^0(x).$$

Oznaczmy dla uproszczenia

$$\bar{L} = L(t, x, \bar{u}), \quad \bar{D} = D(t, x, \bar{u}), \quad \bar{b} = b(t, x, \bar{u}),$$

oraz wprowadzimy funkcję

$$v(t, x) = u(t, x) - \bar{u}(t, x). \quad (3.22)$$

Oczywiście

$$v(0, x) = [0, \dots, 0]^T. \quad (3.23)$$

Funkcja v spełnia w G układ równań:

$$\bar{L} v_{,t} + \bar{D} \bar{L} v_{,x} = (F - \bar{F}) - (L - \bar{L}) u_{,t} - (D L - \bar{D} \bar{L}) u_{,x}. \quad (3.24)$$

Ponieważ, z założenia, funkcje $L, D, b \in C^1(G)$, więc korzystając z lematu Hadamarda¹ przekształcamy prawą stronę układu (3.24) do postaci:

$$\bar{L} v_{,t} + \bar{D} \bar{L} v_{,x} = M v, \quad (3.25)$$

¹Lemat Hadamarda [28]. Niech funkcja $F(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m)$ ma w pewnym obszarze G wypukłym względem x_1, \dots, x_n przestrzeni $(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m)$ ciągle pochodne względem x_1, \dots, x_n do pewnego rzędu $p > 0$ włącznie. Wtedy istnieje n funkcji $\varphi_i(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_m)$, $i = 1, 2, \dots, n$, mających ciągle pochodne względem $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ do rzędu $p - 1$ włącznie takich, że

$$F(y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_m) - F(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m) = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \cdot \varphi_i(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_m).$$

gdzie

$$\begin{aligned}
Mv &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n v_i \int_0^1 (Lb)_{1, u_i} |_{(t,x,\bar{u}+\lambda v)} d\lambda \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n v_i \int_0^1 (Lb)_{n, u_i} |_{(t,x,\bar{u}+\lambda v)} d\lambda \end{bmatrix} \\
- \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n v_i \int_0^1 L_{11, u_i} |_{(t,x,\bar{u}+\lambda v)} d\lambda & \dots & \sum_{i=1}^n v_i \int_0^1 L_{1n, u_i} |_{(t,x,\bar{u}+\lambda v)} d\lambda \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n v_i \int_0^1 L_{n1, u_i} |_{(t,x,\bar{u}+\lambda v)} d\lambda & \dots & \sum_{i=1}^n v_i \int_0^1 L_{nn, u_i} |_{(t,x,\bar{u}+\lambda v)} d\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,t} \\ \vdots \\ u_{n,t} \end{bmatrix} \\
- \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n v_i \int_0^1 (L_{11} \xi_1)_{,u_i} |_{(t,x,\bar{u}+\lambda v)} d\lambda & \dots & \sum_{i=1}^n v_i \int_0^1 (L_{1n} \xi_1)_{,u_i} |_{(t,x,\bar{u}+\lambda v)} d\lambda \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n v_i \int_0^1 (L_{n1} \xi_n)_{,u_i} |_{(t,x,\bar{u}+\lambda v)} d\lambda & \dots & \sum_{i=1}^n v_i \int_0^1 (L_{nn} \xi_n)_{,u_i} |_{(t,x,\bar{u}+\lambda v)} d\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,x} \\ \vdots \\ u_{n,x} \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \int_0^1 (Lb)_{1, u_1} d\lambda & \dots & \sum_{i=1}^n \int_0^1 (Lb)_{1, u_n} d\lambda \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n \int_0^1 (Lb)_{n, u_1} d\lambda & \dots & \sum_{i=1}^n \int_0^1 (Lb)_{n, u_n} d\lambda \end{bmatrix}_{(t,x,\bar{u}+\lambda v)} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\
- \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \int_0^1 L_{1i, u_1} |_{(t,x,\bar{u}+\lambda v)} \cdot u_{i,t} d\lambda & \dots & \sum_{i=1}^n \int_0^1 L_{1i, u_n} |_{(t,x,\bar{u}+\lambda v)} \cdot u_{i,t} d\lambda \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n \int_0^1 L_{ni, u_1} |_{(t,x,\bar{u}+\lambda v)} \cdot u_{i,t} d\lambda & \dots & \sum_{i=1}^n \int_0^1 L_{ni, u_n} |_{(t,x,\bar{u}+\lambda v)} \cdot u_{i,t} d\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\
- \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \int_0^1 (L_{1i} \xi_1)_{,u_1} |_{(t,x,\bar{u}+\lambda v)} \cdot u_{i,x} d\lambda & \dots & \sum_{i=1}^n \int_0^1 (L_{1i} \xi_1)_{,u_n} |_{(t,x,\bar{u}+\lambda v)} \cdot u_{i,x} d\lambda \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n \int_0^1 (L_{ni} \xi_n)_{,u_1} |_{(t,x,\bar{u}+\lambda v)} \cdot u_{i,x} d\lambda & \dots & \sum_{i=1}^n \int_0^1 (L_{ni} \xi_n)_{,u_n} |_{(t,x,\bar{u}+\lambda v)} \cdot u_{i,x} d\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Zauważmy, że równanie (3.25) jest liniowe ze względu na funkcję v .

Jeśli wprowadzimy

$$\bar{v} = \bar{L} v,$$

dla którego mamy

$$\bar{v}_{,t} = (\bar{L}_{,t} + \bar{L}_{,\bar{u}} \bar{u}_{,t}) v + \bar{L} v_{,t}, \quad \bar{v}_{,x} = (\bar{L}_{,x} + \bar{L}_{,\bar{u}} \bar{u}_{,x}) v + \bar{L} v_{,x},$$

to otrzymamy następujący układ:

$$\bar{v}_{,t} + \bar{D} \bar{v}_{,x} = H \bar{v}, \quad (3.26)$$

gdzie macierz

$$H = (M + \bar{L}_{,t} + \bar{L}_{,\bar{u}} \bar{u}_{,t} + \bar{D} \bar{L}_{,x} + \bar{D} \bar{L}_{,\bar{u}} \bar{u}_{,x}) \bar{\Gamma}.$$

Ponieważ współczynniki układu (3.1) są ograniczone na podstawie założeń oraz pochodne $\bar{u}_{,x}$ i $\bar{u}_{,t}$ są ograniczone na mocy Lematu 3.1, dlatego również macierz H jest ograniczona w obszarze określoności G . Na mocy Twierdzenia 2.2 dla układu liniowego, rozwiązanie zagadnienia (3.1) - (3.2) jest jednoznaczne (o ile w ogóle istnieje) i $u = \bar{u}$.

3.5 Istnienie rozwiązania

Lemat 3.3 *Rozwiązanie zagadnienia (3.1) - (3.2) istnieje i jest funkcją klasy $C^1([0, t_2] \times \mathbb{R})$ dla pewnego $t_2 \leq T$.*

Dla dowodu istnienia rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego (3.1) - (3.2) zastosujemy metodę kolejnych przybliżeń.

Definiujemy zerowy element ciągu:

$${}^{(0)}u(t, x) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.27)$$

Dla uproszczenia dalszych zapisów będziemy uważali, że indeks nad nazwą funkcji oznacza zależność od odpowiedniego przybliżenia funkcji u , tzn.:

$${}^{(s)}L = L(t, x, {}^{(s)}u), \quad {}^{(s)}D = D(t, x, {}^{(s)}u), \quad {}^{(s)}b = b(t, x, {}^{(s)}u).$$

Założmy, że zostało już skonstruowane przybliżenie ${}^{(s)}u(t, x) \in C^1$. Określimy ${}^{(s+1)}u(t, x)$ jako rozwiązanie następującego liniowego zagadnienia Cauchy'ego:

$${}^{(s)}L u_{,t} + {}^{(s)}D L u_{,x} = {}^{(s)}L b \quad (3.28)$$

$${}^{(s+1)}u(0, x) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.29)$$

Z Twierdzenia 2.2 o istnieniu rozwiązania liniowego układu równań wynika, że w obszarze określoności ${}^{(s+1)}G$ zagadnienia Cauchy'ego (3.28) - (3.29) istnieje rozwiązanie ${}^{(s+1)}u(t, x) \in C^1({}^{(s+1)}G)$.

3.5.1 Ciąg liniowych układów przedłużonych

Utworzymy ciąg liniowych układów przedłużonych.

Oznaczamy

$${}^{(s)}p = L {}^{(s-1)}u_{,x}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (3.30)$$

Dla $s = 0$ przyjmujemy

$${}^{(0)}p = L(0, x, u^0(x)) \frac{du^0(x)}{dx}. \quad (3.31)$$

Różniczkując względem x liniowe równanie (3.28) i wykorzystując oznaczenie (3.30) otrzymujemy liniowy układ przedłużony. Dokonujemy zmiany w prawej stronie równania (3.32) przyjmując ${}^{(s)}p$ zamiast ${}^{(s+1)}p$.

$${}^{(s+1)}u_{,t} = {}^{(s)}b - \Gamma D {}^{(s)}p, \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} {}^{(s+1)}p_{,t} + D {}^{(s+1)}p_{,x} &= {}^{(s)}L b_{,x} - L \left(\Gamma_{,t} + \Gamma_{,x} D \right) {}^{(s+1)}p + \\ &+ L \sum_{i=1}^n b_{,u_i} \left(\Gamma_{,t} p \right)_i - L \sum_{i=1}^n \Gamma_{,u_i} b_i p - D_{,x} p \\ &- \sum_{i=1}^n D_{,u_i} \left(\Gamma_{,t} p \right)_i p - L \left(\sum_{i=1}^n \Gamma_{,u_i} \left(\left(\Gamma_{,t} p \right)_i D + \left(\Gamma_{,x} D p \right)_i \right) \right) {}^{(s+1)}p. \end{aligned} \quad (3.33)$$

W ogólnym zapisie

$$u_{,t}^{(s+1)} = b^{(s)} - \Gamma D p^{(s)} \quad (3.34)$$

$$p_{,t}^{(s+1)} + D p_{,x}^{(s+1)} = \Lambda^{(s)} + \Psi^1 p^{(s,s-1)} + \Psi^2 p^{(s,s-1)(s+1)} + \Phi^{(s)}(p, p^{(s+1)}) \quad (3.35)$$

gdzie $\Lambda^{(s)}$, Ψ^1 , Ψ^2 , $\Phi^{(s)}$ zależą od $t, x, u, u^{(s-1)}$ oraz Φ jest formą dwuliniową o wartościach wektorowych.

3.5.2 Wspólna ograniczoność funkcji ciągu $(u, p)^{(s)}$

Podobnie jak w paragrafie 3.3 definiujemy funkcje

$$\tilde{H}_0(\tilde{U}) = \sup_{\substack{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \\ |u| \leq \tilde{U}, |v| \leq \tilde{U}}} |b| \quad (3.36)$$

$$\tilde{H}_1(\tilde{U}) = \sup_{\substack{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \\ |u| \leq \tilde{U}, |v| \leq \tilde{U}}} |\Lambda D|$$

$$\tilde{H}_2(\tilde{U}) = \sup_{\substack{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \\ |u| \leq \tilde{U}, |v| \leq \tilde{U}}} |\Gamma|$$

$$\tilde{H}_3(\tilde{U}) = \sup_{\substack{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \\ |u| \leq \tilde{U}, |v| \leq \tilde{U}}} |\Psi^1| + \sup_{\tilde{G}_0(\tilde{U})} |\Psi^2|$$

$$\tilde{H}_4(\tilde{U}) = \sup_{\substack{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \\ |u| \leq \tilde{U}, |v| \leq \tilde{U}}} |\Phi|.$$

oraz układ majoryzujący

$$\frac{d\tilde{U}}{dt} = \tilde{H}_0(\tilde{U}) + \tilde{P} \tilde{H}_1(\tilde{U}) \quad (3.37)$$

$$\frac{d\tilde{P}}{dt} = \tilde{H}_2(\tilde{U}) + \tilde{P} \tilde{H}_3(\tilde{U}) + \tilde{P}^2 \tilde{H}_4(\tilde{U}), \quad (3.38)$$

z warunkami początkowymi

$$\tilde{U}(0) = U(0), \quad \tilde{P}(0) = P(0). \quad (3.39)$$

Prawe strony układu (3.32) - (3.33) w każdym $s+1$ -szym kroku spełniają warunek Lipschitza względem $u^{(s+1)}$ i $p^{(s+1)}$. Funkcje prawych stron układu (3.37) - (3.38) są ciągłe ze względu na \tilde{U} i \tilde{P} a zatem ograniczone dla $t \in [0, T]$. Na podstawie twierdzenia Picarda o istnieniu rozwiązania układu równań różniczkowych zwyczajnych istnieje taki czas $t_1 \leq T$, że jednoznaczne rozwiązanie zagadnienia (3.37) - (3.39) istnieje i jest ograniczone dla $t \in [0, t_1]$.

Lemat 3.4 *Elementy ciągu kolejnych przybliżeń $\{u^{(s)}\}$ oraz ciągu $\{p^{(s)}\}$ są wspólnie ograniczone dla $t \in [0, t_1]$ przez rozwiązanie układu majoryzującego (3.37) - (3.39):*

$$\|u^{(s)}(t, x)\|_0 < \tilde{U}(t), \quad \|p^{(s)}(t, x)\|_0 < \tilde{P}(t), \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (3.40)$$

Dowód. Indukcja ze względu na s .

Sprawdźmy, czy nierówność zachodzi dla $k = 0$ i $k = 1$. Z definicji warunków początkowych mamy

$$\| \binom{(0)}{u} \|_0 < \tilde{U}(0), \quad \| \binom{(0)}{p} \|_0 < \tilde{P}(0).$$

Ponieważ $\tilde{U}(t)$ i $\tilde{P}(t)$ są funkcjami dodatnimi i rosnącymi dlatego

$$\| \binom{(0)}{u}(t, x) \|_0 < \tilde{U}(t), \quad \| \binom{(0)}{p}(t, x) \|_0 < \tilde{P}(t), \quad \text{dla } t \in [0, t_1].$$

Stąd również

$$\| \binom{(1)}{p}(t, x) \|_0 = \| \binom{(0)}{p}(t, x) \|_0 < \tilde{P}(t).$$

Aby dostać nierówność $\| \binom{(1)}{u} \| < \tilde{U}(t)$ należy przeprowadzić rozumowanie tak jak w dowodzie Lematu 3.1 dla funkcji u .

Założmy, że nierówności poniżej zachodzą dla $k = s - 1$ i $k = s$

$$\| \binom{(k)}{u} \|_0 < \tilde{U}(t), \quad \| \binom{(k)}{p} \|_0 < \tilde{P}(t), \quad \text{dla } t \in [0, t_1].$$

Dla $k = s + 1$ dowodzimy dokładnie tak samo jak Lemat 3.1.

□

3.5.3 Jednostajna zbieżność ciągu $\{ \binom{(s)}{u} \}$

Udowodnimy

Lemat 3.5 Ciąg $\{ \binom{(s)}{u} \}$ jest zbieżny jednostajnie w przestrzeni Banacha $C([0, t_1] \times \mathbb{R})$.

Wprowadzamy funkcje wektorowe

$$\binom{(s+1)}{r}(t, x) = L \left(\binom{(s+1)}{u} - \binom{(s)}{u} \right), \quad \binom{(s+1)}{r} = \left[r_1^{(s+1)}, \dots, r_n^{(s+1)} \right]^T.$$

Wobec określenia warunku początkowego dla funkcji ciągu $\{ \binom{(s)}{u} \}$, mamy

$$\binom{(s+1)}{r}(0, x) = [0, \dots, 0]^T, \quad s = 0, 1, \dots$$

Pochodne funkcji $\binom{(s+1)}{r}_k$, ($k = 1, \dots, n$, $s = 0, 1, \dots$) dane są wzorami

$$\begin{aligned} \binom{(s+1)}{r}_{k,t} &= \left(L_{k,t}^{(s)} + \sum_{i=1}^n L_{k,u_i}^{(s)} u_{i,t} \right) \left(\binom{(s+1)}{u} - \binom{(s)}{u} \right) + L_k^{(s)} \left(\binom{(s+1)}{u}_t - \binom{(s)}{u}_t \right), \\ \binom{(s+1)}{r}_{k,x} &= \left(L_{k,x}^{(s)} + \sum_{i=1}^n L_{k,u_i}^{(s)} u_{i,x} \right) \left(\binom{(s+1)}{u} - \binom{(s)}{u} \right) + L_k^{(s)} \left(\binom{(s+1)}{u}_x - \binom{(s)}{u}_x \right). \end{aligned}$$

Z (3.28) mamy

$$\begin{aligned} \binom{(s+1)}{r}_{k,t} + \xi_k \binom{(s)}{r}_{k,x} &= \binom{(s)}{L} \binom{(s)}{b}_k - \binom{(s-1)}{L} \binom{(s-1)}{b}_k \\ &+ \left(L_{k,t}^{(s)} + \sum_{i=1}^n L_{k,u_i}^{(s)} u_{i,t} + \xi_k L_{k,x}^{(s)} + \xi_k \sum_{i=1}^n L_{k,u_i}^{(s)} u_{i,x} \right) \Gamma \binom{(s)}{r}^{(s+1)} \\ &- \left(L_k^{(s)} - L_k^{(s-1)} \right) \binom{(s)}{u}_t \\ &- \left(\xi_k L_k^{(s)} - \xi_k L_k^{(s-1)} \right) \binom{(s)}{u}_x, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Niech \tilde{M} oznacza macierz

$$\tilde{M} = \left(L_{k,t}^{(s)} + \sum_{i=1}^n L_{k,u_i}^{(s)} u_{i,t}^{(s)} + \xi_k L_{k,x}^{(s)} + \xi_k \sum_{i=1}^n L_{k,u_i}^{(s)} u_{i,x}^{(s)} \right) \Gamma^{(s)}.$$

Z lematu Hadamarda wynika, że istnieją ciągłe funkcje $M_{ki} = M_{ki}(t, x, u, u', u'', \dots, u^{(s)}, u^{(s-1)}, \dots, u', u, u, \dots, u^{(s)}, u^{(s-1)}, \dots)$, $k, i = 1, \dots, n$ takie, że

$$\begin{pmatrix} (s) \\ L \ b \end{pmatrix}_k - \begin{pmatrix} (s-1) \\ L \ b \end{pmatrix}_k - \begin{pmatrix} (s) \\ L_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (s-1) \\ L_k \end{pmatrix} u_{,t}^{(s)} - \begin{pmatrix} (s) \\ \xi_k L_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (s-1) \\ \xi_k L_k \end{pmatrix} u_{,x}^{(s)} = \sum_{i=1}^n M_{ki} \cdot r_i^{(s)}.$$

Ponieważ wyrazy ciągów $\{u^{(s)}\}$ i $\{u_{,x}^{(s)}\}$ są wspólnie ograniczone oraz z założenia (i) ze strony 41, istnieje taka stała C_M , że macierze M i \tilde{M} są ograniczone dla $(t, x) \in [0, t_1] \times \mathbb{R}$:

$$|M| \leq C_M, \quad |\tilde{M}| \leq C_M.$$

Przedstawiamy (3.41) w postaci macierzowej:

$$r_{,t}^{(s+1)} + D r_{,x}^{(s+1)} = M r^{(s)} + \tilde{M} r^{(s+1)}, \quad (3.42)$$

a następnie zapisujemy równania tego układu na charakterystykach. W ten sposób dostajemy układ n równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{P}_t r^{(s+1)}) = \mathcal{P}_t (M r^{(s)}) + \mathcal{P}_t (\tilde{M} r^{(s+1)}).$$

Aby uzyskać $r^{(s+1)}$ w punkcie (\bar{t}, \bar{x}) całkujemy względem zmiennej t w granicach od 0 do \bar{t} :

$$r^{(s+1)}(\bar{t}, \bar{x}) = \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t (M r^{(s)}) dt + \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t (\tilde{M} r^{(s+1)}) dt.$$

Ponieważ dla dowolnego $k = 1, \dots, n$

$$\| r^{(i)}(t, x) \|_0 = \sup_{\bar{x} \in \mathbb{R}} | r^{(i)}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) |,$$

stąd zachodzi nierówność

$$\| r^{(s+1)}(\bar{t}, \bar{x}) \|_0 \leq C_M \int_0^{\bar{t}} \| r^{(s)}(t, \bar{x}) \|_0 dt + C_M \int_0^{\bar{t}} \| r^{(s+1)}(t, \bar{x}) \|_0 dt. \quad (3.43)$$

Niech

$$Q^{(i)}(t) = \max_{\tau \in [0, t]} \| r^{(i)}(\tau, x) \|_0.$$

Z (3.43) przy pomocy funkcji $Q^{(i)}$ otrzymujemy:

$$Q^{(s+1)}(\bar{t}) \leq C_M \int_0^{\bar{t}} Q^{(s)}(t) dt + C_M \int_0^{\bar{t}} Q^{(s+1)}(t) dt \quad (3.44)$$

Dla każdego $t^* \geq \bar{t}$ mamy:

$$Q^{(s+1)}(t) \leq C_M \int_0^{t^*} Q^{(s)}(t) dt + C_M \int_0^{\bar{t}} Q^{(s+1)}(t) dt, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Do powyższej nierówności stosujemy lemat Gronwalla:

$${}^{(s+1)}Q(\bar{t}) \leq C_M e^{C_M \bar{t}} \int_0^{\bar{t}} {}^{(s)}Q(t) dt \leq C_M e^{C_M t_1} \int_0^{\bar{t}} {}^{(s)}Q(t) dt = C \int_0^{\bar{t}} {}^{(s)}Q(t) dt,$$

gdzie $C = C_M e^{C_M t_1}$. Ponieważ otrzymana nierówność zachodzi dla dowolnego $t^* \geq \bar{t}$, więc również dla $t^* = \bar{t}$, czyli:

$${}^{(s+1)}Q(\bar{t}) \leq C \int_0^{\bar{t}} {}^{(s)}Q(t) dt \quad (3.45)$$

Zauważmy, że skoro wszystkie przybliżenia są ograniczone dla $(t, x) \in [0, t_1] \times \mathbb{R}$, dlatego funkcja ${}^{(1)}Q$ jest stała:

$${}^{(1)}Q(t) = \max_{\tau \in [0, t]} \| {}^{(1)}r(\tau, x) \|_0 = \max_{\tau \in [0, t]} \| L^{(0)}(u^{(1)} - u^{(0)}) \|_0 =: \tilde{C}. \quad (3.46)$$

Stosując teraz wielokrotnie wzór (3.45) szacujemy z góry ${}^{(s+1)}Q(\bar{t})$:

$${}^{(s+1)}Q(\bar{t}) \leq C^s \int_0^{\bar{t}} d\tau \int_0^\tau d\tau_1 \dots \int_0^{\tau_{s-1}} {}^{(1)}Q(\tau_s) d\tau_{s-1}$$

Uwzględniając (3.46), ostatecznie dostajemy

$${}^{(s+1)}Q(\bar{t}) \leq \frac{(C\bar{t})^s}{s!} \tilde{C}. \quad (3.47)$$

Pokażemy teraz, że ciąg $\{u^{(s)}\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni Banacha $C([0, t_1] \times \mathbb{R})$ z normą supremum.

Niech $k > m$. Korzystając z (3.47) i z ograniczoności funkcji $\Gamma^{(s)}$ dla dowolnego $s = 0, 1, \dots$ (przez stałą C_L) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \| u^{(k)}(t, x) - u^{(m)}(t, x) \|_0 &\leq \| u^{(k)} - u^{(k-1)} \|_0 + \dots + \| u^{(m+1)} - u^{(m)} \|_0 \\ &= \| \Gamma^{(k-1)} r^{(k)} \|_0 + \dots + \| \Gamma^{(m)} r^{(m+1)} \|_0 \\ &\leq C_L \tilde{C} \left(\frac{(Ct)^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + \frac{(Ct)^m}{m!} \right) \\ &\leq C_L \tilde{C} \frac{(Ct)^m}{m!} \left(1 + \frac{Ct}{m+1} + \frac{(Ct)^2}{(m+1)(m+2)} + \dots + \frac{(Ct)^{k-1-m}}{(m+1) \dots (k-1)} \right) \\ &\leq C_L \tilde{C} \frac{(Ct)^m}{m!} \left(1 + \frac{Ct}{1!} + \frac{(Ct)^2}{2!} + \dots + \frac{(Ct)^{k-1-m}}{(k-1-m)!} \right) \\ &\leq C_L \tilde{C} \frac{(Ct)^m}{m!} e^{Ct}. \end{aligned}$$

Na podstawie powyższej nierówności wnioskujemy, że ciąg $\{u^{(s)}\}$ spełnia warunek Cauchy'ego w przestrzeni Banacha $C([0, t_1] \times \mathbb{R})$, czyli jest w tej przestrzeni zbieżny jednostajnie:

$$\max_{t \in [0, t_1]} \| u^{(k)} - u^{(m)} \|_0 \leq C_L \tilde{C} \frac{(Ct_1)^m}{m!} e^{Ct_1} \rightarrow 0, \quad \text{gdy } m \rightarrow +\infty. \quad (3.48)$$

3.5.4 Niemal jednostajna zbieżność ciągu $\{\overset{(s)}{p}\}$

W tym paragrafie pokażemy, że

Lemat 3.6 Ciąg $\{\overset{(s)}{p}\}$ jest zbieżny niemal jednostajnie dla $t \in [0, t_1]$.

Dowód. Zaczniemy od wykazania jednakowej ciągłości funkcji ciągu $\{\overset{(s)}{p}\}$ względem zmiennej x dla każdego ustalonego $t \in [0, t_1]$.

Wychodząc z równań układu (3.35), otrzymujemy po scałkowaniu wzdłuż charakterystyk

$$\begin{aligned} \overset{(s+1)}{p}(\bar{t}, \bar{x}) &= \mathcal{P}_0 \overset{(s+1)}{p} + \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \overset{(s)}{\Lambda} dt \\ &+ \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t(\overset{(s)}{\Psi^1} \overset{(s)}{p}) dt + \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t(\overset{(s)}{\Psi^2} \overset{(s+1)}{p}) dt + \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \Phi(\overset{(s)}{p}, \overset{(s+1)}{p}) dt \end{aligned} \quad (3.49)$$

Pokażemy, że istnieje funkcja $\tilde{M}(\delta)$, $\tilde{M}(\delta) \rightarrow 0$ gdy $\delta \rightarrow 0$ taka, że dla $\bar{t} \in [0, t_1]$ i dla wszystkich s zachodzi:

$$\left| \overset{(s+1)}{p}(t, \bar{x}) - \overset{(s+1)}{p}(t, \bar{\bar{x}}) \right| \leq \tilde{M}(\delta) \quad \text{dla} \quad |\bar{x} - \bar{\bar{x}}| \leq \delta. \quad (3.50)$$

Dla k -tej składowej wektora po prawej stronie równania (3.49) zauważmy, że

- Funkcje $\mathcal{P}_0 \overset{(s+1)}{p}$, $\mathcal{P}_t \overset{(s)}{\Lambda}$ są funkcjami ciągłymi względem zmiennej \bar{x} , a więc są jednostajnie ciągłe względem x na dowolnym zbiorze zwartym oraz istnieją takie funkcje $N_0(\delta)$ i $N_\Lambda(\delta)$: $N_0(\delta) \rightarrow 0$, $N_\Lambda(\delta) \rightarrow 0$ gdy $\delta \rightarrow 0$, że dla $\bar{x}, \bar{\bar{x}}$ takich, że $|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| \leq \delta$ zachodzi:

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{P}_0 \overset{(s+1)}{p} - \bar{\mathcal{P}}_0 \overset{(s+1)}{p} \right| &\leq N_0(\delta), \\ \left| \mathcal{P}_t \overset{(s)}{\Gamma} - \bar{\mathcal{P}}_t \overset{(s)}{\Gamma} \right| &\leq N_\Lambda(\delta). \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^n \overset{(s)}{\Psi}_{ki}^1 \overset{(s)}{p}_i(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \sum_{i=1}^n \overset{(s)}{\Psi}_{ki}^1 \overset{(s)}{p}_i(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \overset{(s)}{\Psi}_{ki}^1(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s)}{\Psi}_{ki}^1(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \left| \overset{(s)}{p}_i(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) \right| + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left| \overset{(s)}{\Psi}_{ki}^1(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \left| \overset{(s)}{p}_i(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s)}{p}_i(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right|. \end{aligned}$$

Ponieważ funkcje macierzy $\overset{(s)}{\Psi}^1$ są jednostajnie ciągłe względem \bar{x} na dowolnym zbiorze zwartym, zatem istnieje funkcja $N_{\Psi^1}(\delta)$, $N_{\Psi^1}(\delta) \rightarrow 0$ gdy $\delta \rightarrow 0$ oraz

$$\left| \overset{(s)}{\Psi}_{ki}^1(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s)}{\Psi}_{ki}^1(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \leq N_{\Psi^1}(\delta) \quad \text{dla} \quad |\bar{x} - \bar{\bar{x}}| \leq \delta, \quad k, i = 1, \dots, n.$$

Dodatkowo, korzystając z ograniczoności funkcji $\overset{(s)}{p}$ oraz $\overset{(s)}{\Psi}^1$ dla ustalonego $t \in [0, t_1]$ i x należącego do dowolnego zbioru zwartego, otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^n \overset{(s)}{\Psi}_{ki}^1 \overset{(s)}{p}_i(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \sum_{i=1}^n \overset{(s)}{\Psi}_{ki}^1 \overset{(s)}{p}_i(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \leq \\ &\leq C_1 N_{\Psi^1}(\delta) + C_1 \max_{k=1, \dots, n} \left| \overset{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right|, \end{aligned}$$

dla pewnej dodatniej stałej C_1 .

- Analogicznie dostajemy ($C_2 > 0$)

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n \Psi_{ki}^{(s)} p_i^{(s+1)}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \sum_{i=1}^n \Psi_{ki}^{(s)} p_i^{(s+1)}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \leq \\ & \leq C_2 N_{\Psi^2}(\delta) + C_2 \max_{k=1, \dots, n} \left| \overset{(s+1)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s+1)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right|, \end{aligned}$$

oraz ($C_3 > 0$)

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n \Phi_{kij}^{(s)} p_i^{(s)} p_j^{(s+1)}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \sum_{i=1}^n \Phi_{kij}^{(s)} p_i^{(s)} p_j^{(s+1)}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \leq \\ & \leq C_3 N_{\Phi}(\delta) + C_3 \max_{k=1, \dots, n} \left| \overset{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \\ & \quad + C_3 \max_{k=1, \dots, n} \left| \overset{(s+1)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s+1)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right|, \end{aligned}$$

gdzie $N_{\Psi^2}(\delta) \rightarrow 0$, $N_{\Phi}(\delta) \rightarrow 0$ dla $\delta \rightarrow 0$.

Na podstawie powyższych uwag dostajemy

$$\begin{aligned} \left| \overset{(s+1)}{p}(\bar{t}, \bar{x}) - \overset{(s+1)}{p}(\bar{t}, \bar{\bar{x}}) \right| & \leq N_0(\delta) + \bar{t} (N_{\Lambda}(\delta) + C_1 N_{\psi^1}(\delta) + C_2 N_{\Psi^2}(\delta) + C_3 N_{\Phi}(\delta)) \quad (3.51) \\ & \quad + n(C_1 + C_3) \int_0^{\bar{t}} \max_{k=1, \dots, n} \left| \overset{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| dt \\ & \quad + n(C_2 + C_3) \int_0^{\bar{t}} \max_{k=1, \dots, n} \left| \overset{(s+1)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s+1)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| dt. \end{aligned}$$

Przyjmijmy

$$M_{s+1}(t, \delta) = \max_{\substack{k=1, \dots, n \\ i=1, \dots, s+1}} \sup_{\substack{|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| \leq \delta \\ \tau \in [0, t]}} \left| \overset{(i)}{p}_k(\tau; x_k(\tau; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(i)}{p}_k(\tau; x_k(\tau; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right|. \quad (3.52)$$

Z (3.51) mamy

$$\begin{aligned} M_{s+1}(\bar{t}, \delta) & \leq N_0(\delta) + \bar{t} (N_{\Lambda}(\delta) + C N_{\psi^1}(\delta) + C N_{\Psi^2}(\delta) + C N_{\Phi}(\delta)) \quad (3.53) \\ & \quad + 4C \int_0^{\bar{t}} M_{s+1}(t, \delta) dt, \end{aligned}$$

dla $C = \max \{nC_1, nC_2, nC_3\}$.

Skąd po zastosowaniu lematu Gronwalla dochodzimy do nierówności:

$$M_{s+1}(\bar{t}, \delta) \leq \left(N_0(\delta) + \bar{t} (N_{\Lambda}(\delta) + C N_{\psi^1}(\delta) + C N_{\Psi^2}(\delta) + C N_{\Phi}(\delta)) \right) e^{4C\bar{t}}. \quad (3.54)$$

Ponieważ $N_{0, \Gamma, \Psi^1, \Psi^2, \Phi}(\delta) \rightarrow 0$ gdy $\delta \rightarrow 0$, dlatego dla $t \in [0, t_1]$ również $M_{s+1}(\bar{t}, \delta) \rightarrow 0$ jeśli $\delta \rightarrow 0$.

Ostatecznie przyjmujemy

$$\tilde{M}(\delta) = \left(N_0(\delta) + t_1 (N_{\Gamma}(\delta) + C N_{\psi^1}(\delta) + C N_{\Psi^2}(\delta) + C N_{\Phi}(\delta)) \right) e^{4Ct_1}. \quad (3.55)$$

Na mocy twierdzenia Arzeli-Ascoliego, z każdego wspólnie ograniczonego i jednakowo ciągłego ciągu funkcji można wybrać podciąg zbieżny jednostajnie. Dlatego pewien podciąg $\{p^{(s_k)}\}$ zbiega niemal jednostajnie dla ustalonego $t \in [0, t_1]$ do ciągłej funkcji p . Udowodniliśmy, że ciąg $\{u^{(s)}\}$ jest jednostajnie zbieżny w $[0, t_0] \times \mathbb{R}$ do ciągłej funkcji u . Weźmy zatem podciąg $\{u^{(s_k)}\}$, który oczywiście zbiega jednostajnie do funkcji u . Stąd również podciąg $L(t, x, u^{(s_k)})$ zbiega jednostajnie do $L(t, x, u)$. Dlatego ciąg $\Gamma(t, x, u^{(s_k)}) p^{(s_k)}$ zbiega niemal jednostajnie względem x dla ustalonego $t \in [0, t_1]$ do ciągłej funkcji $\Gamma(t, x, u) p$. Pamiętajmy, że $u_{,x}^{(s_k)} = \Gamma(t, x, u^{(s_k)}) p^{(s_k)}$. Na mocy twierdzenia o różniczkowaniu ciągu funkcyjnego funkcja u jest różniczkowalna w sposób ciągły dla $t_2 = \min\{t_0, t_1\}$. Ponadto $u_{,x} = \Gamma[u] p$. Pochodna funkcji u istnieje, a zatem jest tylko jedna i stąd każdy inny zbieżny niemal jednostajnie (dla ustalonego $t \in [0, t_2]$) podciąg ciągu $\{p^{(s)}\}$ ma granicę p . Stąd wynika, że ciąg $\{p^{(s)}\}$ ma tylko jeden punkt skupienia.

Przechodząc w układzie (3.28) do granicy zauważamy, że funkcja u spełnia zagadnienie (3.3). Ciągłość pochodnej rozwiązania względem zmiennej t wynika z ciągłości prawej strony układu (3.1) i pochodnej $u_{,x}$.

Na mocy pokazanej jednoznaczności rozwiązania funkcja u jest rozwiązaniem klasy C^1 zagadnienia (3.1) - (3.2).

Rozdział 4

Zagadnienie Cauchy'ego dla układu quasi-liniowego z funkcjonalną zależnością współczynników od rozwiązania

W tym rozdziale skoncentrujemy się na twierdzeniu o istnieniu i jednoznaczności lokalnego w czasie rozwiązania problemu początkowego dla quasi-liniowego układu hiperbolicznego z dwiema zmiennymi niezależnymi (t, x) i współczynnikami zależnymi funkcjonalnie od rozwiązania postaci

$$u_{,t} + A[u]u_{,x} = b[u], \quad (4.1)$$

$$u(0, x) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Pokażemy, że rozwiązanie zależy (w topologii C^1) w sposób ciągły od warunków początkowych.

Dowód istnienia, który zaprezentujemy poniżej bazuje na metodzie kolejnych przybliżeń. Stąd będziemy potrzebowali Twierdzenia 2.5 dla układu liniowego. Przytoczymy teraz jego treść dla przypadku, kiedy dane początkowe zadane są na całym \mathbb{R} . Warto zauważyć, że jeśli te zależności funkcjonalne są zadane na odcinku $[\bar{a}, \bar{b}]$, to łatwo otrzymać - korzystając z definicji obszaru określoności - lokalną (przestrzennie) wersję twierdzenia o istnieniu przy danych początkowych zadanych na odcinku $[a, b] \subset (\bar{a}, \bar{b})$.

Twierdzenie 4.1 *Załóżmy, że $D(t, x)$, $L(t, x)$, $b(t, x)$, $B(t, x)$ są ograniczonymi funkcjami macierzowymi klasy $C^k([0, \infty) \times \mathbb{R})$ z ograniczonymi na $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ pochodnymi aż do rzędu k . Jeśli warunek początkowy $u^0(x)$ jest klasy $C^k(\mathbb{R})$ i ma również pochodne do rzędu k ograniczone na \mathbb{R} , wtedy istnieje jednoznaczne globalne rozwiązanie $u \in C^k([0, \infty) \times \mathbb{R})$. W topologii C^k w każdym skończonym pasie $[0, T] \times \mathbb{R}$ rozwiązanie zależy w sposób ciągły od warunków początkowych (4.2).*

Niech

$$X_0 = \{u \in C(\mathbb{R}); \|u\|_0 := \sup_{x \in \mathbb{R}} \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} < \infty\}.$$

i podobnie

$$X_1 = \{u \in C^1(\mathbb{R}); \|u\|_1 := \|u\|_0 + \|u_{,x}\|_0 < \infty\}.$$

We wszystkich rozważaniach w tej pracy ograniczymy się do funkcjonalnej zależności tylko ze względu na zmienną x . Stąd w $A[u]$, $b[u]$, itd., u jest traktowane jako funkcja zmiennej x ,

parametrycznie zależna od t . Podobnie przyjmujemy, że operatory A, b, \dots , są parametrycznie zależne od t . Dla uproszczenia notacji zależność od t nie będzie wyróżniana, o ile nie zajdzie taka potrzeba. W ten sposób liniowy przypadek (2.1) jest zawarty w (4.1).

Zakładamy również, że dla danej funkcji u z pewnej kuli $B_r^1(u^0)$ (kula otwarta z przestrzeni X_1 o środku w u^0 i promieniu r) macierz $A[u]$ ($t \in [0, T]$) ma rzeczywiste wartości własne $\xi_1[u], \dots, \xi_n[u]$ i jest diagonalizowalna

$$A[u] = \Gamma[u]D[u]L[u], \quad \Gamma = L^{-1}$$

$$D[u] = \text{diag}[\xi_1[u], \dots, \xi_n[u]], \quad L[u] = \begin{bmatrix} L_1[u] \\ \vdots \\ L_n[u] \end{bmatrix}.$$

Wiersze nieosobliwej macierzy $L[u]$ są liniowo niezależnymi lewymi wektorami własnymi $A[u]$.

Mnożąc (4.1) z lewej strony przez $L[u]$, otrzymujemy układ w postaci charakterystycznej

$$L[u] u_t + D[u] L[u] u_x = Z[u], \quad (4.3)$$

gdzie

$$Z[u] = L[u] b[u].$$

Niech zatem funkcja $u^0(x)$ będzie warunkiem początkowym (4.2) dla układu (4.1). Zakładamy, że istnieje kula $B_r^1(u^0)$ w X_1 taka, że dla każdego $t \in [0, T]$ zachodzą następujące warunki:

(A₁) $K : B_r^1(u^0) \rightarrow X_1$ i dla pewnej stałej $C < \infty$: $\|K[v]\|_1 \leq C$ dla dowolnego $v \in B_r^1(u^0)$, gdzie K oznacza L, Γ, D, Z .

(A₂) L jest ciągłym nieliniowym operatorem, $L : B_r^1(u^0) \rightarrow X_1$. Zakładamy, że L jest różniczkowalny w sensie Fréchet'a i dodatkowo przyjmujemy, że pochodna $L' : X_1 \rightarrow X_1$ może być rozszerzona w sposób ciągły na całą przestrzeń X_0 , tzn.

$$\exists_{C>0} \forall_{v \in B_r^1(u^0)} \forall_{h \in X_1} \|L'(v)h\|_0 \leq C\|h\|_0.$$

(A₃) $L[v]$ jest klasy C^1 ze względu na parametr t i istnieje stała C taka, że $\|\frac{\partial}{\partial t} L[v]\|_0 \leq C$, $v \in B_r^1(u^0)$.

(A₄) Dla $|x - \bar{x}| \leq \delta$ i dla każdego $v \in B_r^1(u^0)$, istnieje stała C i funkcja $N(\delta)$, $N(\delta) \rightarrow 0$ jeśli $\delta \rightarrow 0$ taka, że

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} K[v](t, x) - \frac{\partial}{\partial x} K[v](t, \bar{x}) \right| \leq C|v_{,x}(x) - v_{,x}(\bar{x})| + C|v(x) - v(\bar{x})| + N(\delta),$$

gdzie K oznacza L, D, Z . $|\cdot|$ - metryka euklidesowa.

(A₅) Istnieje stała C , że $\|K[v] - K[\bar{v}]\|_0 \leq C\|v - \bar{v}\|_0$ dla $v \in B_r^1(u^0)$, gdzie K symbolizuje L, Γ, D, Z .

Wszystkie stałe występujące w założeniach (A₁)-(A₅) mogą być oczywiście różne. Dla uproszczenia przyjęliśmy największą z nich jako C .

Można podać następujący przykład operatora, który spełnia założenia (A₁) - (A₅) :

$$K[v](t, x) = k \left(t, x, v, \int_{\mathbb{R}} g_1(x, y, v(y)) dy, \int_0^x g_2(x, y, v(y)) dy, \int_{\mathbb{R}} g_3(x, y, v(y), v'(y)) dy, \int_0^x g_4(x, y, v(y), v'(y)) dy \right), \quad (4.4)$$

gdzie $v \in X_1$, k jest funkcją różniczkowalną w sposób ciągły ze względu na wszystkie zmienne oraz funkcje g_3 i g_4 zależą od pochodnej v' liniowo. Ponadto zakładamy, że całki $\int_{\mathbb{R}} g_1(x, y, v(y)) dy$, $\int_0^x g_2(x, y, v(y)) dy$, $\int_{\mathbb{R}} g_3(x, y, v(y), v'(y)) dy$, $\int_0^x g_4(x, y, v(y), v'(y)) dy$ istnieją i są różniczkowalne w sposób ciągły ze względu na x oraz pochodne są jednostajnie ograniczone jako funkcje zmiennej x . Szczególnym przypadkiem układu równań różniczkowo-funkcjonalnych (4.1) z operatorem typu (4.4) jest quasi-liniowy układ hiperboliczny.

Występująca w założeniu (A_4) funkcja $N(\delta)$ wyraża się przez moduły ciągłości funkcji $\frac{\partial g_1}{\partial x}$, $\frac{\partial g_2}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x} k(t, x, v, \eta_1, \eta_2)$.

Operatory, które występują na stronie 13 w układzie ((1.33) - (1.35), (1.15), (1.31)) są postaci (4.4).

Sformułujemy teraz główne twierdzenie tego rozdziału:

Twierdzenie 4.2 *Załóżmy, że spełnione są założenia (A_1) - (A_5) . Wówczas zagadnienie (4.1) - (4.2) posiada lokalne w czasie, jednoznaczne rozwiązanie klasy C^1 .*

Wyniki przedstawione w tym rozdziale zostały już opublikowane w pracy [35].

4.1 Układ przedłużony

W tym paragrafie dla układu (4.1) zdefiniujemy układ przedłużony, który pomoże nam oszacować wzrost rozwiązania układu (4.3) i jego pochodnych.

Wprowadzamy nową funkcję wektorową p :

Definicja 4.1

$$p(t, x) = L[u(t, \cdot)] u_{,x}, \quad (4.5)$$

Będziemy używali następującej notacji:

$$L_{,t}[v] = \frac{\partial}{\partial t} L[v], \quad (4.6)$$

dla funkcji $v \in X_1$ niezależnej od t . Jeśli $u = u(t, x)$ wówczas

$$L_{,t}[u] = \frac{\partial}{\partial t} L[v] \Big|_{v=u}. \quad (4.7)$$

Pochodną Frechéta dla $L[u]$ działającą na ω będziemy oznaczać

$$L'[u]\omega := L'(u; \omega), \quad u \in X_1, \omega \in X_0.$$

Zróżniczkujemy teraz formalnie równania układu (4.3) względem x

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} L[u] \right) u_{,t} + L[u] u_{,tx} + \left(\frac{\partial}{\partial x} D[u] \right) L[u] u_{,x} + D[u] \frac{\partial}{\partial x} (L[u] u_{,x}) = \frac{\partial}{\partial x} Z[u]. \quad (4.8)$$

Dla pochodnej cząstkowej $u_{,tx}$ mamy

$$L[u] u_{,tx} = \frac{\partial}{\partial t} (L[u] u_{,x}) - \left(\frac{\partial}{\partial t} L[u] \right) u_{,x},$$

gdzie na mocy założenia (A_2) oraz ze względu na (4.7) możemy przekształcić $\frac{\partial}{\partial t} L[u]$ następująco

$$\frac{\partial}{\partial t} L[u] = L'(u; u_{,t}) + L_{,t}[u]. \quad (4.9)$$

Ostatecznie wyznaczając u_t i $u_{,x}$ z (4.3) oraz (4.5) względem p , otrzymujemy układ przedłużony:

$$u_t = \Gamma[u]Z[u] - \Gamma[u]D[u]p, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + D[u] \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} Z[u] - \left(\frac{\partial}{\partial x} L[u] \right) \Gamma[u]Z[u] \quad (4.11)$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} L[u] \right) \Gamma[u]D[u] + L'(u; \Gamma[u]Z[u] - \Gamma[u]D[u]p) \Gamma[u] + L_{,t}[u] \Gamma[u] - \frac{\partial}{\partial x} D[u] \right] p,$$

$$u(0, x) = u^0(x), \quad (4.12)$$

$$p(0, x) = p^0(x) = L[u^0] \frac{du^0}{dx}. \quad (4.13)$$

Warto odnotować, że układ (4.10)-(4.11) jest już wyrażony w inwariantach Riemanna, tzn. ma postać diagonalną, podczas gdy (4.1) - w ogólności - nie jest. Lewa strona (4.11) jest pochodną kierunkową wzdłuż charakterystyk:

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{P}_t p) = \mathcal{P}_t f, \quad (4.14)$$

gdzie

$$f = \frac{\partial}{\partial x} Z[u] - \left(\frac{\partial}{\partial x} L[u] \right) \Gamma[u]Z[u] + \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} L[u] \right) \Gamma[u]D[u] + L'(u; \Gamma[u]Z[u] - \Gamma[u]D[u]p) \Gamma[u] + L_{,t}[u] \Gamma[u] - \frac{\partial}{\partial x} D[u] \right] p.$$

Całkujemy (4.14) względem t w granicach od 0 do \bar{t} i otrzymujemy

$$p(\bar{t}, \bar{x}) = \mathcal{P}_0 p + \int_0^{\bar{t}} (\mathcal{P}_t f) dt. \quad (4.15)$$

Aby otrzymać równania (4.10)-(4.11) musimy założyć, że $u(t, x) \in C^2$. Jednak postać całkowa (4.15) pozwala nam znaleźć słabsze rozwiązanie, które jest jedynie ciągłe, ponieważ p_k jest różniczkowalne wzdłuż k -tej charakterystyki ($k = 1, \dots, n$).

Niech (u, p) należy do przestrzeni $X_0 \times X_0$ z normą

$$\|(u, p)\|_* := (C^3 + 1)\|u\|_0 + C\|p\|_0.$$

Jeśli (u, p) jest z kuli $B_r^*(u^0, p^0)$ o środku w (u^0, p^0) , otwartej w $X_0 \times X_0$ wtedy funkcja u pozostaje w kuli $B_r^1(u^0)$. Z założeń (A_2) i (A_5) otrzymujemy

$$\|u_{,x} - u^0_{,x}\|_0 = \|\Gamma[u]p - \Gamma[u^0]p^0\|_0 \leq C\|p - p^0\|_0 + C\|u - u^0\|_0\|p^0\|_0.$$

Ponieważ

$$\|p^0\|_0 = \|L[u^0] \frac{du^0}{dx}\|_0 \leq C^2,$$

dlatego

$$\|u_{,x} - u^0_{,x}\|_0 + \|u - u^0\|_0 \leq (C^3 + 1)\|u - u^0\|_0 + C\|p - p^0\|_0 < r.$$

Pokażemy teraz, że jeśli istnieje rozwiązanie $(u(t, x), p(t, x))$ równań (4.10)-(4.11) (p w sensie równania (4.15)) to pozostaje ono w $B_r^*(u^0, p^0)$ dla pewnego skończonego czasu $t \in [0, t_*)$, gdzie

t_* jest określone przez (4.20).

W kuli $B_r^*(u^0, p^0)$ zachodzą następujące oszacowania:

$$|u_{,t}(t, x)| \leq \|\Gamma[u]\|_0 \|Z[u]\|_0 + \|\Gamma[u]\|_0 \|D[u]\|_0 \|p\|_0 \leq C^2(1 + \|p\|_0). \quad (4.16)$$

Ze względu na

$$\|p\|_0 \leq \|p - p^0\|_0 + \|p^0\|_0 \leq \frac{r}{C} + C^2,$$

dostajemy

$$|u_{,t}(t, x)| \leq C_u, \quad (4.17)$$

gdzie $C_u = C^2 + C^4 + Cr$.

Funkcja p_k jest różniczkowalna wzdłuż k -tej rodziny charakterystyk. Zatem z (4.11) mamy:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt}(\mathcal{P}_t p) \right| &\leq \left\| \frac{\partial}{\partial x} Z[u] \right\|_0 + \left\| \frac{\partial}{\partial x} L[u] \right\|_0 \|\Gamma[u]\|_0 \|Z[u]\|_0 \\ &+ \left(\left\| \frac{\partial}{\partial x} L[u] \right\|_0 \|\Gamma[u]\|_0 \|D[u]\|_0 + C \|\Gamma[u]Z[u] - \Gamma[u]D[u]p\|_0 \|\Gamma[u]\|_0 \right. \\ &\left. + \|L_{,t}[u]\|_0 \|\Gamma[u]\|_0 + \left\| \frac{\partial}{\partial x} D[u] \right\|_0 \right) \|p\|_0 \\ &\leq C + C^3 + \|p\|_0(C + C^2 + C^3 + C^4) + C^4(\|p\|_0)^2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Stąd

$$\left| \frac{d}{dt}(\mathcal{P}_t p) \right| \leq C_p, \quad (4.19)$$

gdzie $C_p = C + 2C^3 + C^4 + C^5 + C^6 + C^8 + r(1 + C + C^2 + C^3 + 2C^5) + C^2 r^2$.

Ponieważ dla dowolnej funkcji $\varphi(t) \in C^1$:

$$\frac{d}{dt}|\varphi(t)| \leq \left| \frac{d}{dt}\varphi(t) \right|,$$

dlatego z (4.17), (4.19) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}|u(t, x) - u^0(x)| &\leq C_p, \\ \frac{\partial}{\partial t}|\mathcal{P}_t p - \mathcal{P}_0 p| &\leq C_u, \end{aligned}$$

z czego wynikają nierówności

$$\begin{aligned} |u(t, x) - u^0(x)| &\leq \bar{t} C_p, \\ |\mathcal{P}_t p - \mathcal{P}_0 p| &\leq \bar{t} C_u. \end{aligned}$$

Stałe C_u, C_p nie zależą od x , więc możemy napisać

$$\begin{aligned} \|(u, p) - (u^0, p^0)\|_* &= (C^3 + 1)\|u - u^0\|_0 + C\|p - p^0\|_0 \\ &\leq \bar{t} (C_u(C^3 + 1) + C_p C) =: \bar{t} C_*. \end{aligned}$$

Jeśli

$$t_* = \min \left\{ \frac{r}{C_*}, T \right\}, \quad (4.20)$$

wówczas rozwiązanie znajduje się w kuli $B_r^*(u^0, p^0)$ (stąd jest ograniczone) dla $t \in [0, t_*]$.

4.2 Charakterystyki

Charakterystyka $x = x_k(t; \bar{t}, \bar{x})$ należąca do k -tej rodziny krzywych, przychodząca do punktu (\bar{t}, \bar{x}) , jest rozwiązaniem równania

$$\frac{dx}{dt} = \xi_k[u](t, x), \quad t \in [0, \bar{t}], \quad (4.21)$$

z następującym warunkiem początkowym

$$x_k(t; \bar{t}, \bar{x})|_{t=\bar{t}} = \bar{x}. \quad (4.22)$$

Dla $u \in B_r^1(u^0)$ funkcja $\xi_k[u](t, x)$ jest ograniczona i ma ograniczoną pochodną ze względu na x . Stąd spełnia warunek Lipschitza względem x i dlatego problem początkowy (4.21)-(4.22) ma, na mocy twierdzenia Picarda o istnieniu i jednoznaczności, jednoznaczne rozwiązanie. Przez każdy punkt $(\bar{t}, \bar{x}) \in [0, t_*] \times \mathbb{R}$ przechodzi tylko jedna charakterystyka należąca do k -tej rodziny i jest ona określona dla $t \in [0, t_*]$.

4.3 Jednoznaczność rozwiązania

Pokażemy następujący

Lemat 4.1 *Jeśli istnieje rozwiązanie problemu początkowego (4.1) - (4.2), to jest ono jednoznaczne.*

Dowód. Załóżmy, że $u(t, x)$ i $\bar{u}(t, x)$ są dwoma różnymi rozwiązaniami zagadnienia (4.1) - (4.2), przy czym

$$u(0, x) = \bar{u}(0, x) = u^0(x).$$

Dla ułatwienia będziemy używali następującej konwencji zapisu

$$\bar{L} = L[\bar{u}], \quad \bar{D} = D[\bar{u}], \quad \bar{Z} = Z[\bar{u}], \quad \bar{\Gamma} = \Gamma[\bar{u}].$$

Wprowadzamy funkcję

$$v(t, x) = u(t, x) - \bar{u}(t, x), \quad v(0, x) = [0, \dots, 0]^T, \quad (4.23)$$

która spełnia następujący układ równań

$$\bar{L}v_{,t} + \bar{D}\bar{L}v_{,x} = Z - \bar{Z} - (L - \bar{L})u_{,t} - (DL - \bar{D}\bar{L})u_{,x}. \quad (4.24)$$

Postać układu (4.24) sugeruje wprowadzenie kolejnej funkcji:

$$\bar{v} = \bar{L}v.$$

Uwzględniając wyrażenia

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{L} \right) v + \bar{L} \frac{\partial v}{\partial t} = \left(L_{,t}[\bar{u}] + L'(\bar{u}; \bar{u}_{,t}) \right) v + \bar{L} \frac{\partial v}{\partial t} \\ &= \left(L_{,t}[\bar{u}] + L'(\bar{u}; \bar{\Gamma} \bar{Z} - \bar{\Gamma} \bar{D} \bar{p}) \right) v + \bar{L} \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{L} \right) v + \bar{L} \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned}$$

możemy zapisać układ (4.24) w inwariantach Riemanna

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{D} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} &= Z - \bar{Z} - (L - \bar{L}) u_{,t} - (DL - \bar{D}\bar{L}) u_{,x} \\ &+ \left(L_{,t}[\bar{u}] + L'(\bar{u}; \bar{\Gamma} \bar{Z} - \bar{\Gamma} \bar{D} \bar{p}) + \bar{D} \frac{\partial}{\partial x} \bar{L} \right) \bar{\Gamma} \bar{v}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Stąd dostajemy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathcal{P}_t \bar{v}) &= \mathcal{P}_t Z - \mathcal{P}_t \bar{Z} - \mathcal{P}_t \left((L - \bar{L}) u_{,t} \right) - \mathcal{P}_t \left((DL - \bar{D}\bar{L}) u_{,x} \right) \\ &+ \mathcal{P}_t \left(\left(L_{,t}[\bar{u}] + L'(\bar{u}; \bar{\Gamma} \bar{Z} - \bar{\Gamma} \bar{D} \bar{p}) + \bar{D} \frac{\partial}{\partial x} \bar{L} \right) \bar{\Gamma} \bar{v} \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Po scałkowaniu od 0 do \bar{t} łatwo otrzymujemy nierówność

$$\begin{aligned} |\bar{v}(\bar{t}, \bar{x})| &\leq \int_0^{\bar{t}} \|Z[u] - Z[\bar{u}]\|_0 dt \\ &+ \int_0^{\bar{t}} \|L[u] - L[\bar{u}]\|_0 \|u_{,t}\|_0 dt \\ &+ \int_0^{\bar{t}} \|D[u] L[u] - D[\bar{u}] L[\bar{u}]\|_0 \|u_{,x}\|_0 dt \\ &+ \int_0^{\bar{t}} \|L_{,t}[\bar{u}]\|_0 \|\Gamma[\bar{u}]\|_0 \|\bar{v}\|_0 dt \\ &+ \int_0^{\bar{t}} \|L'(\bar{u}; \bar{\Gamma} \bar{Z} - \bar{\Gamma} \bar{D} \bar{p})\|_0 \|\Gamma[\bar{u}]\|_0 \|\bar{v}\|_0 dt \\ &+ \int_0^{\bar{t}} \|D[\bar{u}]\|_0 \left\| \frac{\partial}{\partial x} L[\bar{u}] \right\|_0 \|\Gamma[\bar{u}]\|_0 \|\bar{v}\|_0 dt. \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że zachodzą następujące oszacowania

- $\|u_{,t}(t, x)\|_0 \leq \|\Gamma[u]\|_0 \|Z[u]\|_0 + \|\Gamma[u]\|_0 \|D[u]\|_0 \leq 2C^2,$
- $\|D[u] L[u] - D[\bar{u}] L[\bar{u}]\|_0 \leq C \|L[u] - L[\bar{u}]\|_0 + C \|D[u] - D[\bar{u}]\|_0 \leq 2C^2 \|u - \bar{u}\|_0,$
- $\|u_{,x}(t, x)\|_0 = \|\Gamma[u] p\|_0 \leq C \|p\|_0 \leq r + C^3,$
- $\|L_{,t}[u]\|_0 \leq C,$
- $\|L'(\bar{u}; \bar{u}_t)\|_0 = \|L'(\bar{u}; \Gamma[u] Z[u] - \Gamma[u] D[u] p)\|_0$
 $\leq C \|\Gamma[u] Z[u] - \Gamma[u] D[u] p\|_0 \leq C^3 + C^5 + C^2 r,$
- $\|D[\bar{u}]\|_0 \left\| \frac{\partial}{\partial x} L[\bar{u}] \right\|_0 \leq C^2,$
- $\|\Gamma[u]\|_0 \leq C.$

Korzystając z powyższych faktów możemy napisać

$$\begin{aligned} |\bar{v}(\bar{t}, \bar{x})| &\leq C_1 \int_0^{\bar{t}} \|u(t, x) - \bar{u}(t, x)\|_0 dt + C_2 \int_0^{\bar{t}} \|\bar{v}(t, x)\|_0 dt \\ &\leq C_1 \int_0^{\bar{t}} \|\Gamma[u](t, x)\|_0 \|\bar{v}(t, x)\|_0 dt + C_2 \int_0^{\bar{t}} \|\bar{v}(t, x)\|_0 dt \\ &\leq C_3 \int_0^{\bar{t}} \|\bar{v}(t, x)\|_0 dt, \end{aligned} \quad (4.27)$$

gdzie $C_1 = C + 2C^3 + 2C^5 + 2C^2r$, $C_2 = C^2 + C^3 + C^4 + C^6 + C^3r$, $C_3 = C_1C + C_2$.
Ostatecznie otrzymujemy

$$\|\bar{v}(\bar{t}, x)\|_0 \leq C_3 \int_0^{\bar{t}} \|\bar{v}(t, x)\|_0 dt. \quad (4.28)$$

Na mocy lematu Gronwalla wnioskujemy, że $\|\bar{v}(t, x)\|_0 \equiv 0$, czyli $\bar{u}(t, x) \equiv u(t, x)$, co kończy dowód.

4.4 Istnienie rozwiązania

Lemat 4.2 *Istnieje rozwiązanie zagadnienia (4.1) - (4.2) i jest ono klasy $C^1([0, t_*] \times \mathbb{R})$.*

Uwaga 4.1 W dalszym ciągu, w celu uproszczenia notacji umownie będziemy pisali $\overset{(s)}{L}$ zamiast $L[\overset{(s)}{u}]$. Podobnie dla pozostałych operatorów.

Dla dowodu zastosujemy metodę kolejnych przybliżeń. Definiujemy zerowy element ciągu następująco:

$$\overset{(0)}{u}(t, x) = u^0(x). \quad (4.29)$$

Załóżmy, że zostało już skonstruowane przybliżenie $\overset{(s)}{u}(t, x) \in C^1$. Następne przybliżenie $\overset{(s+1)}{u}(t, x)$ określimy jako rozwiązanie następującego liniowego problemu Cauchy'ego:

$$\overset{(s)}{L} \overset{(s+1)}{u}_{,t} + \overset{(s)}{D} \overset{(s)}{L} \overset{(s+1)}{u}_{,x} = \overset{(s)}{Z}, \quad (4.30)$$

$$\overset{(s+1)}{u}(0, x) = u^0(x). \quad (4.31)$$

Twierdzenie 4.1 dla układu liniowego zapewnia istnienie rozwiązania klasy C^1 jeśli współczynniki i warunek początkowy są klasy C^1 . Stąd dla $t \in [0, t_*)$ istnieje rozwiązanie $\overset{(s+1)}{u} \in B_r^1(u^0)$.

4.4.1 Kolejne przybliżenia dla układu przedłużonego

Oznaczając

$$\overset{(0)}{p} = L[u^0] \frac{du^0(x)}{dx}, \quad \overset{(s+1)}{p} = \overset{(s)}{L} \overset{(s+1)}{u}_{,x}, \quad (4.32)$$

rozważymy następujący układ liniowy

$$\overset{(s+1)}{u}_{,t} = \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s)}{Z} - \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s)}{D} \overset{(s)}{p}, \quad (4.33)$$

$$\overset{(s+1)}{p}_{,t} + \overset{(s)}{D} \overset{(s+1)}{p}_{,x} = \frac{\partial}{\partial x} \overset{(s)}{Z} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \overset{(s)}{L} \right) \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s)}{Z} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial}{\partial x} \binom{(s)}{L} \right) \binom{(s)(s)(s)}{\Gamma D p} \\
& + L' \left(\binom{(s)}{u}; \binom{(s)(s)}{\Gamma Z} - \binom{(s)(s)(s)}{\Gamma D p} \right) \binom{(s)(s+1)}{\Gamma p} \\
& + \left(L_{,t} \binom{(s)}{u} \binom{(s)}{\Gamma} - \frac{\partial}{\partial x} \binom{(s)}{D} \right) \binom{(s+1)}{p},
\end{aligned}$$

$$\binom{(s+1)}{u} (0, x) = \binom{(0)}{u}, \quad (4.35)$$

$$\binom{(s+1)}{p} (0, x) = \binom{(0)}{p}. \quad (4.36)$$

Korzystając z indukcji matematycznej pokażemy, że dla dowolnego $s = 0, 1, \dots$ rozwiązanie układu (4.33)-(4.36) istnieje i jest określone dla każdego $t \in [0, t_*)$ oraz $\binom{(s)}{u}, \binom{(s)}{p}$ należy do kuli $B_r^*(u^0, p^0)$.

Niech dla $t \in [0, t_*)$

$$\binom{(s)}{u}, \binom{(s)}{p} \in B_r^*(u^0, p^0).$$

Jeśli zachodzi powyższy fakt, to oszacowania z §4.1 są prawdziwe również dla $\binom{(s+1)}{u}, \binom{(s+1)}{p}$. Dlatego $\binom{(s+1)}{u}, \binom{(s+1)}{p}$ jest określone dla $t \in [0, t_*)$ i należy do kuli $B_r^*(u^0, p^0)$.

Ponieważ $\binom{(0)}{u}, \binom{(0)}{p} \in B_r^*(u^0, p^0)$ dla dowolnego czasu, więc $\binom{(s)}{u}, \binom{(s)}{p}_{s=0,1,\dots} \in B_r^*(u^0, p^0)$ dla $t \in [0, t_*)$.

4.4.2 Jednostajna zbieżność ciągu $\{\binom{(s)}{u}\}$

Zacniemy od następującego lematu:

Lemat 4.3 Ciąg $\{\binom{(s)}{u}\}$ jest zbieżny w przestrzeni Banacha $C([0, t_*) \times \mathbb{R})$.

Dowód. Wprowadzamy funkcję wektorową

$$\binom{(s+1)}{r} (t, x) = L \left(\binom{(s+1)}{u} - \binom{(s)}{u} \right), \quad s = 0, 1, \dots$$

z warunkiem początkowym

$$\binom{(s+1)}{r} (0, x) = [0, \dots, 0]^T.$$

Pochodne funkcji $\binom{(s+1)}{r}$ wyrażają się następująco:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \binom{(s+1)}{r} & = \left(L_{,t} \binom{(s)}{u} + L' \left(\binom{(s)}{u}; \binom{(s)}{u, t} \right) \right) \left(\binom{(s+1)}{u} - \binom{(s)}{u} \right) + L \left(\binom{(s)}{u, t} - \binom{(s)}{u, t} \right) \\
& = \left(L_{,t} \binom{(s)}{u} + L' \left(\binom{(s)}{u}; \binom{(s)(s)}{\Gamma Z} - \binom{(s)(s)(s)}{\Gamma D p} \right) \right) \left(\binom{(s+1)}{u} - \binom{(s)}{u} \right) + L \left(\binom{(s)}{u, t} - \binom{(s)}{u, t} \right), \\
\frac{\partial}{\partial x} \binom{(s+1)}{r} & = \left(\frac{\partial}{\partial x} \binom{(s)}{L} \right) \left(\binom{(s+1)}{u} - \binom{(s)}{u} \right) + L \left(\binom{(s)}{u, x} - \binom{(s)}{u, x} \right).
\end{aligned}$$

Z (4.30) otrzymujemy układ dla funkcji $\binom{(s+1)}{r}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \binom{(s+1)}{r} + D \frac{\partial}{\partial x} \binom{(s+1)}{r} & = Z - Z^{(s-1)} \\
& + L_{,t} \binom{(s)}{u} \binom{(s)}{\Gamma} \binom{(s+1)}{r}
\end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned}
& +L' \left(\begin{smallmatrix} (s) & (s) & (s) \\ u; \Gamma & Z & - \Gamma D p \end{smallmatrix} \right) \Gamma \begin{smallmatrix} (s) \\ r \end{smallmatrix}^{(s+1)} \\
& + D \left(\frac{\partial}{\partial x} \begin{smallmatrix} (s) \\ L \end{smallmatrix} \right) \Gamma \begin{smallmatrix} (s) \\ r \end{smallmatrix}^{(s+1)} \\
& - \left(\begin{smallmatrix} (s) & (s-1) \\ L & - L \end{smallmatrix} \right) \begin{smallmatrix} (s) \\ u, t \end{smallmatrix} \\
& - \left(\begin{smallmatrix} (s) & (s) & (s-1) & (s-1) \\ DL & - D & L & L \end{smallmatrix} \right) \begin{smallmatrix} (s) \\ u, x \end{smallmatrix}.
\end{aligned}$$

Wzdłuż charakterystyk (4.37) przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\mathcal{P}_t \begin{smallmatrix} (s+1) \\ r \end{smallmatrix} \right) & = \mathcal{P}_t \begin{smallmatrix} (s) \\ Z \end{smallmatrix} - \mathcal{P}_t \begin{smallmatrix} (s-1) \\ Z \end{smallmatrix} \\
& + \mathcal{P}_t \left(L_{,t} \begin{smallmatrix} (s) \\ u \end{smallmatrix} \right) \Gamma \begin{smallmatrix} (s) \\ r \end{smallmatrix}^{(s+1)} \\
& + \mathcal{P}_t \left(L' \left(\begin{smallmatrix} (s) & (s) & (s) \\ u; \Gamma & Z & - \Gamma D p \end{smallmatrix} \right) \Gamma \begin{smallmatrix} (s) \\ r \end{smallmatrix}^{(s+1)} \right) \\
& + \mathcal{P}_t \left(D \left(\frac{\partial}{\partial x} \begin{smallmatrix} (s) \\ L \end{smallmatrix} \right) \Gamma \begin{smallmatrix} (s) \\ r \end{smallmatrix}^{(s+1)} \right) \\
& - \mathcal{P}_t \left(\left(\begin{smallmatrix} (s) & (s-1) \\ L & - L \end{smallmatrix} \right) \begin{smallmatrix} (s) \\ u, t \end{smallmatrix} \right) \\
& - \mathcal{P}_t \left(\left(\begin{smallmatrix} (s) & (s) & (s-1) & (s-1) \\ DL & - D & L & L \end{smallmatrix} \right) \begin{smallmatrix} (s) \\ u, x \end{smallmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Całkując każde z równań układu wzdłuż odpowiedniej charakterystyki względem t od 0 do \bar{t} otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\begin{smallmatrix} (s+1) \\ r \end{smallmatrix} (\bar{t}, \bar{x}) & = \int_0^{\bar{t}} \left(\mathcal{P}_t \begin{smallmatrix} (s) \\ Z \end{smallmatrix} - \mathcal{P}_t \begin{smallmatrix} (s-1) \\ Z \end{smallmatrix} \right) dt \\
& + \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(L_{,t} \begin{smallmatrix} (s) \\ u \end{smallmatrix} \right) \Gamma \begin{smallmatrix} (s) \\ r \end{smallmatrix}^{(s+1)} dt \\
& + \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(L' \left(\begin{smallmatrix} (s) & (s) & (s) \\ u; \Gamma & Z & - \Gamma D p \end{smallmatrix} \right) \Gamma \begin{smallmatrix} (s) \\ r \end{smallmatrix}^{(s+1)} \right) dt \\
& + \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(D \left(\frac{\partial}{\partial x} \begin{smallmatrix} (s) \\ L \end{smallmatrix} \right) \Gamma \begin{smallmatrix} (s) \\ r \end{smallmatrix}^{(s+1)} \right) dt \\
& - \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(\left(\begin{smallmatrix} (s) & (s-1) \\ L & - L \end{smallmatrix} \right) \begin{smallmatrix} (s) \\ u, t \end{smallmatrix} \right) dt \\
& - \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(\left(\begin{smallmatrix} (s) & (s) & (s-1) & (s-1) \\ DL & - D & L & L \end{smallmatrix} \right) \begin{smallmatrix} (s) \\ u, x \end{smallmatrix} \right) dt.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Oszacujemy $\begin{smallmatrix} (s+1) \\ r \end{smallmatrix}$ w podobny sposób jak (4.28):

$$\| \begin{smallmatrix} (s+1) \\ r \end{smallmatrix} \|_0 \leq C_r \int_0^{\bar{t}} \| \begin{smallmatrix} (s) \\ r \end{smallmatrix} \|_0 dt + C_r \int_0^{\bar{t}} \| \begin{smallmatrix} (s+1) \\ r \end{smallmatrix} \|_0 dt, \tag{4.39}$$

dla pewnej nieujemnej stałej C_r .

Definiujemy funkcję

$$Q^{(i)}(\bar{t}) = \max_{t \in [0, \bar{t}]} \| \begin{smallmatrix} (i) \\ r \end{smallmatrix} (t, x) \|_0.$$

Z nierówności (4.39) mamy

$$Q^{(s+1)}(\bar{t}) \leq C_r \int_0^{\bar{t}} Q^{(s)}(t) dt + C_r \int_0^{\bar{t}} Q^{(s+1)}(t) dt. \quad (4.40)$$

Dla każdego $t_1 \geq \bar{t}$ zachodzi

$$Q^{(s+1)}(\bar{t}) \leq C_r \int_0^{t_1} Q^{(s)}(t) dt + C_r \int_0^{\bar{t}} Q^{(s+1)}(t) dt.$$

Po zastosowaniu nierówności Gronwalla dostajemy

$$Q^{(s+1)}(\bar{t}) \leq C_r e^{C_r \bar{t}} \int_0^{t_1} Q^{(s)}(t) dt \leq C_r e^{C_r t_1} \int_0^{t_1} Q^{(s)}(t) dt = C_4 \int_0^{t_1} Q^{(s)}(t) dt,$$

gdzie $C_4 = C_r e^{C_r t_*}$.

Ponieważ otrzymana nierówność zachodzi dla dowolnego $t_1 \geq \bar{t}$, więc również dla $t_1 = \bar{t}$:

$$Q^{(s+1)}(\bar{t}) \leq C_4 \int_0^{\bar{t}} Q^{(s)}(t) dt. \quad (4.41)$$

Stosując teraz s -krotnie wzór (4.41) :

$$Q^{(s+1)}(\bar{t}) \leq C_4^s \int_0^{\bar{t}} dt \int_0^t d\tau_1 \dots \int_0^{\tau_{s-1}} Q^{(1)}(\tau_s) d\tau_{s-1},$$

i wykorzystując fakt, że $Q^{(1)}$ jest stałe

$$Q^{(1)}(\bar{t}) = \max_{t \in [0, \bar{t}]} \|r^{(0)}(t, x)\|_0 \leq \max_{t \in [0, t_*]} \|L[u^{(0)}](\bar{u} - u^{(0)})\|_0 =: C_Q, \quad (4.42)$$

wniosujemy, że

$$Q^{(s+1)}(\bar{t}) \leq \frac{(C_4 \bar{t})^s}{s!} C_Q, \quad s = 0, 1, \dots \quad (4.43)$$

Pokażemy teraz, że ciąg $\{u^{(s)}\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni Banacha $C([0, t_*] \times \mathbb{R})$ z normą $\|\cdot\|_0 = \max_{t \in [0, t_*]} \|\cdot\|_0$. Niech $k > m$. Z nierówności (4.43) i z ograniczoności funkcji $\Gamma^{(s)}$, $s = 0, 1, 2, \dots$ uzyskujemy oszacowanie dla różnicy dwóch kolejnych przybliżeń u :

$$\begin{aligned} \|u^{(k)} - u^{(m)}\|_0 &\leq \|u^{(k)} - u^{(k-1)}\|_0 + \dots + \|u^{(m+1)} - u^{(m)}\|_0 \\ &= \|\Gamma^{(k-1)} r^{(k)}\|_0 + \dots + \|\Gamma^{(m)} r^{(m+1)}\|_0 \\ &\leq CC_Q \left(\frac{(C_4 t)^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + \frac{(C_4 t)^m}{m!} \right) \\ &\leq CC_Q \frac{(C_4 t)^m}{m!} \left(1 + \frac{C_4 t}{m+1} + \frac{(C_4 t)^2}{(m+1)(m+2)} + \dots + \frac{(C_4 t)^{k-1-m}}{(m+1) \dots (k-1)} \right) \\ &\leq CC_Q \frac{(C_4 t)^m}{m!} \left(1 + \frac{C_4 t}{1!} + \frac{(C_4 t)^2}{2!} + \dots + \frac{(C_4 t)^{k-1-m}}{(k-1-m)!} \right) \\ &\leq CC_Q \frac{(C_4 t)^m}{m!} e^{C_4 t} \end{aligned}$$

Stąd ciąg $\{u^{(s)}\}$ spełnia warunek Cauchy'ego w przestrzeni Banacha $C([0, t_*] \times \mathbb{R})$

$$\max_{t \in [0, t_*]} \|u^{(k)} - u^{(m)}\|_0 \leq CC_Q \frac{(C_4 t_*)^m}{m!} e^{C_4 t_*} \longrightarrow 0, \quad \text{gdy } m \rightarrow +\infty \quad (4.44)$$

4.4.3 Zbieżność jednostajna ciągu $\{\overset{(s)}{p}\}$ na zwartych podzbiorach \mathbb{R}

Lemat 4.4 Ciąg funkcyjny $\{\overset{(s)}{p}\}$ jest jednostajnie zbieżny na zwartych podzbiorach \mathbb{R} dla ustalonego $t \in [0, t_*)$.

Zacznijmy najpierw od wykazania jednakowej ciągłości (względem zmiennej x) funkcji ciągu $\{\overset{(s)}{p}\}$ dla każdego $t \in [0, t_*)$. Pokażemy, że istnieje funkcja $\tilde{M}(\delta)$, $\tilde{M}(\delta) \rightarrow 0$ gdy $\delta \rightarrow 0$ taka, że dla $t \in [0, t_*)$ i dla wszystkich s zachodzi:

$$\left| \overset{(s+1)}{p}(t, x) - \overset{(s+1)}{p}(t, \bar{x}) \right| \leq \tilde{M}(\delta), \quad \text{jeśli } |x - \bar{x}| \leq \delta. \quad (4.45)$$

Zapisujemy układ (4.34) na charakterystykach

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\mathcal{P}_t \overset{(s+1)}{p} \right) &= \mathcal{P}_t \left(\frac{\partial}{\partial x} \overset{(s)}{Z} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \overset{(s)}{L} \right) \Gamma \overset{(s)}{Z} \right) \\ &\quad + \mathcal{P}_t \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \overset{(s)}{L} \right) \Gamma \overset{(s)(s)}{D} \overset{(s)}{p} \right) \\ &\quad + \mathcal{P}_t \left(L_{,t}[\overset{(s)}{u}] \Gamma \overset{(s)(s+1)}{p} \right) \\ &\quad + \mathcal{P}_t \left(L' \left(\overset{(s)}{u}; \Gamma \overset{(s)}{Z} - \Gamma \overset{(s)}{D} \overset{(s)}{p} \right) \Gamma \overset{(s)(s+1)}{p} \right) \\ &\quad - \mathcal{P}_t \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \overset{(s)}{D} \right) \overset{(s+1)}{p} \right). \end{aligned} \quad (4.46)$$

i całkujemy względem t od 0 do \bar{t} :

$$\begin{aligned} \overset{(s+1)}{p}(\bar{t}, \bar{x}) &= \mathcal{P}_0 \overset{(s+1)}{p} \\ &\quad + \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(\frac{\partial}{\partial x} \overset{(s)}{Z} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \overset{(s)}{L} \right) \Gamma \overset{(s)}{Z} \right) dt \\ &\quad + \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \overset{(s)}{L} \right) \Gamma \overset{(s)(s)}{D} \overset{(s)}{p} \right) dt \\ &\quad + \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(L_{,t}[\overset{(s)}{u}] \Gamma \overset{(s)(s+1)}{p} \right) dt \\ &\quad + \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(L' \left(\overset{(s)}{u}; \Gamma \overset{(s)}{Z} - \Gamma \overset{(s)}{D} \overset{(s)}{p} \right) \Gamma \overset{(s)(s+1)}{p} \right) dt \\ &\quad - \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \overset{(s)}{D} \right) \overset{(s+1)}{p} \right) dt. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Naszym następnym krokiem będzie oszacowanie różnicy funkcji podcałkowych wyrażenia (4.47) w punktach (\bar{t}, \bar{x}) , $(\bar{t}, \bar{\bar{x}})$. Dla skrócenia notacji zastosujemy oznaczenie $\bar{\mathcal{P}}_t f$ dla dowolnej funkcji f wzdłuż charakterystyki przechodzącej przez punkt (\bar{t}, \bar{x}) .

Ponieważ $\mathcal{P}_0 \overset{(s+1)}{p}$ jest ciągłą funkcją wektorową zmiennej \bar{x} , więc jest jednostajnie ciągła na dowolnym zbiorze zwartym. Stąd dla $|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| \leq \delta$ istnieje funkcja $N_0(\delta) \rightarrow 0$ gdy $\delta \rightarrow 0$ taka, że

$$\left| \mathcal{P}_0 \overset{(s+1)}{p} - \bar{\mathcal{P}}_0 \overset{(s+1)}{p} \right| \leq N_0(\delta). \quad (4.48)$$

Z warunku (A_4) dla $|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| \leq \delta$ mamy

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x} \binom{(s)}{Z}_k(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \frac{\partial}{\partial x} \binom{(s)}{Z}_k(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| &\leq C \left(\left| \binom{(s)}{u}_{,x}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \binom{(s)}{u}_{,x}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \binom{(s)}{u}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \binom{(s)}{u}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \right) \\ &\quad + N(\delta), \end{aligned}$$

gdzie $N(\delta) \rightarrow 0$ jeśli $\delta \rightarrow 0$. Dlatego

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{P}_t \left(\frac{\partial}{\partial x} \binom{(s)}{Z} \right) - \bar{\mathcal{P}}_t \left(\frac{\partial}{\partial x} \binom{(s)}{Z} \right) \right| &\leq n N(\delta) + nC \max_{k=1, \dots, n} \left(\left| \binom{(s)}{u}_{,x}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \binom{(s)}{u}_{,x}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \binom{(s)}{u}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \binom{(s)}{u}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \right). \quad (4.49) \end{aligned}$$

Lemat 4.5 *Niech K symbolizuje operatory L, D oraz V oznacza $\Gamma Z, \Gamma D$. Istnieje stała $C_5 > 0$ taka, że dla $|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| \leq \delta$ i $s = 0, 1, 2, \dots$ zachodzi*

$$\begin{aligned} &\left| \mathcal{P}_t \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} K[\binom{(s)}{u}] \right) V[\binom{(s)}{u}] \binom{(s)}{p} \right) - \bar{\mathcal{P}}_t \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} K[\binom{(s)}{u}] \right) V[\binom{(s)}{u}] \binom{(s)}{p} \right) \right| \leq \\ &\leq C_5 \left\{ \delta + N(\delta) + \max_{k=1, \dots, n} \left(\left| \binom{(s)}{u}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \binom{(s)}{u}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left| \binom{(s)}{u}_{,x}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \binom{(s)}{u}_{,x}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| + \left| \binom{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \binom{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \right) \right\}. \end{aligned}$$

Dowód. Z (A_1) wynika, że $\left\| \frac{\partial}{\partial x} V[\binom{(s)}{u}] \right\|_0 \leq C^2$. Stąd mamy

$$|V[\binom{(s)}{u}](t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - V[\binom{(s)}{u}](t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}}))| \leq C^2 |x_k(t; \bar{t}, \bar{x}) - x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})|.$$

Podobnie, skoro $\left\| \frac{\partial}{\partial x} L[u] \right\|_0 \leq C$, zatem na mocy twierdzenia o różniczkowalności rozwiązania względem warunku początkowego dla równań różniczkowych zwyczajnych [19]:

$$|x_k(t; \bar{t}, \bar{x}) - x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})| \leq C |\bar{x} - \bar{\bar{x}}|, \quad \text{dla dowolnych } \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in \mathbb{R}.$$

Z założeń (A_1) i (A_4) mamy ($C_6 > 0$)

$$\begin{aligned} &\left| \left(\mathcal{P}_t \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} K[\binom{(s)}{u}] \right) V[\binom{(s)}{u}] \binom{(s)}{p} \right) \right)_k - \left(\bar{\mathcal{P}}_t \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} K[\binom{(s)}{u}] \right) V[\binom{(s)}{u}] \binom{(s)}{p} \right) \right)_k \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial}{\partial x} K_k[\binom{(s)}{u}](t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \frac{\partial}{\partial x} K_k[\binom{(s)}{u}](t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| |V[\binom{(s)}{u}](t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))| \left| \binom{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) \right| \\ &\quad + \left| \frac{\partial}{\partial x} K_k[\binom{(s)}{u}](t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| |V[\binom{(s)}{u}](t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}}))| \left| \binom{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \binom{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \\ &\quad + \left| \frac{\partial}{\partial x} K[\binom{(s)}{u}](t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| |V[\binom{(s)}{u}](t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) - V[\binom{(s)}{u}](t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))| \left| \binom{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \\ &\leq C_6 \left\{ \delta + N(\delta) + \left| \binom{(s)}{u}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \binom{(s)}{u}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \binom{(s)}{u}_{,x}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \binom{(s)}{u}_{,x}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| + \left| \binom{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \binom{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \right\}, \end{aligned}$$

skąd wynika, że

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{P}_t \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} K[u] \right) V[u] \overset{(s)}{p} \right) - \bar{\mathcal{P}}_t \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} K[u] \right) V[u] \overset{(s)}{p} \right) \right| \\ & \leq nC_6 \left\{ \delta + N(\delta) + \left(\max_{k=1, \dots, n} \left| \overset{(s)}{u} (t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s)}{u} (t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left| \overset{(s)}{u}_{,x} (t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s)}{u}_{,x} (t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| + \left| \overset{(s)}{p} (t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s)}{p} (t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \right) \right\}. \end{aligned}$$

□

Na mocy Lematu 4.5 zachodzi

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{P}_t \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \overset{(s)}{L} \right) \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s)}{Z} \right) - \bar{\mathcal{P}}_t \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \overset{(s)}{L} \right) \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s)}{Z} \right) \right| \tag{4.50} \\ & + \left| \mathcal{P}_t \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \overset{(s)}{L} \right) \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s)}{D} \overset{(s)}{p} \right) - \bar{\mathcal{P}}_t \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \overset{(s)}{L} \right) \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s)}{D} \overset{(s)}{p} \right) \right| \\ & + \left| \mathcal{P}_t \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \overset{(s)}{D} \right) \overset{(s+1)}{p} \right) - \bar{\mathcal{P}}_t \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \overset{(s)}{D} \right) \overset{(s+1)}{p} \right) \right| \\ & \leq C_7 \left\{ \delta + N(\delta) + \max_{k=1, \dots, n} \left(\left| \overset{(s)}{u} (t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s)}{u} (t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left| \overset{(s)}{u}_{,x} (t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s)}{u}_{,x} (t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| + \left| \overset{(s)}{p} (t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s)}{p} (t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left| \overset{(s+1)}{p} (t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s+1)}{p} (t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \right) \right\}, \end{aligned}$$

gdzie C_7 jest dodatnią stałą.

Dla ustalonego $t \in [0, t_*)$ i dla x należącego do dowolnego zbioru zwartego, funkcje $L_{,t}[\overset{(s)}{u}]$ i $L'[\overset{(s)}{u}]$ są jednostajnie ciągłe. Stąd dla wszystkich s istnieje funkcja $N_L(\delta) \rightarrow 0$ gdy $\delta \rightarrow 0$ taka, że prawdziwa jest nierówność ($C_8 > 0$):

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{P}_t \left(\left(L_{,t}[\overset{(s)}{u}] + L'(\overset{(s)}{u}; \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s)}{Z} - \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s)}{D} \overset{(s)}{p}) \right) \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s+1)}{p} \right) - \right. \tag{4.51} \\ & \left. - \bar{\mathcal{P}}_t \left(\left(L_{,t}[\overset{(s)}{u}] + L'(\overset{(s)}{u}; \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s)}{Z} - \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s)}{D} \overset{(s)}{p}) \right) \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s+1)}{p} \right) \right| \\ & \leq C_8 \left\{ N_L(\delta) + \max_{k=1, \dots, n} \left(\left| \overset{(s)}{u} (t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s)}{u} (t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left| \overset{(s)}{p} (t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s)}{p} (t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| + \left| \overset{(s+1)}{p} (t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s+1)}{p} (t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \right) \right\}, \end{aligned}$$

Korzystnie będzie zastąpić $\overset{(s)}{u}_{,x}$ przez $\overset{(s)}{p}$ po prawej stronie (4.49) i (4.50). Operator Γ jest ograniczony w kuli $B_r^1(u^0)$ i funkcja $\overset{(s-1)}{\Gamma}$ spełnia warunek Lipschitza względem x . Z tego powodu dla $t \in [0, t_*)$ jest

$$\begin{aligned} & \left| \overset{(s)}{u}_{,x} (t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s)}{u}_{,x} (t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}})) \right| \\ & = \left| \overset{(s-1)}{\Gamma} \overset{(s)}{p} \Big|_{(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))} - \overset{(s-1)}{\Gamma} \overset{(s)}{p} \Big|_{(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{\bar{x}}))} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \Gamma^{(s-1)}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) \right| \left| \overset{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) \right| \\
&\quad + \left| \Gamma^{(s)}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \Gamma^{(s)}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) \right| \left| \overset{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) \right| \\
&\leq C \left(\left| \overset{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) \right| + |x_k(t; \bar{t}, \bar{x}) - x_k(t; \bar{t}, \bar{x})| \right) \\
&\leq C \left| \overset{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) \right| + C^2 |\bar{x} - \bar{x}| \\
&\leq C_9 \left(\left| \overset{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) \right| + \delta \right), \quad k = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

gdzie $C_9 = \max \{C, C^2\}$.

Dla ustalonego t oraz x należącego do dowolnego zbioru zwartego, funkcje $\overset{(s)}{u}$, $s = 0, 1, 2, \dots$ są jednostajnie ciągłe. Stąd dla wszystkich s istnieje funkcja $N_u(\delta) \rightarrow 0$ gdy $\delta \rightarrow 0$ taka, że

$$\max_{k=1, \dots, n} \left| \overset{(s)}{u}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s)}{u}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) \right| \leq N_u(\delta) \quad \text{jeśli} \quad |\bar{x} - \bar{x}| \leq \delta.$$

Podsumowując widzimy, że ciąg $\{\overset{(s)}{p}\}$ spełnia

$$\begin{aligned}
\left| \overset{(s+1)}{p}(\bar{t}, \bar{x}) - \overset{(s+1)}{p}(\bar{t}, \bar{x}) \right| &< N_0(\delta) + C_{10} \left(\int_0^{\bar{t}} (N_u(\delta) + N(\delta) + N_L(\delta) + \delta) dt \right. \\
&\quad + \int_0^{\bar{t}} \max_{k=1, \dots, n} \left| \overset{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) \right| dt \\
&\quad \left. + \int_0^{\bar{t}} \max_{k=1, \dots, n} \left| \overset{(s+1)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(s+1)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) \right| dt \right), \tag{4.52}
\end{aligned}$$

dla $C_{10} = \max \{C_9(nC + C_7) + C_7 + C_8; nC + C_7 + C_8\}$.

Wprowadzimy teraz jeszcze jedną funkcję zdefiniowaną jako

$$M_{s+1}(\bar{t}, \delta) = \max_{\substack{k=1, \dots, n \\ i=0, \dots, s+1}} \sup_{\substack{|\bar{x} - \bar{x}| < \delta \\ t \leq \bar{t}}} \left| \overset{(i)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) - \overset{(i)}{p}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x})) \right|. \tag{4.53}$$

Z (4.52) wynika następująca nierówność

$$M_{s+1}(\bar{t}, \delta) \leq N_0(\delta) + \bar{t} C_{10} (N_u(\delta) + N(\delta) + N_L(\delta) + \delta) + 2C_{10} \int_0^{\bar{t}} M_{s+1}(t, \delta) dt. \tag{4.54}$$

Ostatnim krokiem jest zastosowanie lematu Gronwalla do ostatniego wyrażenia

$$M_{s+1}(\bar{t}, \delta) \leq N_0(\delta) e^{2C_{10}\bar{t}} + \frac{\bar{t}}{2} (N_u(\delta) + N(\delta) + N_L(\delta) + \delta) (e^{2C_{10}\bar{t}} - 1). \tag{4.55}$$

Ponieważ $N_0(\delta), N_u(\delta), N(\delta), N_L(\delta) \rightarrow 0$ gdy $\delta \rightarrow 0$, więc dla $\bar{t} \in [0, t_*]$, $M_{s+1}(\bar{t}, \delta) \rightarrow 0$ jeśli $\delta \rightarrow 0$. W konsekwencji, jako funkcję $\tilde{M}(\delta)$ przyjmujemy

$$\tilde{M}(\delta) = N_0(\delta) e^{2C_{10}t_*} + \frac{t_*}{2} (N_u(\delta) + N(\delta) + N_L(\delta) + \delta) (e^{2C_{10}t_*} - 1). \tag{4.56}$$

Na mocy twierdzenia Arzeli-Ascoliego, z każdego wspólnie ograniczonego i jednakowo ciągłego ciągu funkcji można wybrać podciąg zbieżny jednostajnie, więc pewien podciąg $\{\overset{(s_k)}{p}\}$ zbiega niemal jednostajnie na dowolnym zwartym podzbiorniku \mathbb{R} do ciągłej funkcji $p(t, x)$ dla

ustalonego $t \in [0, t_*)$. Pokazane zostało również, że ciąg $\{u^{(s)}\}$ jest jednostajnie zbieżny do ciągłej funkcji $u(t, x)$. Weźmy zatem podciąg $\{u^{(s_k)}\}$, który oczywiście zbiega jednostajnie do funkcji $u(t, x)$. Ze względu na założenia dla operatora Γ zachodzi nierówność

$$\|\Gamma[u^{(s_k)}] - \Gamma[u]\|_0 \leq C \|u^{(s_k)} - u\|_0.$$

Dlatego dla ustalonego $t \in [0, t_*)$, $\Gamma[u^{(s_k)}]$ zbiega niemal jednostajnie do $\Gamma[u]$ i dlatego również $\Gamma[u^{(s_k)}] p^{(s_k)}$ zbiega niemal jednostajnie do ciągłej funkcji $\Gamma[u] p$. Pamiętajmy, że $u_{,x}^{(s_k)} = \Gamma[u^{(s_k)}] p^{(s_k)}$. Na mocy twierdzenia o różniczkowaniu ciągu funkcyjnego funkcja $u(t, x)$ jest różniczkowalna w sposób ciągły dla $t \in [0, t_*)$ i x z dowolnego domkniętego i ograniczonego przedziału w \mathbb{R} oraz $u_{,x} = \Gamma[u] p$. Pochodna funkcji $u(t, x)$ istnieje, a zatem jest tylko jedna i stąd każdy inny zbieżny niemal jednostajnie podciąg ciągu $\{p^{(s)}\}$ ma granicę $p(t, x)$. Stąd wynika, że ciąg $\{p^{(s)}\}$ ma tylko jeden punkt skupienia.

Przechodząc w układzie (4.30) do granicy przy $s \rightarrow \infty$ zauważamy, że funkcja $u(t, x)$ spełnia zagadnienie (4.3). Ciągłość pochodnej rozwiązania względem zmiennej t wynika z ciągłości prawej strony układu (4.1) i pochodnej $u_{,x}$.

Na mocy Lematu 4.1 funkcja $u(t, x)$ jest jedynym rozwiązaniem klasy $C^1([0, t_*) \times \mathbb{R})$ zagadnienia (4.1) - (4.2).

Rozdział 5

Zagadnienie mieszane dla układu liniowego z nieliniowym warunkiem brzegowym

Celem ostatniego rozdziału jest twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności zagadnienia mieszane-go dla hiperbolicznego układu równań quasi-liniowych z funkcjonalną zależnością współczynni-ków i warunku brzegowego od rozwiązania. Dowód, podobnie jak dla zagadnienia Cauchy'ego, wykorzystuje metodę kolejnych przybliżeń. Kolejne przybliżenia dostajemy rozwiązując liniowe układy równań. Z tego powodu potrzebujemy najpierw twierdzenia o istnieniu rozwiązania za-gadnienia mieszane-go dla liniowego układu równań z nieliniowym warunkiem brzegowym.

Rozważania zaczniemy od prześledzenia w sposób szczegółowy rozwiązania tego problemu dla jednego równania

$$u_{,t} + \xi(t, x) u_{,x} = b(t, x) + B(t, x) u, \quad (5.1)$$

dla którego $\xi(t, x) > 0$ w prostokącie

$$G_{T_0} = [0, T_0] \times [0, l]. \quad (5.2)$$

Warunki początkowe i brzegowe przyjmujemy w postaci:

$$u(0, x) = u^0(x), \quad x \in [0, l], \quad (5.3)$$

$$u(t, 0) = u_b(t) = q \left(t, \int_0^l K(t, y, u(t, y)) dg(y) \right), \quad t \in [0, T_0]. \quad (5.4)$$

Na uwagę zasługuje warunek brzegowy, który jest warunkiem nieliniowym i wyraża zależność funkcji u na brzegu $x = 0$ od czasu t i w sposób funkcjonalny od u . Każdy funkcjonał linio-wy i ciągły na przestrzeni funkcji ciągłych możemy przedstawić jako całkę Stieltjesa względem funkcji o wahaniu skończonym (Twierdzenie 10.18, str. 165, [2]), stąd - ponieważ dopuszczamy funkcjonał nieliniowy - funkcja q może w ogólności zależeć od całki Stieltjesa z funkcji $K(t, y, u(t, y))$. Powodem, dla którego przyjęliśmy (5.4) jest fakt, że podobny warunek założy-my dla układu quasi-liniowego z funkcjonalną zależnością współczynników od rozwiązania. Jak już wspomnieliśmy, dowód w tym przypadku opiera się na twierdzeniu o istnieniu dla układu liniowego.

W zastosowaniach tego typu równanie (czyli liniowe z nieliniowym warunkiem brzegowym) pojawia się w dynamice populacji. Przykładem jest równanie odnowy (Lotka-McKendric equation) [21], które opisuje ewolucję pojedynczej populacji:

$$u_t(t, x) + u_x(t, x) + \mu(x) u(t, x) = 0,$$

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= \int_0^{a_+} \beta(\sigma) u(t, \sigma) d\sigma, \\ u(0, x) &= u^0(x). \end{aligned}$$

Funkcja $u(t, x)$, $x \in [0, a_+]$, $t \geq 0$ jest rozkładem wiekowym populacji w czasie t . a_+ oznacza maksymalny wiek. $B(t) = \int_0^{a_+} \beta(x)u(t, x) dx$ określa całkowitą liczbę urodzeń w jednostce czasu, natomiast $\mu(x)$ jest współczynnikiem śmiertelności osobników, których wiek należy do przedziału $[x, x + dx]$. Równanie ewolucji jest konsekwencją równowagi liczby urodzeń i śmierci w czasie. Można też rozważać więcej populacji, które na siebie oddziałują i wówczas model matematyczny będzie układem równań.

Rozwiązanie równania liniowego (5.1) będzie konstruowane w prostokącie G_{T_0} metodą odwzorowań zwięzających najpierw przy założeniu ciągłości (ξ spełnia dodatkowo warunek Lipschitza ze względu na x), a potem różniczkowalności w sposób ciągły wszystkich współczynników. Dowód dla jednego równania w pełni odzwierciedli wszystkie problemy, które pojawiają się w związku z nieliniowym warunkiem brzegowym.

Następnie udowodnimy istnienie rozwiązania dla układu trzech równań liniowych w inwariantach Riemanna.

Dowód dla układu z dowolną macierzą (niekoniecznie diagonalną) będzie przebiegał analogicznie i dlatego nie będzie prezentowany. Sformułujemy tylko uwagi dotyczące warunków brzegowych.

Ostatnie paragrafy będą poświęcone twierdzeniu o istnieniu rozwiązania zagadnienia mieszanego dla układu quasi-liniowego z funkcjonalną zależnością współczynników i warunku brzegowego od rozwiązania.

5.1 Jedno równanie liniowe

5.1.1 Rozwiązanie uogólnione

Niech $\xi(t, x)$ będzie funkcją ciągłą, spełniającą warunek Lipschitza względem x i przyjmującą tylko wartości dodatnie w każdym punkcie należącym do prostokąta $G_{T_0} = [0, T_0] \times [0, l]$.

Weźmiemy pod uwagę jedno równanie liniowe

$$u_t + \xi(t, x) u_x = b(t, x) + B(t, x) u, \quad (5.5)$$

spełniające warunek początkowy

$$u(0, x) = u^0(x), \quad x \in [0, l], \quad (5.6)$$

oraz ogólny warunek brzegowy w postaci funkcji zależnej od czasu i ciągłego, nieliniowego funkcjonału¹

$$u(t, 0) = u_b(t) = q \left(t, \int_0^l K(t, y, u(t, y)) dg(y) \right), \quad t \in [0, T_0]. \quad (5.7)$$

Charakterystyki startują z osi OX lub wchodzą przez brzeg prostokąta G_{T_0} . Zatem aby dostać rozwiązanie w całym prostokącie wartości funkcji muszą być zadane dla $t = 0$ i na brzegu $x = 0$.

Jeśli współczynniki równania oraz warunek początkowy i brzegowy są klasy C^1 to klasycznym rozwiązaniem nazwiemy funkcję różniczkowalną w sposób ciągły i spełniającą równanie oraz zadane warunki. Przechodząc do całkowitej postaci zagadnienia można jednak zdefiniować

¹Zarówno warunek (5.6), jak i funkcjonal (5.7) mogą być - bez większych problemów - rozpatrywane na \mathbb{R} . Ograniczenie do przedziału $[0, l]$ powoduje uproszczenia techniczne.

pojęcie rozwiązania ciągłego (dla słabszych założeń o współczynnikach i warunkach). Równanie całkowe otrzymamy po scałkowaniu równania wzdłuż charakterystyki.

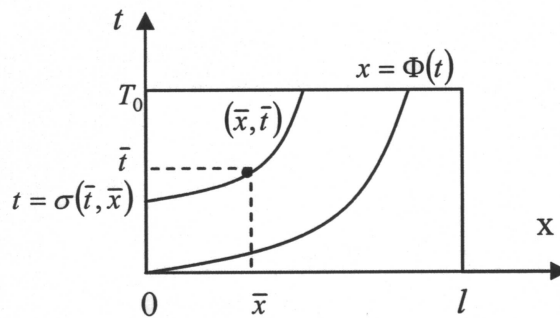
Wyróżnimy charakterystykę startującą z punktu $(0, 0)$. Niech

$$x = \Phi(t),$$

będzie rozwiązaniem zagadnienia

$$\frac{dx}{dt} = \xi(t, x), \quad \Phi(0) = 0.$$

Charakterystyka $x = X(t; \bar{t}, \bar{x})$ jest funkcją różniczkowalną w sposób ciągły względem t oraz $\frac{dX}{dt} = \xi > 0$ w G_{T_0} . Dlatego z równania $0 = X(t; \bar{t}, \bar{x})$ można, korzystając z twierdzenia o funkcji uwikłanej, wyznaczyć jednoznacznie t jako funkcję $t = \sigma(\bar{t}, \bar{x})$. Jest to czas, dla którego charakterystyka przechodząca przez punkt (\bar{t}, \bar{x}) taki, że $\bar{x} < \Phi(\bar{t})$, przecina brzeg $x = 0$. (Rys. 5.1) Funkcja σ jest ciągła w G_{T_0} oraz $X(\sigma(\bar{t}, \bar{x}); \bar{t}, \bar{x}) = 0$, $\sigma(\bar{t}, 0) = \bar{t}$.

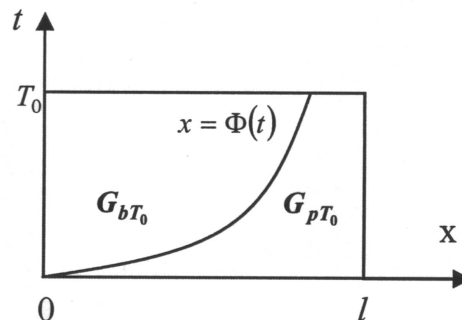


Rys. 5.1

Zauważmy, że charakterystyka $x = \Phi(t)$ dzieli prostokąt G_{T_0} na dwie części, w których rozwiązanie przedstawione jest w odmienny sposób. Oznaczmy zatem zbiory

$$G_{pT_0} = \{(t, x) \in G_{T_0} : x \geq \Phi(t)\},$$

$$G_{bT_0} = \{(t, x) \in G_{T_0} : x \leq \Phi(t)\}.$$



Rys. 5.2: Zbiory G_{pT_0} i G_{bT_0}

Przecięcie zbiorów G_{pT_0} i G_{bT_0} nie jest puste: $G_{pT_0} \cap G_{bT_0} = \{(t, x) \in G_{T_0} : x = \Phi(t)\}$. Mimo tego wygodnie jest jednak zdefiniować je w ten sposób, ponieważ dla zbiorów zwartych w naturalny sposób zachodzą twierdzenia o przejściu do granicy pod znakiem całki i różniczkowaniu pod znakiem całki.

Całkując wzdłuż charakterystyki równanie (5.5) i uwzględniając odpowiednio warunek początkowy i brzegowy, otrzymujemy:

1) dla punktów $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{pT_0}$

$$u(\bar{t}, \bar{x}) = u^0(X(0; \bar{t}, \bar{x})) + \int_0^{\bar{t}} b(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) dt + \int_0^{\bar{t}} B(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) u(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) dt, \quad (5.8)$$

2) natomiast dla $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{bT_0}$

$$u(\bar{t}, \bar{x}) = q \left(\sigma, \int_0^l K(\sigma, y, u(\sigma, y)) dg(y) \right) + \int_\sigma^{\bar{t}} b(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) dt + \int_\sigma^{\bar{t}} B(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) u(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) dt, \quad (5.9)$$

gdzie - przypomnijmy - $\sigma(\bar{t}, \bar{x})$ jest czasem, dla którego charakterystyka przechodząca przez punkt (\bar{t}, \bar{x}) taki, że $\bar{x} < \Phi(\bar{t})$, przecina brzeg $x = 0$.

Zauważmy, że funkcja u rozumiana jako rozwiązanie równań (5.8)-(5.9) w całym zbiorze G_{T_0} , nie jest na ogół ciągła. Nieciągłość może pojawić się w punktach należących do charakterystyki $x = \Phi(t)$. Jeśli jednak spełniony zostanie tzw. pierwszy warunek zgodności: $u_b(0) = u^0(0)$, to rozwiązanie będzie ciągłe.

Zmienna całkowania w całce Stieltjesa w warunku brzegowym w (5.9) przebiega przedział $[0, l]$. Możemy przedstawić ją jako sumę całek po przedziałach $[0, \Phi(\sigma)]$ oraz $[\Phi(\sigma), l]$ wyróżniając (ze względu na różnice postaci rozwiązania w obszarach G_{pT_0} i G_{bT_0}) punkt należący do krzywej $x = \Phi(t)$.

Przedstawimy funkcję u w postaci

$$u(\bar{t}, \bar{x}) = \begin{cases} v(\bar{t}, \bar{x}), & (\bar{t}, \bar{x}) \in G_{pT_0} \\ w(\bar{t}, \bar{x}), & (\bar{t}, \bar{x}) \in G_{bT_0} \setminus \{(\bar{t}, \bar{x}) : \bar{x} = \Phi(\bar{t})\} \end{cases}$$

i zamiast u będziemy poszukiwali dwóch funkcji ciągłych v i w ,

$$v : G_{pT_0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad w : G_{bT_0} \rightarrow \mathbb{R},$$

będących rozwiązaniami poniższych równań całkowych:

1) dla $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{pT_0}$

$$v(\bar{t}, \bar{x}) = u^0(X(0; \bar{t}, \bar{x})) + \int_0^{\bar{t}} b(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) dt + \int_0^{\bar{t}} B(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) v(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) dt, \quad (5.10)$$

2) dla $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{bT_0}$

$$w(\bar{t}, \bar{x}) = q \left(\sigma, \int_0^{\Phi(\sigma)} K(\sigma, y, w(\sigma, y)) dg(y) + \int_{\Phi(\sigma)}^l K(\sigma, y, v(\sigma, y)) dg(y) \right) + \int_\sigma^{\bar{t}} b(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) dt + \int_\sigma^{\bar{t}} B(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) w(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) dt. \quad (5.11)$$

Łatwo sprawdzić, że dla $\bar{t} = 0$ funkcja v spełnia warunek początkowy:

$$v(0, \bar{x}) = u^0(X(0; 0, \bar{x})) = u^0(\bar{x}),$$

natomiast jeśli $\bar{x} = 0$, to $\sigma(\bar{t}, \bar{x}) = \bar{t}$ oraz funkcja w spełnia warunek brzegowy:

$$w(\bar{t}, 0) = q \left(\bar{t}, \int_0^{\Phi(\bar{t})} K(\bar{t}, y, w(\bar{t}, y)) dg(y) + \int_{\Phi(\bar{t})}^l K(\bar{t}, y, v(\bar{t}, y)) dg(y) \right).$$

W tym paragrafie wykażemy słuszność twierdzenia o istnieniu ciągłego rozwiązania równania (5.5) przy warunkach (5.6), (5.7).

Twierdzenie 5.1 *Załóżmy, że*

1. funkcje $\xi, b, B \in C(G_{T_0})$,
2. $\xi(t, x) > 0$ dla $(t, x) \in G_{T_0}$,
3. funkcja ξ spełnia warunek Lipschitza ze względu na zmienną x ,
4. $u^0 \in C([0, l])$,
5. funkcja g ma wahanie skończone na odcinku $[0, l]$ oraz jest prawostronnie ciągła w zerze,
6. $q(t, x) \in C([0, T_0] \times \mathbb{R})$ i spełnia warunek Lipschitza (ze stałą C_L) ze względu na zmienną x ,
7. $K(t, x, u) \in C(G_{T_0} \times \mathbb{R})$ oraz spełnia warunek Lipschitza² (ze stałą C_L) ze względu na trzecią zmienną, tzn.

$$\forall_{u, \tilde{u} \in \mathbb{R}} |K(t, x, u) - K(t, x, \tilde{u})| \leq C_L |u - \tilde{u}|$$

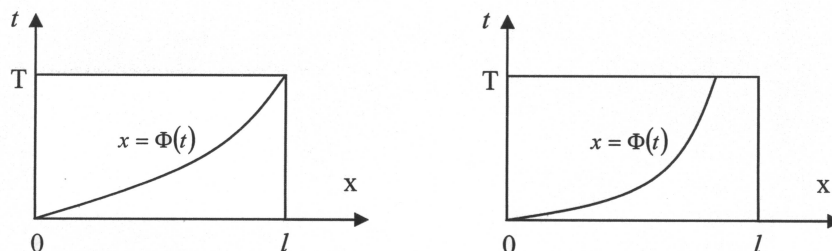
8. zachodzi pierwszy warunek zgodności: $u_b(0) = u^0(0)$.

Wtedy zagadnienie (5.5)-(5.7) ma w prostokącie G_{T_0} jednoznaczne ciągłe rozwiązanie.

Dowód. Niech

$$G_T = [0, T] \times [0, l],$$

oraz $T \in (0, T_0]$, przy czym jest również tak dobrane, że w ciągu czasu T charakterystyka $x = \Phi(t)$ nie przemierzy pasa $0 \leq x \leq l$ od jednego brzegu do drugiego.³



Rys. 5.3: Charakterystyka $x = \Phi(t)$ określona dla $t \in [0, T]$

²Stale z założeń 6 i 7 są na ogół różne. Dla uproszczenia przyjmujemy, że C_L oznacza większą ze stałych Lipschitza dla funkcji q i K .

³Charakterystyka $x = \Phi(t)$ jest zatem określona dla wszystkich $t \in [0, T]$ i $\Phi(t) \leq l$. To założenie nie jest szczególnie istotne. Zostało zrobione jedynie w celu uproszczenia notacji.

Udowodnimy istnienie rozwiązań w zbiorach G_{pT} i G_{bT} , gdzie

$$\begin{aligned} G_{pT} &= \{(t, x) \in G_T : x \geq \Phi(t)\}, \\ G_{bT} &= \{(t, x) \in G_T : x \leq \Phi(t)\}. \end{aligned}$$

Definiujemy odwzorowanie

$$\mathcal{Q} : C(G_{pT}) \times C(G_{bT}) \ni (v, w) \rightarrow (V, W) \in C(G_{pT}) \times C(G_{bT})$$

wyrażone następująco:⁴

1) dla $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{pT}$

$$V(\bar{t}, \bar{x}) = u^0(X(0; \bar{t}, \bar{x})) + \int_0^{\bar{t}} b(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) dt + \int_0^{\bar{t}} B(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) v(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) dt, \quad (5.12)$$

2) dla $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{bT}$

$$\begin{aligned} W(\bar{t}, \bar{x}) &= q \left(\sigma, \int_0^{\Phi(\sigma)} K(\sigma, y, w(\sigma, y)) dg(y) + \int_{\Phi(\sigma)}^l K(\sigma, y, V(\sigma, y)) dg(y) \right) \\ &\quad + \int_\sigma^{\bar{t}} b(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) dt + \int_\sigma^{\bar{t}} B(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) w(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) dt. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Ciągłość V w G_{pT} jest konsekwencją założeń 1) - 2), ciągłości funkcji v i zwartości zbioru G_{pT} . Ciągłość całki Stieltjesa jako funkcji parametrów (\bar{t}, \bar{x}) rozstrzyga poniższy

Lemat 5.1 *Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest określona i ciągła jako funkcja dwóch zmiennych w prostokącie $[a, b] \times [c, d]$ oraz funkcja $g(y)$ ma wahanie skończone na odcinku $[c, d]$, to całka*

$$J(x) = \int_c^d f(x, y) dg(y)$$

jest funkcją ciągłą parametru w przedziale $[a, b]$.

Dowód. Wobec jednostajnej ciągłości funkcji f , można dla dowolnego $\varepsilon > 0$ znaleźć takie $\delta > 0$, że dla dowolnych $(\bar{x}, \bar{y}), (\bar{x}, \bar{y}) \in [a, b] \times [c, d]$ z nierówności

$$|\bar{x} - \bar{x}| < \delta, \quad |\bar{y} - \bar{y}| < \delta,$$

wynika nierówność

$$|f(\bar{x}, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})| < \varepsilon.$$

Weźmy w szczególności $\bar{x} = x_0, \bar{x} = x$ oraz $\bar{y} = \bar{y} = y$. Dla $|x - x_0| < \delta$ i dla dowolnego $y \in [c, d]$ jest

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon.$$

⁴Gdyby nie było założenia, że charakterystyka $x = \Phi(t)$ nie przecina brzegu $x = l$ w czasie T , to w definicji funkcji W należałoby przyjąć: $\int_0^{\Phi^*(\sigma)} K(\sigma, y, w(\sigma, y)) dg(y) + \int_{\Phi^*(\sigma)}^l K(\sigma, y, V(\sigma, y)) dg(y)$, gdzie

$$\Phi^*(\sigma) = \begin{cases} \Phi(\sigma), & \text{jeśli } \Phi^{-1}(l) > T \\ T, & \text{jeśli } \Phi^{-1}(l) \leq T \end{cases}$$

Stąd i z własności całki Stieltjesa ⁵ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \int_c^d f(x, y) dg(y) - \int_c^d f(x_0, y) dg(y) \right| &= \left| \int_c^d (f(x, y) - f(x_0, y)) dg(y) \right| \\ &\leq \mathcal{V}_c^d(g) \cdot \max_{y \in [c, d]} |f(x, y) - f(x_0, y)| < \mathcal{V}_c^d(g) \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{V}_c^d(g)$ oznacza wahanie funkcji g na odcinku $[c, d]$.

To dowodzi równości

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_c^d f(x, y) dg(y) = \int_c^d f(x_0, y) dg(y),$$

czyli

$$\lim_{x \rightarrow x_0} J(x) = J(x_0).$$

□

Z ciągłości V i w oraz Lematu 5.1 wynika, że W jest funkcją ciągłą w G_{bT} .

Odnotujemy teraz fakt dotyczący ciągłości odwzorowania \mathcal{Q} .

Lemat 5.2 *Jeśli zachodzi pierwszy warunek zgodności oraz $v(t, \Phi(t)) = w(t, \Phi(t))$ dla $t \in [0, T]$, to odwzorowanie \mathcal{Q} jest ciągłe w G_T .*

Dowód. Rzeczywiście, mamy bowiem

$$\begin{aligned} V(\bar{t}, \Phi(\bar{t})) &= u^0(0) \\ &+ \int_0^{\bar{t}} b(t, X(t; \bar{t}, \Phi(\bar{t}))) dt + \int_0^{\bar{t}} B(t, X(t; \bar{t}, \Phi(\bar{t}))) v(t, X(t; \bar{t}, \Phi(\bar{t}))) dt \\ &= u^0(0) + \int_0^{\bar{t}} b(t, \Phi(t)) dt + \int_0^{\bar{t}} B(t, \Phi(t)) v(t, \Phi(t)) dt, \end{aligned} \tag{5.14}$$

ponieważ $X(0; \bar{t}, \Phi(\bar{t})) = 0$, $X(t; \bar{t}, \Phi(\bar{t})) = \Phi(t)$.

$$\begin{aligned} W(\bar{t}, \Phi(\bar{t})) &= q \left(0, \int_0^l K(0, y, V(0, y)) dg(y) \right) \\ &+ \int_0^{\bar{t}} b(t, X(t; \bar{t}, \Phi(\bar{t}))) dt + \int_0^{\bar{t}} B(t, X(t; \bar{t}, \Phi(\bar{t}))) w(t, X(t; \bar{t}, \Phi(\bar{t}))) dt \\ &= q \left(0, \int_0^l K(0, y, V(0, y)) dg(y) \right) + \int_0^{\bar{t}} b(t, \Phi(t)) dt + \int_0^{\bar{t}} B(t, \Phi(t)) w(t, \Phi(t)) dt, \end{aligned}$$

gdyż dla charakterystyki startującej z punktu $(0, 0)$: $\sigma = 0$ i $\Phi(\sigma) = 0$.

Wyznaczając wielkość $V(0, y)$ z (5.12):

$$V(0, y) = u^0(X(0; 0, y)) = u^0(y),$$

możemy przedstawić $W(\bar{t}, \Phi(\bar{t}))$ w postaci

$$\begin{aligned} W(\bar{t}, \Phi(\bar{t})) &= q \left(0, \int_0^l K(0, y, u^0(y)) dg(y) \right) \\ &+ \int_0^{\bar{t}} b(t, \Phi(t)) dt + \int_0^{\bar{t}} B(t, \Phi(t)) w(t, \Phi(t)) dt, \end{aligned} \tag{5.15}$$

⁵Twierdzenie 1, str. 34, [26]: Jeżeli f jest całkowna w $[a, b]$ względem g i $|f(x)| \leq M$, to w $[a, b]$: $\left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq M \cdot \mathcal{V}_a^b(g)$.

Porównując (5.14) i (5.15) widzimy, że $V(\bar{t}, \Phi(\bar{t})) = W(\bar{t}, \Phi(\bar{t}))$ dla wszystkich $\bar{t} \geq 0$. \square

W dalszym ciągu wykażemy, że dla odpowiednio małego T odwzorowanie \mathcal{Q} jest kontrakcją. Niech $(v, w), (\tilde{v}, \tilde{w})$ będą dwiema dowolnymi parami funkcji z iloczynu kartezjańskiego przestrzeni $C(G_{pT}) \times C(G_{bT})$ z normą

$$\|(v, w)\| = \max\left\{ \sup_{(t,x) \in G_{pT}} |v|; \sup_{(t,x) \in G_{bT}} |w| \right\}. \quad (5.16)$$

Dla $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{pT}$ mamy

$$\begin{aligned} |V(\bar{t}, \bar{x}) - \tilde{V}(\bar{t}, \bar{x})| &= \left| \int_0^{\bar{t}} B(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) (v(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) - \tilde{v}(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))) dt \right| \\ &\leq T C_B \sup_{(t,x) \in G_{pT}} |v(t, x) - \tilde{v}(t, x)|, \end{aligned}$$

gdzie $C_B = \sup_{(t,x) \in G_{T_0}} |B(t, x)|$.

Stąd

$$\sup_{(t,x) \in G_{pT}} |V(t, x) - \tilde{V}(t, x)| \leq T C_B \sup_{(t,x) \in G_{pT}} |v(t, x) - \tilde{v}(t, x)|. \quad (5.17)$$

Natomiast dla $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{bT}$

$$\begin{aligned} |W(\bar{t}, \bar{x}) - \tilde{W}(\bar{t}, \bar{x})| &\leq C_L \left| \int_0^{\Phi(\sigma)} (K(\sigma, y, w(\sigma, y)) - K(\sigma, y, \tilde{w}(\sigma, y))) dg(y) \right| \\ &\quad + C_L \left| \int_{\Phi(\sigma)}^{\bar{t}} (K(\sigma, y, V(\sigma, y)) - K(\sigma, y, \tilde{V}(\sigma, y))) dg(y) \right| \\ &\quad + \int_{\sigma}^{\bar{t}} |B(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))| |w(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) - \tilde{w}(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))| dt \\ &\leq C_L \mathcal{V}_0^{\Phi(\sigma)}(g) \sup_{y \in [0, \Phi(\sigma)]} |K(\sigma, y, w(\sigma, y)) - K(\sigma, y, \tilde{w}(\sigma, y))| \\ &\quad + C_L \mathcal{V}_{\Phi(\sigma)}^l(g) \sup_{y \in [\Phi(\sigma), \bar{t}]} |K(\sigma, y, V(\sigma, y)) - K(\sigma, y, \tilde{V}(\sigma, y))| \\ &\quad + (\bar{t} - \sigma) C_B \sup_{t \in [\sigma, \bar{t}]} |w(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) - \tilde{w}(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))| \\ &\leq \mathcal{V}_0^{\Phi(T)}(g) C_L^2 \sup_{(t,x) \in G_{bT}} |w(t, x) - \tilde{w}(t, x)| \\ &\quad + \mathcal{V}_0^l(g) C_L^2 \sup_{(t,x) \in G_{pT}} |V(t, x) - \tilde{V}(t, x)| \\ &\quad + T C_B \sup_{(t,x) \in G_{bT}} |w(t, x) - \tilde{w}(t, x)|. \end{aligned}$$

Korzystając z nierówności (5.17) eliminujemy $\sup_{(t,x) \in G_{pT}} |V(t, x) - \tilde{V}(t, x)|$:

$$\begin{aligned} \sup_{(t,x) \in G_{bT}} |W(t, x) - \tilde{W}(t, x)| &\leq \\ &\leq \left(\mathcal{V}_0^{\Phi(T)}(g) C_L^2 + T C_B \right) \sup_{(t,x) \in G_{bT}} |w(t, x) - \tilde{w}(t, x)| \\ &\quad + T \mathcal{V}_0^l(g) C_L^2 C_B \sup_{(t,x) \in G_{pT}} |v(t, x) - \tilde{v}(t, x)|. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ostatecznie dzięki (5.17) i (5.18) otrzymujemy oszacowanie normy różnicy odwzorowania \mathcal{Q} w dwóch różnych punktach

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}(v, w) - \mathcal{Q}(\tilde{v}, \tilde{w})\| &= \|(V, W) - (\tilde{V}, \tilde{W})\| = \max \left\{ \sup_{(t,x) \in G_{pT}} |V - \tilde{V}|; \sup_{(t,x) \in G_{bT}} |W - \tilde{W}| \right\} \\ &\leq \max \left\{ \mathcal{V}_0^{\Phi(T)}(g) C_L^2 + T C_B; T \mathcal{V}_0^l(g) C_L^2 C_B \right\} \times \\ &\quad \times \max \left\{ \sup_{(t,x) \in G_{pT}} |v - \tilde{v}|; \sup_{(t,x) \in G_{bT}} |w - \tilde{w}| \right\} \\ &= \max \left\{ \mathcal{V}_0^{\Phi(T)}(g) C_L^2 + T C_B; T \mathcal{V}_0^l(g) C_L^2 C_B \right\} \|(v, w) - (\tilde{v}, \tilde{w})\| \end{aligned} \quad (5.19)$$

Ze względu na prawostronną ciągłość funkcji g w zerze ⁶, zachodzi

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} \mathcal{V}_0^{\Phi(T)}(g) = 0.$$

Dlatego dla odpowiednio małego $T = T^*$, $T^* > 0$, zachodzi nierówność

$$\max \left\{ \mathcal{V}_0^{\Phi(T^*)}(g) C_L^2 + T^* C_B; T^* \mathcal{V}_0^l(g) C_L^2 C_B \right\} < 1, \quad (5.20)$$

co oznacza, że \mathcal{Q} jest kontrakcją. Na mocy zasady Banacha w zbiorze $[0, T^*] \times [0, l]$ istnieje jednoznaczne rozwiązanie równań (5.10)-(5.11).

Pierwszy warunek zgodności gwarantuje ciągłość funkcji u na charakterystyce $x = \Phi(t)$. Mamy bowiem dla $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{pT}$:

$$\lim_{(\bar{t}, \bar{x}) \rightarrow (\eta, \Phi(\eta))} v(\bar{t}, \bar{x}) = v(\eta, \Phi(\eta)) = u^0(0) + \int_0^\eta b(t, \Phi(t)) dt + \int_0^\eta B(t, \Phi(t)) v(t, \Phi(t)) dt.$$

Natomiast dla $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{bT}$ zachodzi

$$\begin{aligned} \lim_{(\bar{t}, \bar{x}) \rightarrow (\eta, \Phi(\eta))} w(\bar{t}, \bar{x}) = w(\eta, \Phi(\eta)) &= q \left(0, \int_0^l K(0, y, v(0, y)) dg(y) \right) \\ &\quad + \int_0^\eta b(t, \Phi(t)) dt + \int_0^\eta B(t, \Phi(t)) w(t, \Phi(t)) dt \\ &= q \left(0, \int_0^l K(0, y, u^0(y)) dg(y) \right) \\ &\quad + \int_0^\eta b(t, \Phi(t)) dt + \int_0^\eta B(t, \Phi(t)) w(t, \Phi(t)) dt, \end{aligned}$$

gdź $\sigma(\eta, \Phi(\eta)) = 0$ i oczywiście $\Phi(\sigma) = 0$.

Dlatego ze względu na pierwszy warunek zgodności, dochodzimy do następującej nierówności

$$|v(\eta, \Phi(\eta)) - w(\eta, \Phi(\eta))| \leq C_B \int_0^\eta |v(t, \Phi(t)) - w(t, \Phi(t))| dt,$$

dzięki której, na mocy lematu Gronwalla, wnioskujemy, że $v(\eta, \Phi(\eta)) = w(\eta, \Phi(\eta))$ dla $\eta \in [0, T^*]$. Uzasadniona powyżej ciągłość funkcji u na krzywej $x = \Phi(t)$ oznacza, że $u \in C([0, T^*] \times [0, l])$.

Następnie można przyjąć T^* jako czas początkowy i pokazać istnienie rozwiązań w następnym prostokącie. Zauważmy, że dla drugiego prostokąta (i oczywiście dalszych) jest już natychmiast spełniony pierwszy warunek zgodności ⁷. Stałe C_L , C_B , $\mathcal{V}_0^l(g)$ są wyznaczone dla maksymalnego czasu T_0 co oznacza, że rozwiązanie można przedłużyć na cały zbiór G_{T_0} .

⁶Twierdzenie 4, str. 23, [26]: Jeżeli f jest funkcją o wahanu skończonym w $[a, b]$, ciągłą prawostronnie (lewostronnie) w x_0 , to wahanie $x \rightarrow \mathcal{V}_a^{x_0}(f)$ jest funkcją ciągłą prawostronnie (lewostronnie) w x_0 .

⁷Pierwszy warunek zgodności dotyczy czasu $t = 0$, natomiast w drugim prostokącie za czas początkowy przyjmujemy $t = T^*$.

5.1.2 Rozwiązanie klasy C^1

Przejdziemy teraz do wykazania twierdzenia o istnieniu rozwiązania różniczkowalnego.

Twierdzenie 5.2 *Załóżmy, że współczynniki równania (5.5) oraz warunki - początkowy (5.6) i brzegowy (5.7) spełniają następujące założenia:*

1. $\xi, b, B \in C^1(G_{T_0})$,
2. $\xi(t, x) > 0$ dla $(t, x) \in G_{T_0}$,
3. $u^0, g \in C^1([0, l])$,
4. $q(t, y) \in C^1([0, T_0] \times \mathbb{R})$ i jest ograniczona wraz z pochodnymi,
5. zachodzi pierwszy warunek zgodności: $u_b(0) = u^0(0)$,
6. zachodzi drugi warunek zgodności: $u_{b,t}(0) + \xi(0, 0) u_{,x}^0(0) = b(0, 0) + B(0, 0) u^0(0)$,
7. $K(t, x, u) \in C^1(G_{T_0} \times \mathbb{R})$ i jest ograniczona wraz z pochodnymi,
8. pochodne $K_{,t}, K_{,u}$ spełniają warunek Lipschitza (ze stałą C_{L2}) ze względu na trzecią zmienną, tzn.

$$\forall u, \tilde{u} \in \mathbb{R} \quad |K_{,t}(t, x, u) - K_{,t}(t, x, \tilde{u})| \leq C_{L2}|u - \tilde{u}|,$$

$$\forall u, \tilde{u} \in \mathbb{R} \quad |K_{,u}(t, x, u) - K_{,u}(t, x, \tilde{u})| \leq C_{L2}|u - \tilde{u}|.$$

Wówczas zagadnienie (5.5) - (5.7) posiada jednoznaczne rozwiązanie klasy $C^1(G_{T_0})$.

Dowód. W Twierdzeniu 5.2 przyjęliśmy, że $g \in C^1([0, l])$ ze względu na konieczność różniczkowania całek Stieltjesa ze zmienną granicą całkowania, które pojawiają się w dowodzie.

Podobnie jak dla Twierdzenia 5.1, skorzystamy z zasady Banacha. Niech \mathcal{Q} będzie odwzorowaniem, które parę funkcji (v, w) z przestrzeni $C^1(G_{pT}) \times C^1(G_{bT})$ z normą

$$\|(v, w)\| = \max\left\{ \sup_{(t,x) \in G_{pT}} |v|; \sup_{(t,x) \in G_{bT}} |w|; \sup_{(t,x) \in G_{pT}} |v_{,t}|; \sup_{(t,x) \in G_{bT}} |w_{,t}|; \sup_{(t,x) \in G_{pT}} |v_{,x}|; \sup_{(t,x) \in G_{bT}} |w_{,x}| \right\}.$$

przekształca w parę $(V, W) \in C^1(G_{pT}) \times C^1(G_{bT})$, gdzie

$$\begin{aligned} V(\bar{t}, \bar{x}) &= u^0(X(0; \bar{t}, \bar{x})) \\ &+ \int_0^{\bar{t}} b(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) dt + \int_0^{\bar{t}} B(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) v(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) dt, \quad (\bar{t}, \bar{x}) \in G_{pT} \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} W(\bar{t}, \bar{x}) &= q\left(\sigma, \int_0^{\Phi(\sigma)} K(\sigma, y, w(\sigma, y)) dg(y) + \int_{\Phi(\sigma)}^l K(\sigma, y, V(\sigma, y)) dg(y)\right) \\ &+ \int_\sigma^{\bar{t}} b(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) dt + \int_\sigma^{\bar{t}} B(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) w(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) dt, \quad (\bar{t}, \bar{x}) \in G_{bT}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Pokażemy, że dla pewnego $T \in (0, T_0]$ odwzorowanie \mathcal{Q} jest zwężające.

Wyznamy najpierw pochodne cząstkowe $\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial t}, \frac{\partial W}{\partial x}$.

Zauważmy, że skoro $\xi \in C^1(G_{T_0})$, więc charakterystyka $x = X(t; \bar{t}, \bar{x})$ jest funkcją różniczkowalną w sposób ciągły względem (t, \bar{t}, \bar{x}) (Twierdzenie 3.1, [19]). Z równania $0 = X(t; \bar{t}, \bar{x})$, na

mocy twierdzenia o funkcji uwikłanej, można ($X_{,t} = \xi > 0$ w G_{T_0}) wyznaczyć jednoznacznie t w postaci funkcji $t = \sigma(\bar{t}, \bar{x})$, przy czym σ jest klasy C^1 .

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} &= \frac{du^0(X(0; \bar{t}, \bar{x}))}{dx} \frac{\partial X(0; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} \\ &+ \int_0^{\bar{t}} \frac{\partial b(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial X(t; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} dt + b(\bar{t}, \bar{x}) \\ &+ \int_0^{\bar{t}} \frac{\partial B(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial X(t; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} v(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) dt \\ &+ \int_0^{\bar{t}} B(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) \frac{\partial v(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial X(t; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} dt \\ &+ B(\bar{t}, \bar{x}) v(\bar{t}, \bar{x}) \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} &= \frac{du^0(X(0; \bar{t}, \bar{x}))}{dx} \frac{\partial X(0; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \\ &+ \int_0^{\bar{t}} \frac{\partial b(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial X(t; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} dt \\ &+ \int_0^{\bar{t}} \frac{\partial B(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial X(t; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} v(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) dt \\ &+ \int_0^{\bar{t}} B(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) \frac{\partial v(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial X(t; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} dt \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} &= \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{t}} + \\ &+ \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{t}} \left[\int_0^{\Phi(\sigma)} \frac{\partial K(\sigma, y, w(\sigma, y))}{\partial t} dg(y) \right. \\ &+ \int_0^{\Phi(\sigma)} \frac{\partial K(\sigma, y, w(\sigma, y))}{\partial u} \frac{\partial w(\sigma, y)}{\partial t} dg(y) \\ &+ K(\sigma, \Phi(\sigma), w(\sigma, \Phi(\sigma))) \frac{dg}{dy} \Big|_{y=\Phi(\sigma)} \xi(\sigma, \Phi(\sigma)) \\ &+ \int_{\Phi(\sigma)}^l \frac{\partial K(\sigma, y, V(\sigma, y))}{\partial t} dg(y) \\ &+ \int_{\Phi(\sigma)}^l \frac{\partial K(\sigma, y, V(\sigma, y))}{\partial u} \frac{\partial V(\sigma, y)}{\partial t} dg(y) \\ &\left. - K(\sigma, \Phi(\sigma), V(\sigma, \Phi(\sigma))) \frac{dg}{dy} \Big|_{y=\Phi(\sigma)} \xi(\sigma, \Phi(\sigma)) \right] \\ &+ \int_{\sigma}^{\bar{t}} \frac{\partial b(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial X(t; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} dt + b(\bar{t}, \bar{x}) - b(\sigma, 0) \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{t}} \\ &+ \int_{\sigma}^{\bar{t}} \frac{\partial B(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial X(t; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} w(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) dt \\ &+ \int_{\sigma}^{\bar{t}} B(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) \frac{\partial w(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial X(t; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} dt \\ &+ B(\bar{t}, \bar{x}) w(\bar{t}, \bar{x}) - B(\sigma, 0) w(\sigma, 0) \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{t}} \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial W(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{x}} + \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{x}} \left[\int_0^{\Phi(\sigma)} \frac{\partial K(\sigma, y, w(\sigma, y))}{\partial t} dg(y) \right. \\
& + \int_0^{\Phi(\sigma)} \frac{\partial K(\sigma, y, w(\sigma, y))}{\partial u} \frac{\partial w(\sigma, y)}{\partial t} dg(y) \\
& + K(\sigma, \Phi(\sigma), w(\sigma, \Phi(\sigma))) \left. \frac{dg}{dy} \Big|_{y=\Phi(\sigma)} \xi(\sigma, \Phi(\sigma)) \right. \\
& + \int_{\Phi(\sigma)}^l \frac{\partial K(\sigma, y, V(\sigma, y))}{\partial t} dg(y) \\
& + \int_{\Phi(\sigma)}^l \frac{\partial K(\sigma, y, V(\sigma, y))}{\partial u} \frac{\partial V(\sigma, y)}{\partial t} dg(y) \\
& \left. - K(\sigma, \Phi(\sigma), V(\sigma, \Phi(\sigma))) \frac{dg}{dy} \Big|_{y=\Phi(\sigma)} \xi(\sigma, \Phi(\sigma)) \right] \\
& + \int_{\sigma}^{\bar{t}} \frac{\partial b(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial X(t; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} dt - b(\sigma, 0) \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{x}} \\
& + \int_{\sigma}^{\bar{t}} \frac{\partial B(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial X(t; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} w(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) dt \\
& + \int_{\sigma}^{\bar{t}} B(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) \frac{\partial w(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial X(t; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} dt \\
& - B(\sigma, 0) w(\sigma, 0) \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{x}}.
\end{aligned}$$

Wzory (5.23)-(5.26) są rozbudowane, dlatego w szacowaniach wygodnie będzie używać jednej stałej. Niech C_L, C_{L2} - stałe Lipschitza dla funkcji K i q (założenie 6 Twierdzenia 5.1) i jej pochodnych (założenia 4 i 8 Twierdzenia 5.2),

$$\begin{aligned}
C_B &= \sup_{(t,x) \in G_{T_0}} |B(t, x)|, \\
C_{BX1} &= \sup_{(t,x) \in G_{T_0}} \left| \frac{\partial B}{\partial x} \right| \cdot \sup_{(t,\bar{t},\bar{x}) \in [0,T] \times G_T} \left| \frac{\partial X(t; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} \right|, \\
C_{BX2} &= \sup_{(t,x) \in G_{T_0}} |B| \cdot \sup_{(t,\bar{t},\bar{x}) \in [0,T] \times G_T} \left| \frac{\partial X(t; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} \right|, \\
C_{BX3} &= \sup_{(t,x) \in G_{T_0}} \left| \frac{\partial B}{\partial x} \right| \cdot \sup_{(t,\bar{t},\bar{x}) \in [0,T] \times G_T} \left| \frac{\partial X(t; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \right|, \\
C_{BX4} &= \sup_{(t,x) \in G_{T_0}} |B| \cdot \sup_{(t,\bar{t},\bar{x}) \in [0,T] \times G_T} \left| \frac{\partial X(t; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \right|, \\
C_{\xi} &= \sup_{(t,x) \in G_{T_0}} |\xi|, \\
C_{\sigma 1} &= \sup_{(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{bT}} \left| \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{t}} \right|, \\
C_{\sigma 2} &= \sup_{(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{bT}} \left| \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{x}} \right|, \\
C_w &= \sup_{(t,x) \in G_{bT}} \left| \frac{\partial w}{\partial t} \right|, \\
C_V &= \sup_{(t,x) \in G_{pT}} \left| \frac{\partial V}{\partial t} \right|,
\end{aligned}$$

$$C_q = \max \left\{ \sup_{(t,x) \in G_{T_0}} \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right|, \sup_{(t,x) \in G_{T_0}} \left| \frac{\partial q}{\partial t} \right| \right\},$$

$$C_g = \sup_{y \in [0,l]} \left| \frac{dg}{dy} \right|,$$

i wybieramy największą ze zdefiniowanych powyżej stałych:

$$C = \max\{C_L, C_{L2}, C_B, C_{BX1}, C_{BX2}, C_{BX3}, C_{BX4}, C_\xi, C_{\sigma1}, C_{\sigma2}, C_w, C_V, C_q, C_g\}.$$

Stała $C_V < +\infty$ ponieważ wszystkie funkcje po prawej stronie wzoru (5.23) na pochodną cząstkową $\frac{\partial V}{\partial t}$ są ciągle na zbiorze zwartym G_{pT} .

Przejdziemy teraz do oszacowań dla pochodnych funkcji V :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial V(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial \tilde{V}(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} \right| &\leq T C \sup_{(t,x) \in G_{pT}} |v(t, x) - \tilde{v}(t, x)| \\ &\quad + T C \sup_{(t,x) \in G_{pT}} \left| \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}(t, x)}{\partial x} \right| \\ &\quad + C |v(\bar{t}, \bar{x}) - \tilde{v}(\bar{t}, \bar{x})|, \end{aligned}$$

Ponieważ $v(0, X(0; \bar{t}, \bar{x})) = u^0(X(0; \bar{t}, \bar{x})) = \tilde{v}(0, X(0; \bar{t}, \bar{x}))$, dlatego

$$\begin{aligned} v(\bar{t}, \bar{x}) - \tilde{v}(\bar{t}, \bar{x}) &= (v(\bar{t}, \bar{x}) - v(0, X(0; \bar{t}, \bar{x}))) - (\tilde{v}(\bar{t}, \bar{x}) - \tilde{v}(0, X(0; \bar{t}, \bar{x}))) \\ &= \int_0^{\bar{t}} \left(\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} \Big|_{(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))} + \xi(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} \Big|_{(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))} \right) dt \\ &\quad - \int_0^{\bar{t}} \left(\frac{\partial \tilde{v}(t, x)}{\partial t} \Big|_{(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))} + \xi(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) \frac{\partial \tilde{v}(t, x)}{\partial x} \Big|_{(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))} \right) dt, \end{aligned}$$

skąd dostajemy

$$\sup_{(t,x) \in G_{pT}} |v(t, x) - \tilde{v}(t, x)| \leq T \left(\sup_{(t,x) \in G_{pT}} \left| \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \right| + C \sup_{(t,x) \in G_{pT}} \left| \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right| \right). \quad (5.27)$$

W ten sposób dochodzimy do nierówności

$$\begin{aligned} \sup_{(t,x) \in G_{pT}} \left| \frac{\partial V(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial \tilde{V}(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} \right| &\leq T C \sup_{(t,x) \in G_{pT}} |v(t, x) - \tilde{v}(t, x)| \\ &\quad + T(C + C^2) \sup_{(t,x) \in G_{pT}} \left| \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}(t, x)}{\partial x} \right| \\ &\quad + T C \sup_{(t,x) \in G_{pT}} \left| \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{v}(t, x)}{\partial t} \right|. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Podobnie uzyskujemy oszacowanie

$$\begin{aligned} \sup_{(t,x) \in G_{pT}} \left| \frac{\partial V(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \tilde{V}(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \right| &\leq T C \sup_{(t,x) \in G_{pT}} |v(t, x) - \tilde{v}(t, x)| \\ &\quad + T C \sup_{(t,x) \in G_{pT}} \left| \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}(t, x)}{\partial x} \right|. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Pozostają jeszcze nierówności dla pochodnych cząstkowych funkcji W :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial W(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial \tilde{W}(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} \right| &\leq \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{t}} \right| \left[\mathcal{V}_0^{\Phi(\sigma)}(g) \sup_{y \in [0, \Phi(\sigma)]} |K_{,t}(\sigma, y, w(\sigma, y)) - K_{,t}(\sigma, y, \tilde{w}(\sigma, y))| \right. \\
&\quad + \mathcal{V}_0^{\Phi(\sigma)}(g) \sup_{y \in [0, \Phi(\sigma)]} |K_{,u}(\sigma, y, w(\sigma, y)) - K_{,u}(\sigma, y, \tilde{w}(\sigma, y))| \times \\
&\quad \quad \times \sup_{y \in [0, \Phi(\sigma)]} \left| \frac{\partial w(\sigma, y)}{\partial t} \right| \\
&\quad + \mathcal{V}_0^{\Phi(\sigma)}(g) \sup_{y \in [0, \Phi(\sigma)]} |K_{,u}(\sigma, y, \tilde{w}(\sigma, y))| \times \\
&\quad \quad \times \sup_{y \in [0, \Phi(\sigma)]} \left| \frac{\partial w(\sigma, y)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}(\sigma, y)}{\partial t} \right| \\
&\quad + \left| \frac{dg}{dy} \right|_{y=\Phi(\sigma)} \xi(\sigma, \Phi(\sigma)) \times \\
&\quad \quad \times |K(\sigma, \Phi(\sigma), w(\sigma, \Phi(\sigma))) - K(\sigma, \Phi(\sigma), \tilde{w}(\sigma, \Phi(\sigma)))| \\
&\quad + \mathcal{V}_{\Phi(\sigma)}^l(g) \sup_{y \in [\Phi(\sigma), l]} |K_{,t}(\sigma, y, V(\sigma, y)) - K_{,t}(\sigma, y, \tilde{V}(\sigma, y))| \\
&\quad + \mathcal{V}_{\Phi(\sigma)}^l(g) \sup_{y \in [\Phi(\sigma), l]} |K_{,u}(\sigma, y, V(\sigma, y)) - K_{,u}(\sigma, y, \tilde{V}(\sigma, y))| \times \\
&\quad \quad \times \sup_{y \in [\Phi(\sigma), l]} \left| \frac{\partial V(\sigma, y)}{\partial t} \right| \\
&\quad + \mathcal{V}_{\Phi(\sigma)}^l(g) \sup_{y \in [\Phi(\sigma), l]} |K_{,u}(\sigma, y, \tilde{V}(\sigma, y))| \times \\
&\quad \quad \times \sup_{y \in [\Phi(\sigma), l]} \left| \frac{\partial V(\sigma, y)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{V}(\sigma, y)}{\partial t} \right| \\
&\quad + \left| \frac{dg}{dy} \right|_{y=\Phi(\sigma)} \xi(\sigma, \Phi(\sigma)) \times \\
&\quad \quad \times |K(\sigma, \Phi(\sigma), V(\sigma, \Phi(\sigma))) - K(\sigma, \Phi(\sigma), \tilde{V}(\sigma, \Phi(\sigma)))| \\
&\quad + (\bar{t} - \sigma) C_{BX1} \sup_{t \in [\sigma, \bar{t}]} |w(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) - \tilde{w}(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))| \\
&\quad + (\bar{t} - \sigma) C_{BX2} \sup_{t \in [\sigma, \bar{t}]} \left| \frac{\partial w(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{w}(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))}{\partial x} \right| \\
&\quad + \left| B(\bar{t}, \bar{x})(w(\bar{t}, \bar{x}) - \tilde{w}(\bar{t}, \bar{x})) - B(\sigma, 0) \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{t}} (w(\sigma, 0) - \tilde{w}(\sigma, 0)) \right|.
\end{aligned}$$

Ostatni składnik przedstawimy w postaci

$$\left| B(\bar{t}, \bar{x}) \left[(w(\bar{t}, \bar{x}) - w(\sigma, 0)) - (\tilde{w}(\bar{t}, \bar{x}) - \tilde{w}(\sigma, 0)) \right] + (B(\bar{t}, \bar{x}) - B(\sigma, 0)) \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{t}} (w(\sigma, 0) - \tilde{w}(\sigma, 0)) \right|.$$

Stąd dostajemy

$$\left| \frac{\partial W(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial \tilde{W}(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} \right| \leq \mathcal{V}_0^{\Phi(\sigma)}(g) C^3 \sup_{(t,x) \in G_{bT}} |w - \tilde{w}| \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned}
& + \mathcal{V}_0^{\Phi(\sigma)}(g) C^4 \sup_{(t,x) \in G_{bT}} |w - \tilde{w}| \\
& + \mathcal{V}_0^{\Phi(\sigma)}(g) C^3 \sup_{(t,x) \in G_{bT}} \left| \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} \right| \\
& + C^5 |w(\sigma, \Phi(\sigma)) - \tilde{w}(\sigma, \Phi(\sigma))| \\
& + C^3 \mathcal{V}_0^l(g) \sup_{(t,x) \in G_{pT}} |V - \tilde{V}| \\
& + C^4 \mathcal{V}_0^l(g) \sup_{(t,x) \in G_{pT}} |V - \tilde{V}| \\
& + C^3 \mathcal{V}_0^l(g) \sup_{(t,x) \in G_{pT}} \left| \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} \right| \\
& + C^4 \sup_{(t,x) \in G_{pT}} |V - \tilde{V}| \\
& + TC \sup_{(t,x) \in G_{bT}} |w - \tilde{w}| \\
& + TC \sup_{(t,x) \in G_{bT}} \left| \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right| \\
& + C \left| \left(w(\bar{t}, \bar{x}) - w(\sigma, 0) \right) - \left(\tilde{w}(\bar{t}, \bar{x}) - \tilde{w}(\sigma, 0) \right) \right| \\
& + C(1 + C) |w(\sigma, 0) - \tilde{w}(\sigma, 0)|.
\end{aligned}$$

Zajmiemy się teraz oszacowaniem tych składników powyższej sumy, przy których nie stoi współczynnik zależny od czasu T . Ponieważ $w(0, \Phi(0)) = u^0(0) = \tilde{w}(0, \Phi(0))$, dlatego różnicę $w(\sigma, \Phi(\sigma)) - \tilde{w}(\sigma, \Phi(\sigma))$ możemy przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}
w(\sigma, \Phi(\sigma)) - \tilde{w}(\sigma, \Phi(\sigma)) & = \left(w(\sigma, \Phi(\sigma)) - w(0, \Phi(0)) \right) - \left(\tilde{w}(\sigma, \Phi(\sigma)) - \tilde{w}(0, \Phi(0)) \right) \\
& = \int_0^\sigma \left(\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} \Big|_{(t, \Phi(t))} + \xi(t, \Phi(t)) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} \Big|_{(t, \Phi(t))} \right) dt \\
& \quad - \int_0^\sigma \left(\frac{\partial \tilde{w}(t, x)}{\partial t} \Big|_{(t, \Phi(t))} + \xi(t, \Phi(t)) \frac{\partial \tilde{w}(t, x)}{\partial x} \Big|_{(t, \Phi(t))} \right) dt.
\end{aligned}$$

Podobnie zachodzi równość

$$\begin{aligned}
\left(w(\bar{t}, \bar{x}) - w(\sigma, 0) \right) - \left(\tilde{w}(\bar{t}, \bar{x}) - \tilde{w}(\sigma, 0) \right) & = \\
& = \left(w(\bar{t}, \bar{x}) - w(\sigma, X(\sigma; \bar{t}, \bar{x})) \right) - \left(\tilde{w}(\bar{t}, \bar{x}) - \tilde{w}(\sigma, X(\sigma; \bar{t}, \bar{x})) \right) \\
& = \int_\sigma^{\bar{t}} \left(\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} \Big|_{(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))} + \xi(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} \Big|_{(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))} \right) dt \\
& \quad - \int_\sigma^{\bar{t}} \left(\frac{\partial \tilde{w}(t, x)}{\partial t} \Big|_{(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))} + \xi(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})) \frac{\partial \tilde{w}(t, x)}{\partial x} \Big|_{(t, X(t; \bar{t}, \bar{x}))} \right) dt.
\end{aligned}$$

Korzystając z warunku brzegowego uzyskujemy

$$\begin{aligned}
|w(\sigma, 0) - \tilde{w}(\sigma, 0)| & \leq \left| \int_0^{\Phi(\sigma)} \left(K(\sigma, y, w(\sigma, y)) - K(\sigma, y, \tilde{w}(\sigma, y)) \right) dg(y) \right| \\
& \quad + \left| \int_{\Phi(\sigma)}^l \left(K(\sigma, y, V(\sigma, y)) - K(\sigma, y, \tilde{V}(\sigma, y)) \right) dg(y) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mathcal{V}_0^{\Phi(\sigma)}(g) C_L \sup_{(t,x) \in G_{bT}} |w - \tilde{w}| \\
&\quad + \mathcal{V}_0^l(g) C_L \sup_{(t,x) \in G_{pT}} |V - \tilde{V}| \\
&\leq \mathcal{V}_0^{\Phi(T)}(g) C_L \sup_{(t,x) \in G_{bT}} |w - \tilde{w}| \\
&\quad + TC_B \mathcal{V}_0^l(g) C_L \sup_{(t,x) \in G_{pT}} |v - \tilde{v}|
\end{aligned}$$

Ostatecznie dochodzimy do następujących nierówności dla trzech składników ze wzoru (5.30), przy których nie stoi współczynnik zależny od czasu T :

$$\begin{aligned}
|w(\sigma, \Phi(\sigma)) - \tilde{w}(\sigma, \Phi(\sigma))| &\leq T \left(\sup_{(t,x) \in G_{bT}} \left| \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} \right| \right. \\
&\quad \left. + C_\xi \sup_{(t,x) \in G_{bT}} \left| \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right| \right), \quad (5.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(w(\bar{t}, \bar{x}) - w(\sigma, 0)) - (\tilde{w}(\bar{t}, \bar{x}) - \tilde{w}(\sigma, 0))| &\leq T \left(\sup_{(t,x) \in G_{bT}} \left| \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} \right| \right. \\
&\quad \left. + C_\xi \sup_{(t,x) \in G_{bT}} \left| \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right| \right), \quad (5.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|w(\sigma, 0) - \tilde{w}(\sigma, 0)| &\leq \mathcal{V}_0^{\Phi(T)}(g) C_L \sup_{(t,x) \in G_{bT}} |w - \tilde{w}| \\
&\quad + TC_B \mathcal{V}_0^l(g) C_L \sup_{(t,x) \in G_{pT}} |v - \tilde{v}|. \quad (5.33)
\end{aligned}$$

Na podstawie formuł (5.17) i (5.28) dla funkcji V oraz (5.31), (5.32), (5.33) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sup_{(t,x) \in G_{bT}} \left| \frac{\partial W(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{W}(t,x)}{\partial t} \right| &\leq \left\{ \mathcal{V}_0^{\Phi(T)}(g) C^3 + \mathcal{V}_0^{\Phi(T)}(g) C^4 \right. \\
&\quad \left. + TC + \mathcal{V}_0^{\Phi(T)}(g) C^3(1+C) \right\} \sup_{(t,x) \in G_{bT}} |w - \tilde{w}| \\
&\quad + \left\{ \mathcal{V}_0^{\Phi(T)}(g) C^3 + TC^5 + TC \right\} \sup_{(t,x) \in G_{bT}} \left| \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} \right| \\
&\quad + \left\{ TC^6 + TC^2 + TC \right\} \sup_{(t,x) \in G_{bT}} \left| \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right| \\
&\quad + \left\{ 2TC^4 \mathcal{V}_0^l(g) + TC^5 \mathcal{V}_0^l(g) \right. \\
&\quad \left. + TC^3(1+C) \mathcal{V}_0^l(g) + TC^5 \right\} \sup_{(t,x) \in G_{pT}} |v - \tilde{v}| \\
&\quad + TC^4 \mathcal{V}_0^l(g) \sup_{(t,x) \in G_{pT}} \left| \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \right| \\
&\quad + TC^3(1+C) \mathcal{V}_0^l(g) \sup_{(t,x) \in G_{pT}} \left| \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right|
\end{aligned} \quad (5.34)$$

Analogicznie dochodzimy do oszacowania dla pochodnych cząstkowych względem x :

$$\sup_{(t,x) \in G_{bT}} \left| \frac{\partial W(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{W}(t,x)}{\partial x} \right| \leq \left\{ \mathcal{V}_0^{\Phi(T)}(g) C^2 + \mathcal{V}_0^{\Phi(T)}(g) C^3 \right\} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned}
& +TC + \mathcal{V}_0^{\Phi(T)}(g) C^4 \Big\} \sup_{(t,x) \in G_{bT}} |w - \tilde{w}| \\
& + \left\{ \mathcal{V}_0^{\Phi(T)}(g) C^2 + T C^4 \right\} \sup_{(t,x) \in G_{bT}} \left| \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} \right| \\
& + \left\{ T C^5 + T C \right\} \sup_{(t,x) \in G_{bT}} \left| \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right| \\
& + \left\{ 2T C^3 \mathcal{V}_0^l(g) + 2T C^4 \mathcal{V}_0^l(g) + T C^4 \right\} \sup_{(t,x) \in G_{pT}} |v - \tilde{v}| \\
& + T C^3 \mathcal{V}_0^l(g) \sup_{(t,x) \in G_{pT}} \left| \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \right| \\
& + T C^3 (1 + C) \mathcal{V}_0^l(g) \sup_{(t,x) \in G_{pT}} \left| \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right|
\end{aligned}$$

Na podstawie nierówności (5.17), (5.18), (5.28), (5.29), (5.34), (5.35) dla funkcji V i W oraz ich pochodnych wnioskujemy, że istnieje dodatnia stała C_0 spełniająca warunek

$$\|(V, W) - (\tilde{V}, \tilde{W})\| \leq C_0 \|(v, w) - (\tilde{v}, \tilde{w})\|,$$

wyznaczona jako maksimum współczynników stojących przy $\sup_{G_{pT}} |v - \tilde{v}|$, $\sup_{G_{wT}} |w - \tilde{w}|$, $\sup_{G_{pT}} |v_{,x} - \tilde{v}_{,x}|$, $\sup_{G_{wT}} |w_{,x} - \tilde{w}_{,x}|$, $\sup_{G_{pT}} |v_{,t} - \tilde{v}_{,t}|$, $\sup_{G_{wT}} |w_{,t} - \tilde{w}_{,t}|$.

Zauważmy, że każdy współczynnik po prawej stronie we wzorach (5.17), (5.18), (5.28), (5.29), (5.34), (5.35) zależy od czasu, ponieważ albo występuje w nim liniowo T , albo wahanie $\mathcal{V}_0^{\Phi(T)}(g)$. Jeśli $T \rightarrow 0$, to $\Phi(T) \rightarrow 0$ i wtedy, ze względu na prawostronną ciągłość funkcji g w zerze, również $\mathcal{V}_0^{\Phi(T)}(g) \rightarrow 0$. Zatem dla pewnego $T = T^* \in (0, T_0]$ stała C_0 jest mniejsza od jedności i stąd odwzorowanie \mathcal{Q} jest zwężające i istnieje jednoznaczne rozwiązanie (v, w) zagadnienia (5.5) - (5.7), które jest różniczkowalne w sposób ciągły odpowiednio w G_{pT^*} i G_{bT^*} .

Wiemy już, że pierwszy warunek zgodności zapewnia równość funkcji v i w na krzywej $x = \Phi(t)$. Pokażemy, że pierwszy i drugi warunek zgodności gwarantują równość pochodnych cząstkowych $\frac{\partial v}{\partial t}$ i $\frac{\partial w}{\partial t}$ oraz $\frac{\partial v}{\partial x}$ i $\frac{\partial w}{\partial x}$ na charakterystyce $x = \Phi(t)$. Zauważmy, że na mocy twierdzenia o różniczkowaniu funkcji uwikłanej mamy

$$\frac{\partial X(t; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \sigma(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} \frac{\partial X(t; \bar{t}, \bar{x})}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} \xi(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})).$$

Stąd

$$\frac{\partial X(0; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} \Big|_{(\bar{t}, \bar{x}) = (\eta, \Phi(\eta))} = -\frac{\partial \sigma(\eta, \Phi(\eta))}{\partial \bar{t}} \xi(0, 0),$$

ponieważ $X(0; \eta, \Phi(\eta)) = 0$.

Wyznaczając różnicę pochodnych cząstkowych względem zmiennej t w dowolnym punkcie krzywej $x = \Phi(t)$ otrzymamy:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v(\eta, \Phi(\eta))}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial w(\eta, \Phi(\eta))}{\partial \bar{t}} &= \frac{\partial \sigma(\eta, \Phi(\eta))}{\partial \bar{t}} \left\{ -\frac{du^0}{dx} \Big|_{x=0} \xi(0, 0) + b(0, 0) + B(0, 0) w(0, 0) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial q}{\partial t} \Big|_{(\eta, \Phi(\eta))} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{(\eta, \Phi(\eta))} \int_0^l \frac{\partial K(0, y, V(0, y))}{\partial t} dg(y) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{(\eta, \Phi(\eta))} \int_0^l \frac{\partial K(0, y, V(0, y))}{\partial u} \frac{V(0, y)}{\partial t} dg(y) \\
& - \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{(\eta, \Phi(\eta))} \left[K(0, 0, w(0, 0)) - K(0, 0, V(0, 0)) \right] \left. \frac{dg}{dy} \right|_{y=0} \xi(0, 0) \Bigg\},
\end{aligned}$$

ponieważ $v(\eta, \Phi(\eta)) = w(\eta, \Phi(\eta))$, $\sigma = 0$, $\Phi(\sigma) = 0$.

Ze względu pierwszy warunek zgodności $w(0, 0) = u^0(0)$. Natomiast ze wzorów (5.21) i (5.23) mamy dla $y \in [0, l]$

$$\begin{aligned}
V(0, y) &= u^0(y), \\
\frac{\partial V(0, y)}{\partial t} &= \left. \frac{du^0}{dx} \right|_{x=y} \frac{\partial X(0; 0, y)}{\partial \bar{t}} + b(0, y) + B(0, y) u^0(y).
\end{aligned}$$

Jeśli zapiszemy równanie całkowe dla charakterystyki $X(t; \bar{t}, \bar{x})$:

$$X(t; \bar{t}, \bar{x}) = \bar{x} + \int_{\bar{t}}^t \xi(\tau, X(\tau; \bar{t}, \bar{x})) d\tau,$$

wówczas możemy obliczyć pochodną cząstkową względem \bar{t} w postaci:

$$\frac{\partial X(t; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} = \int_{\bar{t}}^t \frac{\partial \xi(\tau, X(\tau; \bar{t}, \bar{x}))}{\partial x} \frac{\partial X(\tau; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{t}} d\tau - \xi(\bar{t}, \bar{x}).$$

Stąd

$$\frac{\partial X(0; 0, \bar{x})}{\partial \bar{t}} = -\xi(0, \bar{x}).$$

i ostatecznie

$$\frac{\partial V(0, y)}{\partial t} = b(0, y) + B(0, y) u^0(y) - \left. \frac{du^0}{dx} \right|_{x=y} \xi(0, y), \quad y \in [0, l].$$

Po uproszczeniach, uwzględniając drugi warunek zgodności dostajemy równość pochodnych cząstkowych na krzywej $x = \Phi(t)$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v(\eta, \Phi(\eta))}{\partial t} - \frac{\partial w(\eta, \Phi(\eta))}{\partial t} = \\
& = \frac{\partial \sigma(\eta, \Phi(\eta))}{\partial t} \left\{ - \left. \frac{du^0}{dx} \right|_{x=0} \xi(0, 0) + b(0, 0) + B(0, 0) u^0(0) - \left. \frac{du_b}{dt} \right|_{t=0} \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Dla pochodnych cząstkowych względem x należy zauważyć, że

$$\frac{\partial X(t; \bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} = - \frac{\partial \sigma(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \frac{\partial X(t; \bar{t}, \bar{x})}{\partial t} = - \frac{\partial \sigma(\bar{t}, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \xi(t, X(t; \bar{t}, \bar{x})).$$

Reszta przekształceń jest analogiczna.

Ciągłość pochodnych na krzywej $x = \Phi(t)$ oznacza, że $u \in C^1([0, T^*] \times [0, l])$.

Przyjmując T^* jako czas początkowy można pokazać istnienie rozwiązań w następnym prostokącie. Ponieważ stała C jest skończona dla każdego skończonego T , więc postępując jak poprzednio uzyskamy rozwiązanie w G_{T_0} .

Uwaga. W dowodzie istnienia rozwiązania klasy C^1 przedstawiliśmy całkę Stieltjesa $\int_0^l (\cdot) dg(y)$ jako sumę $\int_0^{\Phi(\sigma)} (\cdot) dg(y) + \int_{\Phi(\sigma)}^l (\cdot) dg(y)$. Powstały w ten sposób całki, których granice całkowania zależą od czasu t , względem którego liczone są pochodne cząstkowe. Dlatego założyliśmy⁸, że $g \in C^1$. Pochodna funkcji g wchodzi do szacowań jedynie poprzez wyrażenie

$$\left[K(\sigma, \Phi(\sigma), w(\sigma, \Phi(\sigma))) - K(\sigma, \Phi(\sigma), V(\sigma, \Phi(\sigma))) \right] \frac{dg}{dy} \Big|_{y=\Phi(\sigma)} \xi(\sigma, \Phi(\sigma)). \quad (5.36)$$

Udowodniliśmy, że odwzorowanie \mathcal{Q} ma punkt stały, czyli $(v, w) = (V, W)$. Ponadto \mathcal{Q} jest ciągle na linii $x = \Phi(t)$, czyli $V(\sigma, \Phi(\sigma)) = W(\sigma, \Phi(\sigma))$. Dlatego jeśli mamy już rozwiązanie zagadnienia (5.5) - (5.7), to redukuje się wyrażenie (5.36), które zawiera pochodną funkcji g . Na tej podstawie wnioskujemy, iż założenie $g \in C^1$, ma charakter techniczny i właściwie może być ominięte, o czym mówi poniższe

Twierdzenie 5.3 *Jeśli dla współczynników równania (5.5) z warunkami (5.6) i (5.7) spełnione są następujące założenia*

1. $\xi, b, B \in C^1(G_{T_0})$,
2. $\xi(t, x) > 0$ dla $(t, x) \in G_{T_0}$,
3. $u^0 \in C^1([0, l])$,
4. funkcja g ma wahanie skończone na odcinku $[0, l]$ oraz jest prawostronnie ciągła w zerze,
5. $q(t, y) \in C^1([0, T_0] \times \mathbb{R})$ i jest ograniczona wraz z pochodnymi,
6. zachodzi pierwszy warunek zgodności: $u_b(0) = u^0(0)$,
7. zachodzi drugi warunek zgodności: $u_{b,t}(0) + \xi(0, 0) u_{,x}^0(0) = b(0, 0) + B(0, 0) u^0(0)$,
8. $K(t, x, u) \in C^1(G_{T_0} \times \mathbb{R})$ i jest ograniczona wraz z pochodnymi,
9. pochodne $K_{,t}, K_{,u}$ spełniają warunek Lipschitza (ze stałą C_{L2}) ze względu na trzecią zmienną, tzn.

$$\forall_{u, \tilde{u} \in \mathbb{R}} |K_{,t}(t, x, u) - K_{,t}(t, x, \tilde{u})| \leq C_{L2} |u - \tilde{u}|,$$

$$\forall_{u, \tilde{u} \in \mathbb{R}} |K_{,u}(t, x, u) - K_{,u}(t, x, \tilde{u})| \leq C_{L2} |u - \tilde{u}|,$$

wtedy istnieje jednoznaczne rozwiązanie zagadnienia (5.5)-(5.7) klasy $C^1(G_{T_0})$.

Szkic dowodu. Funkcję $g : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ o wahanii skończonym, prawostronnie ciągłą w zerze przedłużamy na \mathbb{R} do funkcji \tilde{g} następująco:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(0) & \text{dla } x < 0 \\ g(x) & \text{dla } 0 \leq x \leq l \\ 2g(l) + \lim_{y \rightarrow l^-} g(y) & \text{dla } x > l. \end{cases}$$

Następnie g przybliżamy ciągiem funkcji $\{g_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ klasy C^1 , gdzie g_ε jest zdefiniowane jako⁹

$$g_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(x-y) \omega_\varepsilon(y) dy, \quad x \in [0, l],$$

⁸Niech funkcja g ma wahanie skończone na przedziale $[a, b]$ oraz $J(x) = \int_a^x dg(y) = g(x) - g(a)$. Stąd łatwo widać, że $J \in C^1$ jeśli $g \in C^1$.

⁹Tu g_ε jest nawet klasy C^∞ .

oraz $\omega_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $\int_{\mathbb{R}} \omega_\varepsilon(x) dx = 1$,

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon \exp\left(\frac{\varepsilon^2}{|x|^2 - \varepsilon^2}\right) & \text{dla } |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{dla } |x| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Zauważmy, że ponieważ funkcja ω_ε jest symetryczna, wobec tego w punktach nieciągłości $x_i \in (0, l]$ funkcji \tilde{g} , funkcja g_ε będzie zbiegać do $\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_i^-} g(x) + \lim_{x \rightarrow x_i^+} g(x) \right)$. Ponieważ nie założyliśmy ciągłości lewostronnej funkcji g w punkcie l , dlatego dopiero przy \tilde{g} zdefiniowanej w l jako $2g(l) + \lim_{y \rightarrow l^-} g(y)$ na pewno będziemy mieć $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon(l) = g(l)$. Ten fakt będzie istotny, aby móc skorzystać z twierdzenia Helly'ego¹⁰ [26].

Lemat 5.3 Dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{V}_0^l(g_\varepsilon) \leq \mathcal{V}_0^l(g).$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Jeżeli $0 = x_0 < \dots < x_n = l$, to

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} |g_\varepsilon(x_{i+1}) - g_\varepsilon(x_i)| &= \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{\mathbb{R}} (\tilde{g}(x_{i+1} - y) - \tilde{g}(x_i - y)) \omega_{\varepsilon(y)} dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=0}^{n-1} |\tilde{g}(x_{i+1} - y) - \tilde{g}(x_i - y)| \omega_{\varepsilon(y)} dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \mathcal{V}_0^l(\tilde{g}) \omega_{\varepsilon(y)} dy = \mathcal{V}_0^l(\tilde{g}) \int_{\mathbb{R}} \omega_{\varepsilon(y)} dy = \mathcal{V}_0^l(\tilde{g}) = \mathcal{V}_0^l(g). \end{aligned}$$

□

Dla dowolnego ustalonego $\varepsilon > 0$ zagadnienie mieszane

$$\begin{aligned} u_{,t} + \xi(t, x) u_{,x} &= b(t, x) + B(t, x) u, \\ u(0, x) &= u^0(x), \quad x \in [0, l], \\ u(t, 0) &= u_b(t) = q \left(t, \int_0^l K(t, y, u(t, y)) dg_\varepsilon(y) \right), \quad t \in [0, T_0]. \end{aligned}$$

posiada jednoznaczne rozwiązanie klasy C^1 dla pewnego odcinka czasu $[0, t]$, $t \leq T_0$. Możemy je przedłużyć aż do $[0, T_0]$. Jeżeli wiemy już, że istnieje rozwiązanie w całym prostokącie G_{T_0} , to $(v, w) = (V, W)$ i $W(\sigma, \Phi(\sigma)) = V(\sigma, \Phi(\sigma))$ oraz redukuje się wyrażenie

$$\left[K(\sigma, \Phi(\sigma), w(\sigma, \Phi(\sigma))) - K(\sigma, \Phi(\sigma), V(\sigma, \Phi(\sigma))) \right] g'_\varepsilon(\Phi(\sigma)) \xi(\sigma, \Phi(\sigma)).$$

występujące we wzorze będącym analogiem wzoru (5.25).

Ponieważ, z założenia, funkcja g ma wahanie skończone, dlatego na podstawie Lematu 5.3 ciąg $\{\mathcal{V}_0^l(g_\varepsilon)\}$ jest wspólnie ograniczony. Przechodząc w warunku brzegowym do granicy z $\varepsilon \rightarrow 0$, na mocy twierdzenia Helly'ego:

$$\int_0^l K(t, y, u(t, y)) dg_\varepsilon(y) \rightarrow \int_0^l K(t, y, u(t, y)) dg(y), \quad \text{dla } \varepsilon \rightarrow 0.$$

W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie klasy C^1 problemu początkowo-brzegowego przy założeniu, że funkcja g jest funkcją o wahanii skończonym na $[0, l]$ i ciągłą prawostronnie w punkcie 0.

¹⁰Założmy, że f jest ciągła, zaś g o wahanii skończonym w $[a, b]$. Jeżeli $g_n(x) \rightarrow g(x)$ w zbiorze Z gęstym w $[a, b]$, zawierającym punkty a, b i jeżeli ciąg $\mathcal{V}_a^b(g_n)$ jest ograniczony, to $\int_a^b f dg_n \rightarrow \int_a^b f dg$.

5.2 Układ równań liniowych

Nasze rozważania zaczniemy od układu trzech równań z macierzą diagonalną

$$u_{,t} + D(t, x)u_{,x} = b(t, x) + B(t, x)u, \quad (5.37)$$

dla $u = [u_1, u_2, u_3]^T$, $D = \text{diag} [\xi_1, \xi_2, \xi_3]$, $b = [b_1, b_2, b_3]^T$, $B = [B_{ij}]_{i,j=1,2,3}$, z warunkiem początkowym dla $x \in [0, l]$:

$$\begin{aligned} u_1(0, x) &= u_1^0(x), \\ u_2(0, x) &= u_2^0(x), \\ u_3(0, x) &= u_3^0(x). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Zakładamy, że w prostokącie $G_{T_0} = [0, T_0] \times [0, l]$ wartości własne ξ_1, ξ_2, ξ_3 są funkcjami ciągłymi spełniającymi warunek Lipschitza względem x . Ponadto $\xi_1(t, x)$ jest funkcją dodatnią, zaś $\xi_2(t, x)$ - ujemną. Stąd przyjmujemy po jednym warunku brzegowym na każdym brzegu prostokąta G_{T_0} ($x = 0$ i $x = l$), $t \in [0, T_0]$:

$$\begin{aligned} u_1(t, 0) &= u_{b1}(t) \\ &= q_1 \left(t, u_2(t, 0), u_3(t, 0), \int_0^l K_1(t, y, u_1(t, y), u_2(t, y), u_3(t, y)) dg_1(y) \right), \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} u_2(t, l) &= u_{b2}(t) \\ &= q_2 \left(t, u_1(t, l), u_3(t, l), \int_0^l K_2(t, y, u_1(t, y), u_2(t, y), u_3(t, y)) dg_2(y) \right). \end{aligned} \quad (5.40)$$

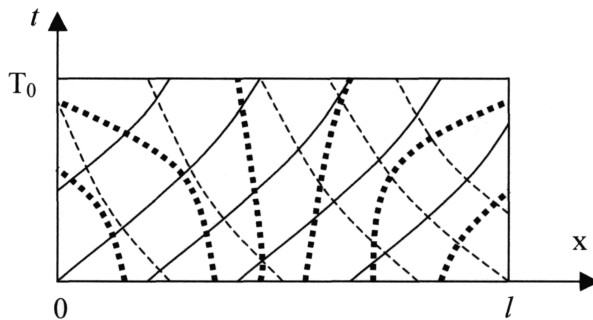
Natomiast funkcja ξ_3 spełnia warunek

$$\xi_3(t, 0) < 0 \quad \text{dla } t \in [0, T_0] \quad \text{lub} \quad \xi_3(t, 0) = 0 \quad \text{dla } t \in [0, T_0], \quad (5.41)$$

oraz

$$\xi_3(t, l) > 0 \quad \text{dla } t \in [0, T_0] \quad \text{lub} \quad \xi_3(t, l) = 0 \quad \text{dla } t \in [0, T_0]. \quad (5.42)$$

Oznacza to, że żadna krzywa należąca do trzeciej rodziny charakterystyk nie wchodzi przez lewy lub prawy brzeg prostokąta G_{T_0} i z tego względu dla funkcji u_3 zakładamy tylko warunek początkowy.



Rys. 5.4: Trzy rodziny charakterystyk

Należy zauważyć, że ogólniejsze warunki brzegowe byłyby w postaci

$$q_1 \left(t, u_2(t, 0), u_3(t, 0), \int_0^l K_{11}(t, y, u_1, u_2, u_3) dg_{11}(y), \right. \\ \left. \int_0^l K_{12}(t, y, u_1, u_2, u_3) dg_{12}(y), \int_0^l K_{13}(t, y, u_1, u_2, u_3) dg_{13}(y) \right), \\ q_2 \left(t, u_1(t, l), u_3(t, l), \int_0^l K_{21}(t, y, u_1, u_2, u_3) dg_{21}(y), \right. \\ \left. \int_0^l K_{22}(t, y, u_1, u_2, u_3) dg_{22}(y), \int_0^l K_{23}(t, y, u_1, u_2, u_3) dg_{23}(y) \right).$$

Przyjęcie ich nie wpłynęłoby na sposób dowodzenia twierdzenia o istnieniu, a jedynie na złożoność poszczególnych formuł w trakcie dowodzenia. Dlatego dla uproszczenia pozostaniemy przy (5.39) i (5.40).

Wyróżnimy charakterystyki $x = \Phi_1(t)$ i $x = \Phi_2(t)$ startujące - odpowiednio - z punktu $(0, 0)$ i $(0, l)$:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \xi_1(t, x), & \Phi_1(0) &= 0, \\ \frac{dx}{dt} &= \xi_2(t, x), & \Phi_2(0) &= l. \end{aligned}$$

5.2.1 Istnienie uogólnionych rozwiązań układu (5.37)

W tym paragrafie wykażemy słuszność następującego twierdzenia, będącego uogólnieniem Twierdzenia 5.1 na układ (5.37):

Twierdzenie 5.4 *Jeśli współczynniki układu (5.37) oraz warunki początkowe (5.38) i brzegowe (5.39), (5.40) spełniają następujące założenia*

1. $D, b, B \in C(G_{T_0})$,
2. $D(t, x)$ spełnia warunek Lipschitza ze względu na x i $\xi_1(t, x) > 0$, $\xi_2(t, x) < 0$ dla $(t, x) \in G_{T_0}$ oraz ξ_3 spełnia (5.41) - (5.42),
3. $u^0 \in C([0, l])$,
4. $q_1(t, x), q_2(t, x) \in C([0, T_0] \times \mathbb{R})$ i spełniają warunek Lipschitza (ze stałą C_L) ze względu na zmienną x ,
5. funkcja g_1 ma wahanie skończone na odcinku $[0, l]$ oraz jest prawostronnie ciągła w punkcie 0,
6. funkcja g_2 ma wahanie skończone na odcinku $[0, l]$ oraz jest lewostronnie ciągła w punkcie l ,
7. zachodzi pierwszy warunek zgodności:

$$u_{b1}(0) = u_1^0(0), \quad (5.43)$$

$$u_{b2}(0) = u_2^0(l), \quad (5.44)$$

8. $K_i(t, x, u) \in C(G_{T_0} \times \mathbb{R}^3)$, $i = 1, 2$, oraz spełnia warunek Lipschitza (ze stałą C_L) ze względu na zmienną u , tzn.

$$\forall u, \tilde{u} \in \mathbb{R}^3 \quad |K_i(t, x, u) - K_i(t, x, \tilde{u})| \leq C_L \sum_{j=1}^3 |u_j - \tilde{u}_j|,$$

wtedy w G_{T_0} istnieje ciągle, jednoznaczne rozwiązanie zagadnienia (5.37)-(5.40).

Dowód. Skorzystamy z twierdzenia Banacha o punkcie stałym.

Niech (u_1, u_2, u_3) będzie trójką funkcji z przestrzeni Banacha $C(G_{T_0}) \times C(G_{T_0}) \times C(G_{T_0})$ z normą

$$\|(u_1, u_2, u_3)\| = \max_{i=1,2,3} \{\sup_{G_{T_0}} |u_i|\}.$$

Określamy odwzorowanie \mathcal{Q} , które trójce (u_1, u_2, u_3) przyporządkowuje trójkę funkcji (U_1, U_2, U_3) daną jako słabe rozwiązanie układu równań

$$U_{1,t} + \xi_1(t, x)U_{1,x} = b_1(t, x) + B_{11}(t, x)u_1 + B_{12}(t, x)u_2 + B_{13}(t, x)u_3, \quad (5.45)$$

$$U_{2,t} + \xi_2(t, x)U_{2,x} = b_2(t, x) + B_{21}(t, x)u_1 + B_{22}(t, x)u_2 + B_{23}(t, x)u_3, \quad (5.46)$$

$$U_{3,t} + \xi_3(t, x)U_{3,x} = b_3(t, x) + B_{31}(t, x)u_1 + B_{32}(t, x)u_2 + B_{33}(t, x)u_3, \quad (5.47)$$

z warunkami

$$U_i(0, x) = u_i^0(x), \quad x \in [0, l], \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.48)$$

oraz dla $t \in [0, T_0]$:

$$U_1(t, 0) = q_1 \left(t, U_2(t, 0), U_3(t, 0), \int_0^l K_1(t, y, U_1(t, y), U_2(t, y), U_3(t, y)) dg_1(y) \right), \quad (5.49)$$

$$U_2(t, l) = q_2 \left(t, U_1(t, l), U_3(t, l), \int_0^l K_2(t, y, U_1(t, y), U_2(t, y), U_3(t, y)) dg_2(y) \right). \quad (5.50)$$

Na mocy Twierdzenia 2.1 dotyczącego zagadnienia Cauchy'ego dla układu liniowego, w prostokącie G_{T_0} istnieje rozwiązanie U_3 problemu (5.47)-(5.48). Funkcję U_3 (zależną od u_1, u_2, u_3) podstawiamy do dwóch pozostałych równań. Równanie (5.45) z warunkami (5.49), (5.48) posiada, na mocy Twierdzenia 5.1, dla danych u_1, u_2, u_3 jednoznaczne ciągle rozwiązanie U_1 . Podobnie istnieje jednoznaczne, ciągle rozwiązanie U_2 zagadnienia (5.46) - (5.48) - (5.50). Dlatego $(U_1, U_2, U_3) \in C(G_{T_0}) \times C(G_{T_0}) \times C(G_{T_0})$.

Wykażemy istnienie czasu $T \in (0, T_0]$, dla którego odwzorowanie \mathcal{Q} jest zwężające, tzn. dla pewnej stałej $\tilde{C} = \tilde{C}(T)$, $\tilde{C} \in (0, 1)$:

$$\|(U_1, U_2, U_3) - (\bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3)\| \leq \tilde{C} \|(u_1, u_2, u_3) - (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)\|,$$

czyli

$$\max_{i=1,2,3} \{\sup_{G_T} |U_i - \bar{U}_i|\} \leq \tilde{C} \max_{i=1,2,3} \{\sup_{G_T} |u_i - \bar{u}_i|\}.$$

Zacniemy od nierówności, którą łatwo dostaniemy z równania (5.47) i warunku początkowego (5.48). Niech T będzie dowolnym czasem z przedziału $(0, T_0]$ oraz

$$G_T = [0, T] \times [0, l].$$

Czas T zostanie dobrany tak, aby odwzorowanie \mathcal{Q} było zwężające.

Na charakterystyce $x = x_3(t; \bar{t}, \bar{x})$ funkcja U_3 spełnia równanie różniczkowe:

$$\begin{aligned} \frac{dU_3(t, x_3(t; \bar{t}, \bar{x}))}{dt} &= b_3(t, x_3(t; \bar{t}, \bar{x})) + B_{31}(t, x_3(t; \bar{t}, \bar{x}))u_1(t, x_3(t; \bar{t}, \bar{x})) \\ &+ B_{32}(t, x_3(t; \bar{t}, \bar{x}))u_2(t, x_3(t; \bar{t}, \bar{x})) + B_{33}(t, x_3(t; \bar{t}, \bar{x}))u_3(t, x_3(t; \bar{t}, \bar{x})). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Wprowadzamy oznaczenie dla różnic funkcji U_i i \bar{U}_i oraz u_i i \bar{u}_i , ($i = 1, 2, 3$):

$$v_i = u_i - \bar{u}_i, \quad V_i = U_i - \bar{U}_i.$$

Odejmując stronami równania (5.51) dla niewiadomych funkcji U_3 i \bar{U}_3 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{dV_3(t, x_3(t; \bar{t}, \bar{x}))}{dt} &= B_{31}(t, x_3(t; \bar{t}, \bar{x})) v_1(t, x_3(t; \bar{t}, \bar{x})) + B_{32}(t, x_3(t; \bar{t}, \bar{x})) v_2(t, x_3(t; \bar{t}, \bar{x})) \\ &\quad + B_{33}(t, x_3(t; \bar{t}, \bar{x})) v_3(t, x_3(t; \bar{t}, \bar{x})). \end{aligned}$$

Rozwiązanie tego równania różniczkowego zwyczajnego jest postaci

$$V_3(\bar{t}, \bar{x}) = V_3(0, x_3(0; \bar{t}, \bar{x})) + \int_0^{\bar{t}} (B_{31}v_1 + B_{32}v_2 + B_{33}v_3) dt.$$

Ponieważ $U_3(0, x) = \bar{U}_3(0, x) = u_3^0(x)$, więc $V_3(0, x_3(0; \bar{t}, \bar{x})) = 0$. Stąd otrzymujemy nierówność

$$\sup_{G_T} |V_3| \leq TC_B \left(\sup_{G_T} |v_1| + \sup_{G_T} |v_2| + \sup_{G_T} |v_3| \right), \quad (5.52)$$

gdzie $C_B = \sup_{\substack{G_{T_0} \\ i=1,2,3}} \{|B_{i1}| + |B_{i2}| + |B_{i3}|\}$.

Niech T będzie dowolnym czasem z przedziału $(0, T_0]$ i dodatkowo takim, że charakterystyki $x = \Phi_1(t)$ i $x = \Phi_2(t)$ nie przecinają się¹¹ oraz niech

$$\begin{aligned} G_{p1T} &= \{(t, x) \in G_T : x \geq \Phi_1(t)\}, \\ G_{b1T} &= \{(t, x) \in G_T : x \leq \Phi_1(t)\}, \\ G_{p2T} &= \{(t, x) \in G_T : x \leq \Phi_2(t)\}, \\ G_{b2T} &= \{(t, x) \in G_T : x \geq \Phi_2(t)\}. \end{aligned}$$

Zajmiemy się teraz równaniami (5.45) i (5.46). Na charakterystyce $x = x_1(t; \bar{t}, \bar{x})$ funkcja U_1 spełnia równanie różniczkowe:

$$\begin{aligned} \frac{dU_1(t, x_1(t; \bar{t}, \bar{x}))}{dt} &= b_1(t, x_1(t; \bar{t}, \bar{x})) + B_{11}(t, x_1(t; \bar{t}, \bar{x})) u_1(t, x_1(t; \bar{t}, \bar{x})) \\ &\quad + B_{12}(t, x_1(t; \bar{t}, \bar{x})) u_2(t, x_1(t; \bar{t}, \bar{x})) + B_{13}(t, x_1(t; \bar{t}, \bar{x})) U_3(t, x_1(t; \bar{t}, \bar{x})) \end{aligned} \quad (5.53)$$

Odejmując stronami równania (5.53) dla niewiadomych funkcji U_1 , U_3 i \bar{U}_1 , \bar{U}_3 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t, x_1(t; \bar{t}, \bar{x}))}{dt} &= B_{11}(t, x_1(t; \bar{t}, \bar{x})) v_1(t, x_1(t; \bar{t}, \bar{x})) + B_{12}(t, x_1(t; \bar{t}, \bar{x})) v_2(t, x_1(t; \bar{t}, \bar{x})) \\ &\quad + B_{13}(t, x_1(t; \bar{t}, \bar{x})) V_3(t, x_1(t; \bar{t}, \bar{x})). \end{aligned}$$

Stąd

$$V_1(\bar{t}, \bar{x}) = V_1(t_0, x_1(t_0; \bar{t}, \bar{x})) + \int_{t_0}^{\bar{t}} (B_{11}v_1 + B_{12}v_2 + B_{13}V_3) dt \quad (5.54)$$

i spełnia dla czasu $t_0 = 0$ warunek początkowy, natomiast dla $t_0 = \sigma_1(\bar{t}, \bar{x})$ - warunek brzegowy. Jeśli punkt $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{p1T}$, to $t_0 = 0$ oraz $V_1(t_0, x_1(t_0; \bar{t}, \bar{x})) = 0$, gdyż funkcje U_1 i \bar{U}_1 mają ten sam warunek początkowy: $U_1(0, x_1(0; \bar{t}, \bar{x})) = \bar{U}_1(0, x_1(0; \bar{t}, \bar{x})) = u_1^0(x_1(0; \bar{t}, \bar{x}))$.

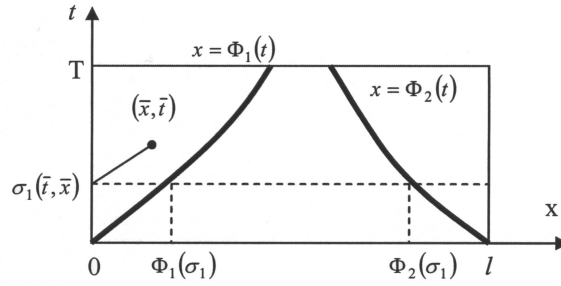
Z równania (5.54) otrzymujemy

$$\sup_{G_{p1T}} |V_1| \leq TC_B \left(\sup_{G_T} |v_1| + \sup_{G_T} |v_2| + \sup_{G_T} |V_3| \right), \quad (5.55)$$

i podobnie

$$\sup_{G_{p2T}} |V_2| \leq TC_B \left(\sup_{G_T} |v_1| + \sup_{G_T} |v_2| + \sup_{G_T} |V_3| \right). \quad (5.56)$$

¹¹Założenie istotne jedynie dla uproszczenia notacji.

Rys. 5.5: Charakterystyki $x = \Phi_1(t)$ i $x = \Phi_2(t)$

Dla $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{b1T}$: $t_0 = \sigma_1(\bar{t}, \bar{x})$. Wyznaczając $V_1(\sigma_1, x_1(\sigma_1; \bar{t}, \bar{x}))$ przedstawimy w warunku brzegowym całkę po przedziale $[0, l]$ w postaci sumy trzech całek po przedziałach $[0, \Phi_1(\sigma_1)]$, $[\Phi_1(\sigma_1), \Phi_2(\sigma_1)]$ i $[\Phi_2(\sigma_1), l]$, ponieważ jeśli $\sigma_1 \rightarrow 0$ to $\mathcal{V}_0^{\Phi_1(\sigma_1)}(g_1) \rightarrow 0$ oraz $\mathcal{V}_{\Phi_2(\sigma_1)}^l(g_1) \rightarrow 0$. (Rys. 5.5)

$$\begin{aligned}
|V_1(\sigma_1, x_1(\sigma_1; \bar{t}, \bar{x}))| &= |V_1(\sigma_1, 0)| \leq \\
&\leq C_L |V_2(\sigma_1, 0)| + C_L |V_3(\sigma_1, 0)| \\
&\quad + C_L \left| \int_0^l K_1(\sigma_1, y, U_1(\sigma_1, y), U_2(\sigma_1, y), U_3(\sigma_1, y)) dg_1(y) \right. \\
&\quad \quad \left. - \int_0^l K_1(\sigma_1, y, \tilde{U}_1(\sigma_1, y), \tilde{U}_2(\sigma_1, y), U_3(\sigma_1, y)) dg_1(y) \right| \\
&\leq C_L |V_2(\sigma_1, 0)| + C_L |V_3(\sigma_1, 0)| \\
&\quad + C_L \left| \int_0^{\Phi_1(\sigma_1)} \left(K_1(\sigma_1, y, U_1(\sigma_1, y), U_2(\sigma_1, y), U_3(\sigma_1, y)) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - K_1(\sigma_1, y, \tilde{U}_1(\sigma_1, y), \tilde{U}_2(\sigma_1, y), U_3(\sigma_1, y)) \right) dg_1(y) \right| \\
&\quad + C_L \left| \int_{\Phi_1(\sigma_1)}^{\Phi_2(\sigma_1)} \left(K_1(\sigma_1, y, U_1(\sigma_1, y), U_2(\sigma_1, y), U_3(\sigma_1, y)) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - K_1(\sigma_1, y, \tilde{U}_1(\sigma_1, y), \tilde{U}_2(\sigma_1, y), U_3(\sigma_1, y)) \right) dg_1(y) \right| \\
&\quad + C_L \left| \int_{\Phi_2(\sigma_1)}^l \left(K_1(\sigma_1, y, U_1(\sigma_1, y), U_2(\sigma_1, y), U_3(\sigma_1, y)) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - K_1(\sigma_1, y, \tilde{U}_1(\sigma_1, y), \tilde{U}_2(\sigma_1, y), U_3(\sigma_1, y)) \right) dg_1(y) \right| \\
&\leq C_L |V_2(\sigma_1, 0)| + C_L |V_3(\sigma_1, 0)| \\
&\quad + C_L^2 \mathcal{V}_0^{\Phi_1(\sigma_1)}(g_1) \left[\sup_{y \in [0, \Phi_1(\sigma_1)]} |V_1(\sigma_1, y)| + \sup_{y \in [0, \Phi_1(\sigma_1)]} |V_2(\sigma_1, y)| \right. \\
&\quad \quad \left. + \sup_{y \in [0, \Phi_1(\sigma_1)]} |V_3(\sigma_1, y)| \right] \\
&\quad + C_L^2 \mathcal{V}_{\Phi_1(\sigma_1)}^{\Phi_2(\sigma_1)}(g_1) \left[\sup_{y \in [\Phi_1(\sigma_1), \Phi_2(\sigma_1)]} |V_1(\sigma_1, y)| + \sup_{y \in [\Phi_1(\sigma_1), \Phi_2(\sigma_1)]} |V_2(\sigma_1, y)| \right. \\
&\quad \quad \left. + \sup_{y \in [\Phi_1(\sigma_1), \Phi_2(\sigma_1)]} |V_3(\sigma_1, y)| \right] \\
&\quad + C_L^2 \mathcal{V}_{\Phi_2(\sigma_1)}^l(g_1) \left[\sup_{y \in [\Phi_2(\sigma_1), l]} |V_1(\sigma_1, y)| + \sup_{y \in [\Phi_2(\sigma_1), l]} |V_2(\sigma_1, y)| \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. + \sup_{y \in [\Phi_2(\sigma_1), l]} |V_3(\sigma_1, y)| \right] \\
\leq & C_L |V_2(\sigma_1, 0)| + C_L |V_3(\sigma_1, 0)| \\
& + C_L^2 \mathcal{V}_0^{\Phi_1(\sigma_1)}(g_1) \sup_{G_{b1T}} |V_1| + C_L^2 \mathcal{V}_{\Phi_1(\sigma_1)}^l(g_1) \sup_{G_{p1T}} |V_1| \\
& + C_L^2 \mathcal{V}_0^{\Phi_2(\sigma_1)}(g_1) \sup_{G_{p2T}} |V_2| + C_L^2 \mathcal{V}_{\Phi_2(\sigma_1)}^l(g_1) \sup_{G_{b2T}} |V_2| \\
& + C_L^2 \mathcal{V}_0^l(g_1) \sup_{G_T} |V_3|.
\end{aligned} \tag{5.57}$$

W ostatnim przejściu skorzystaliśmy z twierdzenia (str. 22, [26]), że wahanie jest funkcją addytywną przedziału.

Ponieważ $(\sigma_1, 0) \in G_{p2T}$ oraz $(\sigma_1, 0) \in G_{p3T}$, dlatego na podstawie (5.52) i (5.56) szacujemy

$$\begin{aligned}
|V_3(\sigma_1, 0)| & \leq TC_B \left(\sup_{G_T} |v_1| + \sup_{G_T} |v_2| + \sup_{G_T} |v_3| \right), \\
|V_2(\sigma_1, 0)| & \leq TC_B \left(\sup_{G_T} |v_1| + \sup_{G_T} |v_2| + \sup_{G_T} |V_3| \right).
\end{aligned}$$

Dalej przy pomocy (5.55) i (5.56) uzyskujemy z (5.58)

$$\begin{aligned}
|V_1(\sigma_1, 0)| & \leq C_L^2 \mathcal{V}_0^{\Phi_1(\sigma_1)}(g_1) \sup_{G_{b1T}} |V_1| + C_L^2 \mathcal{V}_{\Phi_2(\sigma_1)}^l(g_1) \sup_{G_{b2T}} |V_2| \\
& + \left[TC_B \left(C_L^2 \mathcal{V}_{\Phi_1(\sigma_1)}^l(g_1) + C_L^2 \mathcal{V}_0^{\Phi_2(\sigma_1)}(g_1) + 1 \right) + C_L^2 \mathcal{V}_0^l(g_1) \right] \sup_{G_T} |V_3| \\
& + TC_B \left(C_L^2 \mathcal{V}_{\Phi_1(\sigma_1)}^l(g_1) + C_L^2 \mathcal{V}_0^{\Phi_2(\sigma_1)}(g_1) + 2 \right) \left(\sup_{G_T} |v_1| + \sup_{G_T} |v_2| \right) \\
& + TC_B \sup_{G_T} |v_3|.
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Z równania (5.54) wynika, że dla dowolnego $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{b1T}$

$$|V_1(t, x)| \leq |V_1(\sigma_1, 0)| + TC_B \left(\sup_{(t,x) \in G_T} |v_1(t, x)| + \sup_{(t,x) \in G_T} |v_2(t, x)| + \sup_{(t,x) \in G_T} |V_3(t, x)| \right)$$

Dlatego dzięki (5.58) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sup_{(t,x) \in G_{b1T}} |V_1(t, x)| & \leq C_L^2 \mathcal{V}_0^{\Phi_1(T)}(g_1) \sup_{G_{b1T}} |V_1| + C_L^2 \mathcal{V}_{\Phi_2(T)}^l(g_1) \sup_{G_{b2T}} |V_2| \\
& + \left[TC_B \left(2C_L^2 \mathcal{V}_0^l(g_1) + C_L + 1 \right) + C_L^2 \mathcal{V}_0^l(g_1) \right] \sup_{G_T} |V_3| \\
& + TC_B \left(2C_L^2 \mathcal{V}_0^l(g_1) + 2C_L + 1 \right) \left(\sup_{G_T} |v_1| + \sup_{G_T} |v_2| \right) \\
& + TC_B \sup_{G_T} |v_3|.
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Ostatecznie z (5.55) i (5.59) mamy

$$\begin{aligned}
\sup_{G_T} |V_1| & \leq \sup_{G_{b1T}} |V_1| + \sup_{G_{p1T}} |V_1| \\
& \leq C_L^2 \mathcal{V}_0^{\Phi_1(T)}(g_1) \sup_{G_T} |V_1| + C_L^2 \mathcal{V}_{\Phi_2(T)}^l(g_1) \sup_{G_T} |V_2| \\
& + \left[TC_B \left(2C_L^2 \mathcal{V}_0^l(g_1) + C_L + 2 \right) + C_L^2 \mathcal{V}_0^l(g_1) \right] \sup_{G_T} |V_3|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +TC_B \left(2C_L^2 \mathcal{V}_0^l(g_1) + 2C_L + 2 \right) \left(\sup_{G_T} |v_1| + \sup_{G_T} |v_2| \right) \\
& +TC_B \sup_{G_T} |v_3|,
\end{aligned}$$

i dalej

$$\begin{aligned}
\left(1 - C_L^2 \mathcal{V}_0^{\Phi_1(T)}(g_1) \right) \sup_{G_T} |V_1| & \leq C_L^2 \mathcal{V}_{\Phi_2(T)}^l(g_1) \sup_{G_T} |V_2| \\
& + \left[TC_B \left(2C_L^2 \mathcal{V}_0^l(g_1) + C_L + 2 \right) + C_L^2 \mathcal{V}_0^l(g_1) \right] \sup_{G_T} |V_3| \\
& + TC_B \left(2C_L^2 \mathcal{V}_0^l(g_1) + 2C_L + 2 \right) \left(\sup_{G_T} |v_1| + \sup_{G_T} |v_2| \right) \\
& + TC_B \sup_{G_T} |v_3|.
\end{aligned}$$

Przy pomocy (5.52) wyeliminujemy z powyższej nierówności $\sup_{G_T} |V_3|$:

$$\begin{aligned}
\left(1 - C_L^2 \mathcal{V}_0^{\Phi_1(T)}(g_1) \right) \sup_{G_T} |V_1| & \leq C_L^2 \mathcal{V}_{\Phi_2(T)}^l(g_1) \sup_{G_T} |V_2| & (5.60) \\
& + TC_B \left(C_L^2 \mathcal{V}_0^l(g_1) (2TC_B + C_L + 2) + \right. \\
& \quad \left. + TC_B (C_L + 2) + 2C_L + 2 \right) \left(\sup_{G_T} |v_1| + \sup_{G_T} |v_2| \right) \\
& + TC_B \left(C_L^2 \mathcal{V}_0^l(g_1) (2TC_B + 1) + TC_B (C_L + 2) + 1 \right) \sup_{G_T} |v_3|,
\end{aligned}$$

W ten sam sposób dostajemy

$$\begin{aligned}
\left(1 - C_L^2 \mathcal{V}_{\Phi_2(T)}^l(g_2) \right) \sup_{G_T} |V_2| & \leq C_L^2 \mathcal{V}_0^{\Phi_1(T)}(g_2) \sup_{G_T} |V_1| & (5.61) \\
& + TC_B \left(C_L^2 \mathcal{V}_0^l(g_2) (2TC_B + C_L + 2) + \right. \\
& \quad \left. + TC_B (C_L + 2) + 2C_L + 2 \right) \left(\sup_{G_T} |v_1| + \sup_{G_T} |v_2| \right) + \\
& + TC_B \left(C_L^2 \mathcal{V}_0^l(g_2) (2TC_B + 1) + TC_B (C_L + 2) + 1 \right) \sup_{G_T} |v_3|,
\end{aligned}$$

Dodajemy stronami nierówności (5.52), (5.60), (5.61) i po prostym przekształceniu dostajemy

$$\begin{aligned}
& \left(1 - C_L^2 \mathcal{V}_0^{\Phi_1(T)}(g_1) - C_L^2 \mathcal{V}_0^{\Phi_1(T)}(g_1) \right) \sup_{G_T} |V_1| + \left(1 - C_L^2 \mathcal{V}_{\Phi_2(T)}^l(g_1) - C_L^2 \mathcal{V}_{\Phi_2(T)}^l(g_2) \right) \sup_{G_T} |V_2| + \\
& + \sup_{G_T} |V_3| \leq TC_B \left[C_L^2 (\mathcal{V}_0^l(g_1) + \mathcal{V}_0^l(g_2)) (2TC_B + C_L + 2) \right. \\
& \quad \left. + 2TC_B (C_L + 2) + 4C_L + 5 \right] \left(\sup_{G_T} |v_1| + \sup_{G_T} |v_2| \right) + \\
& + TC_B \left[C_L^2 (\mathcal{V}_0^l(g_1) + \mathcal{V}_0^l(g_2)) (2TC_B + 1) + 2TC_B (C_L + 2) + 3 \right] \sup_{G_T} |v_3|
\end{aligned}$$

Stąd

$$\min \left\{ 1 - C_L^2 \mathcal{V}_0^{\Phi_1(T)}(g_1) - C_L^2 \mathcal{V}_0^{\Phi_1(T)}(g_1); 1 - C_L^2 \mathcal{V}_{\Phi_2(T)}^l(g_1) - C_L^2 \mathcal{V}_{\Phi_2(T)}^l(g_2) \right\} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sup_{G_T} |V_1| + \sup_{G_T} |V_2| + \sup_{G_T} |V_3| \right) \leq \\
& \leq TC_B \left[C_L^2 (\mathcal{V}_0^l(g_1) + \mathcal{V}_0^l(g_2)) (2TC_B + C_L + 2) + \right. \\
& \quad \left. + 2TC_B(C_L + 2) + 4C_L + 5 \right] \left(\sup_{G_T} |v_1| + \sup_{G_T} |v_2| + \sup_{G_T} |v_3| \right). \tag{5.62}
\end{aligned}$$

Zakładając, że

$$\min \left\{ 1 - C_L^2 \mathcal{V}_0^{\Phi_1(T)}(g_1) - C_L^2 \mathcal{V}_0^{\Phi_1(T)}(g_2); 1 - C_L^2 \mathcal{V}_{\Phi_2(T)}^l(g_1) - C_L^2 \mathcal{V}_{\Phi_2(T)}^l(g_2) \right\} \neq 0, \tag{5.63}$$

oznaczamy stałą

$$\tilde{C} := \frac{TC_B \left[C_L^2 (\mathcal{V}_0^l(g_1) + \mathcal{V}_0^l(g_2)) (2TC_B + C_L + 2) + 2TC_B(C_L + 2) + 4C_L + 5 \right]}{\min \left\{ 1 - C_L^2 \mathcal{V}_0^{\Phi_1(T)}(g_1) - C_L^2 \mathcal{V}_0^{\Phi_1(T)}(g_2); 1 - C_L^2 \mathcal{V}_{\Phi_2(T)}^l(g_1) - C_L^2 \mathcal{V}_{\Phi_2(T)}^l(g_2) \right\}}.$$

Zauważmy, że jeśli $T \rightarrow 0$ wówczas $\Phi_1(T) \rightarrow 0$, $\Phi_2(T) \rightarrow l$ i dlatego $\mathcal{V}_0^{\Phi_1(T)}(g_1) \rightarrow 0$ oraz $\mathcal{V}_{\Phi_2(T)}^l(g_1) \rightarrow 0$. Zatem dla pewnego czasu $T = T^*$ stała $\tilde{C} \in (0, 1)$ oraz spełniony jest warunek (5.63). Wtedy na podstawie (5.62) mamy:

$$\sup_{G_{T^*}} |V_1| + \sup_{G_{T^*}} |V_2| + \sup_{G_{T^*}} |V_3| \leq \tilde{C} \left(\sup_{G_{T^*}} |v_1| + \sup_{G_{T^*}} |v_2| + \sup_{G_{T^*}} |v_3| \right),$$

skąd łatwo wnioskujemy, że

$$\max_{i=1,2,3} \left\{ \sup_{G_{T^*}} |V_i| \right\} \leq 3\tilde{C} \max_{i=1,2,3} \left\{ \sup_{G_{T^*}} |v_i| \right\},$$

co oznacza, że odwzorowanie \mathcal{Q} jest zwężające.

Na mocy twierdzenia Banacha istnieje punkt stały odwzorowania \mathcal{Q} . W ten sposób dowiedliśmy istnienia jednoznacznego ciągłego rozwiązania układu (5.37) - (5.40) w prostokącie $G_{T^*} = [0, T^*] \times [0, l]$. Biorąc w następnym kroku jako czas początkowy T^* , pokazujemy istnienie rozwiązania w kolejnym prostokącie. Po skończonej liczbie kroków¹² otrzymujemy rozwiązanie w G_{T_0} .

5.2.2 Rozwiązania klasy C^1 układu (5.37)

Twierdzenie 5.5 *Dla współczynników układu (5.37) i warunków (5.38), (5.39), (5.40) założmy, że*

1. $D, b, B \in C^1(G_{T_0})$,
2. dla $(t, x) \in G_{T_0} : \xi_1(t, x) > 0, \quad \xi_2(t, x) < 0$,
3. ξ_3 spełnia warunki (5.41) - (5.42),
4. $u^0 \in C^1([0, l])$,
5. funkcja g_1 ma wahanie skończone na odcinku $[0, l]$ oraz jest prawostronnie ciągła w punkcie 0,

¹²Ze względu na założenia Twierdzenia 5.4, stałe C_L, C i $\mathcal{V}_0^l(g_i)_{i=1,2}$ są określone dla czasu T_0 .

6. funkcja g_2 ma wahanie skończone na odcinku $[0, l]$ oraz jest lewostronnie ciągła w punkcie l ,
7. $q_1(t, y), q_2(t, y) \in C^1([0, T_0] \times \mathbb{R})$ i są ograniczone wraz z pochodnymi,
8. zachodzi pierwszy warunek zgodności:

$$\begin{aligned} u_{b1}(0) &= u_1^0(0), \\ u_{b2}(0) &= u_2^0(l), \end{aligned}$$

9. zachodzi drugi warunek zgodności:

$$u_{b1,t}(0) + \xi_1(0, 0) u_{1,x}^0(0) = b_1(0, 0) + B_{11}(0, 0) u_1^0(0) + B_{12}(0, 0) u_2^0(0), \quad (5.64)$$

$$u_{b2,t}(0) + \xi_2(0, l) u_{2,x}^0(l) = b_2(0, l) + B_{21}(0, l) u_1^0(l) + B_{22}(0, l) u_2^0(l), \quad (5.65)$$

10. $K_i(t, x, u) \in C^1(G_{T_0} \times \mathbb{R}^3)$, $i = 1, 2$, oraz jest ograniczona wraz z pochodnymi,
11. pochodne cząstkowe $K_{i,t}$, K_{i,u_j} , $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$, spełniają warunek Lipschitza (ze stałą C_{L2}) ze względu na zmienną u , tzn.

$$\forall_{u, \tilde{u} \in \mathbb{R}^3} |K_{i,t}(t, x, u) - K_{i,t}(t, x, \tilde{u})| \leq C_{L2} \sum_{j=1}^3 |u_j - \tilde{u}_j|,$$

$$\forall_{u, \tilde{u} \in \mathbb{R}^3} |K_{i,u_j}(t, x, u) - K_{i,u_j}(t, x, \tilde{u})| \leq C_{L2} \sum_{j=1}^3 |u_j - \tilde{u}_j|.$$

Przy tych założeniach istnieje jednoznaczne rozwiązanie zagadnienia (5.37)-(5.40) klasy $C^1(G_{T_0})$.

Dowód. Idea dowodu Twierdzenia 5.5 jest taka sama jak Twierdzenia 5.4. Należy pokazać, że istnieje czas $T \in (0, T_0]$, dla którego odwzorowanie

$$\mathcal{Q} : C^1(G_{T_0}) \times C^1(G_{T_0}) \times C^1(G_{T_0}) \ni (u_1, u_2, u_3) \rightarrow (U_1, U_2, U_3) \in C^1(G_{T_0}) \times C^1(G_{T_0}) \times C^1(G_{T_0})$$

jest zwięzające, tzn.

$$\begin{aligned} & \max_{i=1,2,3} \left\{ \sup_{G_T} |U_i - \bar{U}_i|; \sup_{G_T} |U_{i,x} - \bar{U}_{i,x}|; \sup_{G_T} |U_{i,t} - \bar{U}_{i,t}| \right\} \leq \\ & \leq \tilde{C} \max_{i=1,2,3} \left\{ \sup_{G_T} |u_i - \bar{u}_i|; \sup_{G_T} |u_{i,x} - \bar{u}_{i,x}|; \sup_{G_T} |u_{i,t} - \bar{u}_{i,t}| \right\}, \end{aligned}$$

dla pewnej stałej \tilde{C} zależnej od czasu T i mającej tę własność, że $\tilde{C} \rightarrow 0$ gdy $T \rightarrow 0$.

Oznaczamy:

$$p_i = u_{i,x}, \quad P_i = U_{i,x}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Różniczkując równania układu (5.45)-(5.46)-(5.47) względem zmiennej x otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P_{1,t} + \xi_1 P_{1,x} &= -\xi_{1,x} P_1 + B_{11} p_1 + B_{12} p_2 + B_{13} P_3 + B_{11,x} u_1 + B_{12,x} u_2 + B_{13} U_3 + b_{1,x} \\ P_{2,t} + \xi_2 P_{2,x} &= -\xi_{2,x} P_2 + B_{21} p_1 + B_{22} p_2 + B_{23} P_3 + B_{21,x} u_1 + B_{22,x} u_2 + B_{23} U_3 + b_{2,x} \\ P_{3,t} + \xi_3 P_{3,x} &= -\xi_{3,x} P_3 + B_{31} p_1 + B_{32} p_2 + B_{33} P_3 + B_{31,x} u_1 + B_{32,x} u_2 + B_{33} u_3 + b_{3,x}. \end{aligned}$$

Z układem tym postępujemy tak samo jak z układem (5.45)-(5.46)-(5.47) z poprzedniego paragrafu, wykorzystując uzyskane tam oszacowania dla funkcji U_1, U_2, U_3 .

W przypadku pochodnej po czasie wystarczy skorzystać z równania (5.45) i z nierówności, które wcześniej otrzymamy dla P_1 i U_3 :

$$\sup_{G_T} |U_{1,t} - \bar{U}_{1,t}| \leq \sup_{G_{T_0}} |\xi_1| \cdot \sup_{G_T} |P_1 - \bar{P}_1| + C_B \left(\sup_{G_T} |u_1 - \bar{u}_1| + \sup_{G_T} |u_2 - \bar{u}_2| + \sup_{G_T} |U_3 - \bar{U}_3| \right).$$

Podobnie dla $U_{2,t}$ i $U_{3,t}$.

Przy różniczkowaniu warunku brzegowego korzystamy z poniższego lematu

Lemat 5.4 *Niech funkcja $f(x, y)$ określona w prostokącie $[a, b] \times [c, d]$ będzie ciągła względem x w przedziale $[a, b]$ przy dowolnie ustalonym y z przedziału $[c, d]$, natomiast funkcja $g(x)$ ma wachanie skończone w $[a, b]$. Załóżmy dalej, że w całym prostokącie istnieje pochodna cząstkowa $f_{,y}(x, y)$ ciągła jako funkcja dwu zmiennych. Wówczas przy dowolnym y z przedziału $[c, d]$ dla funkcji $J(y) = \int_a^b f(x, y) dg(x)$ zachodzi równość*

$$\frac{dJ}{dy} = \int_a^b f_{,y}(x, y) dg(x).$$

Dowód. Ciągłość funkcji f względem x i wachanie skończone funkcji g gwarantują istnienie całki $J(y) = \int_a^b f(x, y) dg(x)$. Dla $y = y_0$ - dowolnie ustalonej wartości z przedziału $[c, d]$ zapisujemy iloraz różnicowy

$$\frac{J(y_0 + h) - J(y_0)}{h} = \int_a^b \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h} dg(x).$$

Posługując się wzorem Lagrange'a przedstawiamy funkcję podcałkową w postaci

$$\frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h} = f_{,y}(x, y_0 + \theta h), \quad \theta \in (0, 1). \quad (5.66)$$

Funkcja $f_{,y}$ jest jednostajnie ciągła w $[a, b] \times [c, d]$, czyli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (\bar{x}, \bar{y}), (\bar{x}, \bar{y}) \in [a, b] \times [c, d] |\bar{x} - \bar{x}| < \delta \wedge |\bar{y} - \bar{y}| < \delta \Rightarrow |f_{,y}(\bar{x}, \bar{y}) - f_{,y}(\bar{x}, \bar{y})| < \varepsilon.$$

Przyjmijmy $\bar{x} = \bar{x} = x$, $\bar{y} = y_0$, $\bar{y} = y_0 + \theta h$ i weźmy $|h| < \delta$. Ze względu na równość (5.66) możemy powiedzieć, że dla wszystkich $x \in [a, b]$ jest

$$\left| \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h} - f_{,y}(x, y_0) \right| < \varepsilon,$$

czyli funkcja $f_{,y}(x, y_0 + \theta h)$ dla $h \rightarrow 0$ dąży jednostajnie względem x do funkcji granicznej $f_{,y}(x, y_0)$.

Dalej

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h} dg(x) - \int_a^b f_{,y}(x, y_0) dg(x) \right| \leq \\ & \leq \mathcal{V}_a^b(g) \max_{x \in [a, b]} \left| \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h} - f_{,y}(x, y_0) \right| < \mathcal{V}_a^b(g) \varepsilon. \end{aligned}$$

To dowodzi równości

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dy} \Big|_{y=y_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h} dg(x) = \int_a^b \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h} dg(x) \\ &= \int_a^b f_{,y}(x, y_0) dg(x). \end{aligned}$$

□

5.2.3 Układ liniowy z macierzą niediagonalną

W poprzednich paragrafach rozpatrzyliśmy przypadek układu z macierzą diagonalną, a więc układu w inwariantach Riemanna. Załóżmy teraz, że macierz A (o wymiarach $n \times n$) układu liniowego nie jest macierzą diagonalną:

$$A = \Gamma D L, \quad \Gamma = L^{-1}, \quad D = \text{diag} [\xi_1, \dots, \xi_n].$$

Niech w prostokącie G_{T_0} wartości własne odpowiadające liniowo niezależnym lewym wektorom własnym L_1, \dots, L_n będą następujące¹³:

$$\xi_1, \dots, \xi_{m_1} > 0, \quad \xi_{m_1+1}, \dots, \xi_{m_2} < 0,$$

gdzie $m_2 \leq n$. Pozostałe $n - m_2$ wartości własne spełniają warunek

$$\xi_i(t, 0) < 0 \quad \text{dla } t \in [0, T_0] \quad \text{lub} \quad \xi_i(t, 0) = 0 \quad \text{dla } t \in [0, T_0], \quad i = m_2 + 1, \dots, n \quad (5.67)$$

oraz

$$\xi_i(t, l) > 0 \quad \text{dla } t \in [0, T_0] \quad \text{lub} \quad \xi_i(t, l) = 0 \quad \text{dla } t \in [0, T_0], \quad i = m_2 + 1, \dots, n. \quad (5.68)$$

Dlatego przyjmujemy jedynie m_1 warunków na brzegu dla $x = 0$:

$$F_j(t, u(t, 0), \varphi_j(t)) = 0, \quad \text{gdzie } \varphi_j(t) = \int_0^l K_j(t, y, u(t, y)) dg_j(y), \quad j = 1, \dots, m_1, \quad (5.69)$$

oraz $m_2 - m_1$ warunków na drugim brzegu prostokąta G_{T_0} , czyli dla $x = l$:

$$F_j(t, u(t, l), \varphi_j(t)) = 0, \quad \text{gdzie } \varphi_j(t) = \int_0^l K_j(t, y, u(t, y)) dg_j(y), \quad j = m_1 + 1, \dots, m_2, \quad (5.70)$$

przy czym funkcje $F_j \in C^1(\mathbb{R}^{n+2})$, $j = 1, \dots, m_2$.

Nie ma warunków brzegowych ze względu na wartości własne ξ_i , $i = m_2 + 1, \dots, n$. Charakterystyki należące do rodzin z indeksami o numerach od $m_2 + 1$ do n wychodzą przez lewy i prawy brzeg lub są prostopadłe do osi OX.

Spełnione są ponadto warunki początkowe:

$$u(0, x) = u^0(x), \quad x \in [0, l]. \quad (5.71)$$

Aby uzyskać rozwiązanie klasy C^1 w całym prostokącie G_{T_0} , tzn. również na krzywych $x = \Phi_i(t)$, $i = 1, \dots, m_2$, przyjmujemy, że w punktach $(0, 0)$ i $(0, l)$ zachodzą dwa warunki zgodności. Rozważając warunek brzegowy (5.69) dla czasu $t = 0$ i początkowy dla $x = 0$ dostajemy pierwszy warunek zgodności w punkcie $(0, 0)$:

$$F_j(0, u^0(0), \varphi_j(0)) = 0, \quad \varphi_j(0) = \int_0^l K_j(0, y, u^0(y)) dg_j(y), \quad j = 1, \dots, m_1. \quad (5.72)$$

Podobnie w punkcie $(0, l)$:

$$F_j(0, u^0(l), \varphi_j(0)) = 0, \quad \varphi_j(0) = \int_0^l K_j(0, y, u^0(y)) dg_j(y), \quad j = m_1 + 1, \dots, m_2. \quad (5.73)$$

¹³Zakładamy, że ilość charakterystyk wchodzących zarówno przez lewy jak i przez prawy brzeg nie zmienia się.

W celu otrzymania drugiego warunku zgodności w punkcie $(0, 0)$ różniczkujemy (5.69) po t i podstawiamy $t = 0$:

$$F_{j,t}(0, u^0(0), \varphi_j(0)) + \sum_{i=1}^n F_{j,u_i}(0, u^0(0), \varphi_j(0)) \cdot u_{i,t}(0, 0) + F_{j,\varphi_j}(0, u^0(0), \varphi_j(0)) \cdot \varphi_{j,t}(0) = 0. \quad (5.74)$$

Do obliczenia pochodnej funkcji φ_j korzystamy z Lematu 5.4:

$$\varphi_{j,t} = \int_0^l K_{j,t}(t, y, u(t, y)) dg(y) + \int_0^l \sum_{i=1}^n K_{j,u_i}(t, y, u(t, y)) \cdot u_{i,t}(t, y) dg(y).$$

Następnie z układu wyznaczamy

$$u_{i,t}(0, 0) = b(0, 0) + B(0, 0) u^0(0) - A(0, 0) u_{,x}^0(0),$$

i podstawiamy do równości (5.74). W rezultacie otrzymujemy drugi warunek zgodności w punkcie $(0, 0)$ ($j = 1, \dots, m_1$):

$$\begin{aligned} & F_{j,t}(0, u^0(0), \varphi_j(0)) + \quad (5.75) \\ & + \sum_{i=1}^n F_{j,u_i}(0, u^0(0), \varphi_j(0)) \cdot \left(b(0, 0) + B(0, 0) u^0(0) - A(0, 0) u_{,x}^0(0) \right)_i + \\ & + F_{j,\varphi_j}(0, u^0(0), \varphi_j(0)) \left\{ \int_0^l K_{j,t}(0, y, u^0(y)) dg(y) + \right. \\ & \left. + \int_0^l \sum_{i=1}^n K_{j,u_i}(0, y, u^0(y)) \cdot \left(b(0, y) + B(0, y) u^0(y) - A(0, y) u_{,x}^0(y) \right)_i \right\} = 0. \end{aligned}$$

W punkcie $(0, l)$ będzie ($j = m_1 + 1, \dots, m_2$):

$$\begin{aligned} & F_{j,t}(0, u^0(l), \varphi_j(0)) + \quad (5.76) \\ & + \sum_{i=1}^n F_{j,u_i}(0, u^0(l), \varphi_j(0)) \cdot \left(b(0, l) + B(0, l) u^0(l) - A(0, l) u_{,x}^0(l) \right)_i + \\ & + F_{j,\varphi_j}(0, u^0(l), \varphi_j(0)) \left\{ \int_0^l K_{j,t}(0, y, u^0(y)) dg(y) + \right. \\ & \left. + \int_0^l \sum_{i=1}^n K_{j,u_i}(0, y, u^0(y)) \cdot \left(b(0, y) + B(0, y) u^0(y) - A(0, y) u_{,x}^0(y) \right)_i \right\} = 0. \end{aligned}$$

Przejdźcie do układu w inwariantach Riemanna polega na wprowadzeniu nowej funkcji niewiadomej r , która w sposób liniowy zależy od u :

$$r = Lu.$$

Zapisujemy układ warunków brzegowych (5.69)-(5.70) w postaci

$$F_j(t, \Gamma(t, 0) r(t, 0), \varphi_j(t)) = 0, \quad \varphi_j(t) = \int_0^l K_j(t, y, \Gamma(t, y) r(t, y)) dg_j(y), \quad (5.77)$$

$$j = 1, \dots, m_1,$$

$$F_j(t, \Gamma(t, l) r(t, l), \varphi_j(t)) = 0, \quad \varphi_j(t) = \int_0^l K_j(t, y, \Gamma(t, y) r(t, y)) dg_j(y), \quad (5.78)$$

$$j = m_1 + 1, \dots, m_2.$$

Z (5.77) można, na mocy twierdzenia o funkcji uwikłanej, w sposób jednoznaczny wyznaczyć inwarianty $r_1(t, 0), \dots, r_{m_1}(t, 0)$ oraz z (5.78) - inwarianty $r_{m_1+1}(t, l), \dots, r_{m_2}(t, l)$, jeśli spełnione są następujące warunki:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial r_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial r_{m_1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_{m_1}}{\partial r_1} & \cdots & \frac{\partial F_{m_1}}{\partial r_{m_1}} \end{bmatrix} \neq 0, \quad \text{dla } x = 0,$$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{m_1+1}}{\partial r_{m_1+1}} & \cdots & \frac{\partial F_{m_1+1}}{\partial r_{m_2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_{m_2}}{\partial r_{m_1+1}} & \cdots & \frac{\partial F_{m_2}}{\partial r_{m_2}} \end{bmatrix} \neq 0, \quad \text{dla } x = l,$$

czyli

$$\det \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial u_k} \Gamma_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial u_k} \Gamma_{km_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_{m_1}}{\partial u_k} \Gamma_{k,1} & \cdots & \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_{m_1}}{\partial u_k} \Gamma_{km_1} \end{bmatrix} \neq 0, \quad \text{dla } x = 0, \quad (5.79)$$

$$\det \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_{m_1+1}}{\partial u_k} \Gamma_{km_1+1} & \cdots & \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_{m_1+1}}{\partial u_k} \Gamma_{km_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_{m_2}}{\partial u_k} \Gamma_{km_1+1} & \cdots & \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_{m_2}}{\partial u_k} \Gamma_{km_2} \end{bmatrix} \neq 0, \quad \text{dla } x = l. \quad (5.80)$$

Warunki brzegowe, które otrzymamy dla funkcji r będą postaci

$$r_j(t, 0) = q_j \left(t, r_{m_1+1}(t, 0), \dots, r_n(t, 0), \int_0^l K_1(t, y, \Gamma(t, y) r(t, y)) dg_1(y), \dots, \int_0^l K_{m_2}(t, y, \Gamma(t, y) r(t, y)) dg_{m_2}(y) \right),$$

$$j = 1, \dots, m_1 \quad (5.81)$$

$$r_j(t, l) = q_j \left(t, r_1(t, l), \dots, r_{m_1}(t, l), r_{m_2+1}(t, l), \dots, r_n(t, l), \int_0^l K_1(t, y, \Gamma(t, y) r(t, y)) dg_1(y), \dots, \int_0^l K_{m_2}(t, y, \Gamma(t, y) r(t, y)) dg_{m_2}(y) \right),$$

$$j = m_1 + 1, \dots, m_2, \quad (5.82)$$

gdzie funkcje $q_j \in C^1(\mathbb{R}^{n+1+m_2-m_1})$, $j = 1, \dots, m_2$.

Mimo, że warunki brzegowe zależą od wielu całek, to jednak nie stanowi to większego problemu poza złożonością notacji i dowód istnienia rozwiązania ciągłego oraz różniczkowalnego w sposób ciągły przebiega analogicznie do dowodu istnienia rozwiązania zagadnienia z diagonalną macierzą układu. Ponadto wykorzystujemy w nim, podobnie jak w problemie Cauchy'ego (2.1)-(2.2), Lemat 2.2.

Twierdzenie 5.6 Niech współczynniki układu liniowego $u_t + Au_x = b + Bu$ i warunki początkowe (5.71) oraz brzegowe (5.69), (5.70) spełniają

1. $D, b, B \in C^1(G_{T_0})$,

2. dla $(t, x) \in G_{T_0} : \xi_i(t, x) > 0, \quad i = 1, \dots, m_1, \quad \xi_i(t, x) < 0, \quad i = m_1 + 1, \dots, m_2,$
3. dla $\xi_i, i = m_2 + 1, \dots, n$ zachodzi (5.67), (5.68),
4. $u^0 \in C^1([0, l]),$
5. funkcje $g_i, i = 1, \dots, m_1,$ mają wahanie skończone na odcinku $[0, l]$ oraz są prawostronnie ciągłe w punkcie 0,
6. funkcje $g_i, i = m_1 + 1, \dots, m_2,$ mają wahanie skończone na odcinku $[0, l]$ oraz są lewostronnie ciągłe w punkcie $l,$
7. $q_i(t, y) \in C^1([0, T_0] \times \mathbb{R}), i = 1, \dots, m_2,$ i są ograniczone wraz z pochodnymi,
8. zachodzą warunki zgodności (5.72), (5.73), (5.75), (5.76) ,
9. $K_i(t, x, u) \in C^1(G_{T_0} \times \mathbb{R}^n), i = 1, \dots, m_2,$ oraz jest ograniczona wraz z pochodnymi,
10. pochodne cząstkowe $K_{i,t}, K_{i,u_j}, i = 1, \dots, m_2, j = 1, \dots, n,$ spełniają warunek Lipschitza (ze stałą C_{L2}) ze względu na zmienną $u,$ tzn.

$$\forall_{u, \tilde{u} \in \mathbb{R}^n} |K_{i,t}(t, x, u) - K_{i,t}(t, x, \tilde{u})| \leq C_{L2} \sum_{i=1}^n |u_i - \tilde{u}_i|,$$

$$\forall_{u, \tilde{u} \in \mathbb{R}^n} |K_{i,u_j}(t, x, u) - K_{i,u_j}(t, x, \tilde{u})| \leq C_{L2} \sum_{i=1}^n |u_i - \tilde{u}_i|,$$

11. zachodzą warunki (5.79) i (5.80).

Wtedy istnieje jednoznaczne rozwiązanie klasy $C^1(G_{T_0})$ tego zagadnienia.

5.3 Zagadnienie mieszane dla układu quasi-liniowego z funkcjonalną zależnością współczynników i warunku brzegowego od rozwiązania

Dla hiperbolicznego układu równań quasi-liniowych z rozdziału 4 postaci

$$u_{,t} + A[u]u_{,x} = b[u], \quad (5.83)$$

z warunkiem początkowym

$$u(0, x) = u^0(x), \quad x \in [0, l], \quad (5.84)$$

założmy, że spełnione są założenia Twierdzenia 4.2 z rozdziału 4 dla współczynników określonych w kuli $B_r^1(u^0)$ z przestrzeni Banacha

$$X_1 = \{u \in C^1([0, l]); \|u\|_1 := \|u\|_0 + \|u_{,x}\|_0 < \infty\}.$$

Podobnie niech X_0 oznacza przestrzeń Banacha

$$X_0 = \left\{ u \in C([0, l]); \|u\|_0 := \sup_{x \in [0, l]} \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} < \infty \right\}.$$

Zakładamy zatem, że dla $t \in [0, T_0]$ zachodzi:

- (A₁) $K : B_r^1(u^0) \rightarrow X_1$ i dla pewnej stałej $C < \infty$: $\|K[v]\|_1 \leq C$ dla dowolnego $v \in B_r^1(u^0)$, gdzie K oznacza L, Γ, D, Z ($Z = Lb$).
- (A₂) L jest ciągłym nieliniowym operatorem, $L : B_r^1(u^0) \rightarrow X_1$. Zakładamy, że L jest różniczkowalny w sensie Fréchet'a i dodatkowo przyjmujemy, że pochodna $L' : X_1 \rightarrow X_1$ może być rozszerzona w sposób ciągły na całą przestrzeń X_0 , tzn.
 $\exists C > 0 \forall v \in B_r^1(u^0) \forall h \in X_1 \|L'(v)h\|_0 \leq C \|h\|_0$.
- (A₃) $L[v]$ jest klasy C^1 ze względu na parametr t i istnieje stała C taka, że $\|\frac{\partial}{\partial t} L[v]\|_0 \leq C$, $v \in B_r^1(u^0)$.
- (A₄) Dla $|x - \bar{x}| \leq \delta$ i dla każdego $v \in B_r^1(u^0)$, istnieje stała C i funkcja $N(\delta)$, $N(\delta) \rightarrow 0$ jeśli $\delta \rightarrow 0$ taka, że

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} K[v](t, x) - \frac{\partial}{\partial x} K[v](t, \bar{x}) \right| \leq C |v_{,x}(x) - v_{,x}(\bar{x})| + C |v(x) - v(\bar{x})| + N(\delta),$$

gdzie K oznacza L, D, Z . $|\cdot|$ - metryka euklidesowa.

- (A₅) Istnieje stała C , że $\|K[v] - K[\bar{v}]\|_0 \leq C \|v - \bar{v}\|_0$ dla $v \in B_r^1(u^0)$, gdzie K symbolizuje L, Γ, D, Z .

Sprawdzenie założeń (A₁) – (A₅) dla układu standardowego znajduje się w dodatku C.

Dla wszystkich u z kuli $B_r^1(u^0)$ i $(t, x) \in G_{T_0}$ przyjmujemy:

$$\begin{aligned} \xi_i[u](t, x) &> 0, & i = 1, \dots, m_1 \\ \xi_i[u](t, x) &< 0, & i = m_1 + 1, \dots, m_2, \quad m_2 \leq n, \end{aligned}$$

Pozostałe $\xi_i[u]$ ($i = m_2 + 1, \dots, n$) wartości własne macierzy $A[u]$ spełniają warunek

$$\xi_i[u](t, 0) < 0 \quad \text{dla } t \in [0, T_0] \quad \text{lub} \quad \xi_i[u](t, 0) = 0 \quad \text{dla } t \in [0, T_0], \quad (5.85)$$

oraz

$$\xi_i[u](t, l) > 0 \quad \text{dla } t \in [0, T_0] \quad \text{lub} \quad \xi_i[u](t, l) = 0 \quad \text{dla } t \in [0, T_0]. \quad (5.86)$$

Oznacza to, że żadna charakterystyka i -tej rodziny ($i = m_2 + 1, \dots, n$) nie wchodzi przez lewy lub prawy brzeg prostokąta G_{T_0} . Stąd zakładamy m_1 warunków na brzegu $x = 0$:

$$F_j(t, u(t, 0), \varphi_j(t)) = 0, \quad \text{gdzie } \varphi_j(t) = \int_0^l K_j(t, y, u(t, y)) dg_j(y), \quad j = 1, \dots, m_1, \quad (5.87)$$

oraz $m_2 - m_1$ warunków dla $x = l$:

$$F_j(t, u(t, l), \varphi_j(t)) = 0, \quad \text{gdzie } \varphi_j(t) = \int_0^l K_j(t, y, u(t, y)) dg_j(y), \quad j = m_1 + 1, \dots, m_2, \quad (5.88)$$

Funkcje $F_j \in C^1(\mathbb{R}^{n+2})$, $j = 1, \dots, m_2$.

Warunki zgodności są następujące

$$F_j(0, u^0(0), \varphi_j(0)) = 0, \quad j = 1, \dots, m_1, \quad (5.89)$$

$$F_j(0, u^0(l), \varphi_j(0)) = 0, \quad j = m_1 + 1, \dots, m_2, \quad (5.90)$$

$$F_{j,t}(0, u^0(0), \varphi_j(0)) + \quad (5.91)$$

$$+ \sum_{i=1}^n F_{j,u_i}(0, u^0(0), \varphi_j(0)) \cdot \left(b[u^0](0) - A[u^0](0) u_{,x}^0(0) \right)_i +$$

$$+ F_{j,\varphi_j}(0, u^0(0), \varphi_j(0)) \left\{ \int_0^l K_{j,t}(0, y, u^0(y)) dg(y) + \right.$$

$$\left. + \int_0^l \sum_{i=1}^n K_{j,u_i}(0, y, u^0(y)) \cdot \left(b[u^0](y) - A[u^0](y) u_{,x}^0(y) \right)_i \right\} = 0, \quad j = 1, \dots, m_1$$

$$F_{j,t}(0, u^0(l), \varphi_j(0)) + \quad (5.92)$$

$$+ \sum_{i=1}^n F_{j,u_i}(0, u^0(l), \varphi_j(0)) \cdot \left(b[u^0](l) - A[u^0](l) u_{,x}^0(l) \right)_i +$$

$$+ F_{j,\varphi_j}(0, u^0(l), \varphi_j(0)) \left\{ \int_0^l K_{j,t}(0, y, u^0(y)) dg(y) + \right.$$

$$\left. + \int_0^l \sum_{i=1}^n K_{j,u_i}(0, y, u^0(y)) \cdot \left(b[u^0](y) - A[u^0](y) u_{,x}^0(y) \right)_i \right\} = 0, \quad j = m_1 + 1, \dots, m_2$$

Zakładamy również, że dla $x = 0$:

$$\det \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial u_k} \Gamma_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial u_k} \Gamma_{km_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_{m_1}}{\partial u_k} \Gamma_{k,1} & \cdots & \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_{m_1}}{\partial u_k} \Gamma_{km_1} \end{bmatrix} \neq 0, \quad (5.93)$$

oraz dla $x = l$

$$\det \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_{m_1+1}}{\partial u_k} \Gamma_{km_1+1} & \cdots & \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_{m_1+1}}{\partial u_k} \Gamma_{km_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_{m_2}}{\partial u_k} \Gamma_{km_1+1} & \cdots & \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_{m_2}}{\partial u_k} \Gamma_{km_2} \end{bmatrix} \neq 0. \quad (5.94)$$

Twierdzenie 5.7 *Załóżmy, że spełnione są założenia $(A_1) - (A_5)$. Wówczas zagadnienie (5.83) - (5.88) posiada lokalnie w czasie, jednoznaczne rozwiązanie klasy C^1 .*

Dowód istnienia rozwiązania zagadnienia mieszane będzie przebiegał podobnie do dowodu zagadnienia Cauchy'ego. Nie możemy bowiem postąpić tak jak dla układu liniowego, tzn. nie możemy w sensie normy C^1 pokazać, że odwzorowanie jest zwężające, ponieważ prawa strona układu przedłużonego nie spełnia warunku Lipschitza względem u w tej przestrzeni.

Przeanalizujemy poszczególne etapy dowodu z rozdziału 4, zwracając uwagę na techniczne różnice związane z pojawieniem się warunku brzegowego. Zaczniemy od dowodu jednoznaczności rozwiązania. Następnie przejdziemy do wykazania istnienia. Zastosujemy metodę kolejnych przybliżeń. Utworzymy ciąg liniowych układów przedłużonych. Pokażemy jednostajną zbieżność ciągu $\{u^{(s)}\}$ w przestrzeni Banacha $C([0, t_*] \times [0, l])$. Kolejnym etapem będzie jednostajna zbieżność ciągu $\{p^{(s)}\}$ (gdzie $p^{(s)} = L^{(s)} u_{,x}^{(s-1)}$) względem x na odcinku $[0, l]$ dla ustalonego $t \in [0, t_*]$.

Udowodnimy, że wyrazy ciągu $\{p^{(s)}\}$ są jednakowo ciągłe względem x przy ustalonym t . Z twierdzenia Arzeli-Ascoliego, z każdego wspólnie ograniczonego i jednakowo ciągłego ciągu funkcji można wybrać podciąg zbieżny jednostajnie, co oznacza, że pewien podciąg $\{p^{(s_k)}\}$ będzie zbiegał jednostajnie względem x na $[0, l]$ (przy ustalonym t) do ciągłej funkcji $p(t, x)$.

Zacznijmy od warunków brzegowych dla układu przedłużonego. Różniczkując (5.87) względem t dostajemy dla $j = 1, \dots, m_1$ w punkcie $(t, 0)$:

$$F_{j,t}(t, u(t, 0), \varphi_j(t)) + \sum_{i=1}^n F_{j,u_i}(t, u(t, 0), \varphi_j(t)) \cdot u_{i,t}(t, 0) + F_{j,\varphi_j}(t, u(t, 0), \varphi_j(t)) \cdot \varphi_{j,t}(t) = 0.$$

Zastępujemy $u_{i,t}$ wyrażeniem, które otrzymujemy z układu (5.83)

$$u_{i,t}(t, 0) = b_i[u](t, 0) - \Gamma_i[u](t, 0) D[u](t, 0) p(t, 0).$$

Stąd

$$\sum_{i=1}^n F_{j,u_i}(\Gamma D p)_i = F_{j,t} + \sum_{i=1}^n F_{j,u_i} b_i + F_{j,\varphi_j} \int_0^l \left(K_{j,u_i} + \sum_{i=1}^n K_{j,u_i} (b - \Gamma D p)_i \right) dg_j(y).$$

Dzięki założeniu (5.93), na mocy twierdzenia o funkcji uwikłanej można wyznaczyć inwarianty $p_1(t, 0), \dots, p_{m_1}(t, 0)$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_1(t, 0) \\ \vdots \\ p_{m_1}(t, 0) \end{bmatrix} &= \left\{ [F_{j,u_i}]_{\substack{j=1, \dots, m_1 \\ i=1, \dots, n}} D [\Gamma_{ij}]_{\substack{j=1, \dots, m_1 \\ i=1, \dots, n}} \right\}_{(t,0)}^{-1} \times \\ &\times \left\{ \begin{bmatrix} F_{1,t} \\ \vdots \\ F_{m_1,t} \end{bmatrix} + [F_{j,u_i}]_{\substack{j=1, \dots, m_1 \\ i=1, \dots, n}} b + \right. \\ &+ \begin{bmatrix} F_{1,\varphi_1} \int_0^l \left(K_{1,t} + \sum_{i=1}^n K_{1,u_i} (b - \Gamma D p)_i \right) dg_1(y) \\ \vdots \\ F_{m_1,\varphi_{m_1}} \int_0^l \left(K_{m_1,t} + \sum_{i=1}^n K_{m_1,u_i} (b - \Gamma D p)_i \right) dg_{m_1}(y) \end{bmatrix} \\ &\left. - [F_{j,u_i}]_{\substack{j=1, \dots, m_1 \\ i=1, \dots, n}} D [\Gamma_{ij}]_{\substack{j=m_1+1, \dots, n \\ i=1, \dots, n}} \begin{bmatrix} p_{m_1+1} \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \right\}_{(t,0)} \end{aligned} \quad (5.95)$$

Podobnie jest dla inwariantów $p_{m_1+1}(t, l), \dots, p_{m_2}(t, l)$.

W tym paragrafie przyjmujemy konwencję zapisu z rozdziału 4: $\bar{L} = L[\bar{u}]$ i podobnie dla pozostałych operatorów.

Wprowadzamy następujące oznaczenia dla zbiorów:

- $i = 1, \dots, m_1$

$$\begin{aligned} G_{piT_0} &= \{(t, x) \in G_{T_0} : x \geq \Phi_i(t)\}, \\ G_{biT_0} &= \{(t, x) \in G_{T_0} : x \leq \Phi_i(t)\}, \end{aligned}$$

- $i = m_1 + 1, \dots, m_2$

$$\begin{aligned} G_{piT_0} &= \{(t, x) \in G_{T_0} : x \leq \Phi_i(t)\}, \\ G_{biT_0} &= \{(t, x) \in G_{T_0} : x \geq \Phi_i(t)\}, \end{aligned}$$

- $i = m_2 + 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} G_{piT_0} &= G_{T_0}, \\ G_{biT_0} &= \emptyset, \end{aligned}$$

gdzie $x = \Phi_i(t)$ jest charakterystyką startującą z punktu $(0, 0)$ dla $i = 1, \dots, m_1$ albo z punktu $(0, l)$ - dla $i = m_1 + 1, \dots, m_2$.

Jednoznaczność

Załóżmy, że w obszarze określoności zagadnienia mieszanego (5.83) - (5.88) istnieją dwa różne rozwiązania: $u(t, x)$ i $\bar{u}(t, x)$. Niech, tak jak w rozdziale 4 na stronie 60, \bar{v} oznacza

$$\bar{v} = \bar{L} v.$$

Funkcja \bar{v} spełnia następujący układ równań całkowych:

- jeśli $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{piT_0}$, $i = 1, \dots, n$, to bierzemy pod uwagę warunek początkowy $\bar{v}_i(0, x) = 0$

$$\begin{aligned} \bar{v}_i(\bar{t}, \bar{x}) &= \int_0^{\bar{t}} (\mathcal{P}_t Z - \mathcal{P}_t \bar{Z})_i dt - \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left((L - \bar{L}) u_{,t} \right)_i dt - \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left((DL - \bar{D}\bar{L}) u_{,x} \right)_i dt \\ &\quad + \int_0^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left((L_{,t}[\bar{u}] + L'(\bar{u}; \bar{b} - \bar{\Gamma} \bar{D} \bar{p}) + \bar{D} \frac{\partial}{\partial x} \bar{L}) \bar{\Gamma} \bar{v} \right)_i dt, \end{aligned}$$

- jeśli $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{biT_0}$, $i = 1, \dots, n$ wówczas uwzględniamy warunek brzegowy i dla $i = 1, \dots, m_1$:

$$\begin{aligned} \bar{v}_i(\bar{t}, \bar{x}) &= \bar{v}_i(\sigma_i, 0) + \\ &\quad + \int_{\sigma_i}^{\bar{t}} (\mathcal{P}_t Z - \mathcal{P}_t \bar{Z})_i dt - \int_{\sigma_i}^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left((L - \bar{L}) u_{,t} \right)_i dt - \int_{\sigma_i}^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left((DL - \bar{D}\bar{L}) u_{,x} \right)_i dt \\ &\quad + \int_{\sigma_i}^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left((L_{,t}[\bar{u}] + L'(\bar{u}; \bar{b} - \bar{\Gamma} \bar{D} \bar{p}) + \bar{D} \frac{\partial}{\partial x} \bar{L}) \bar{\Gamma} \bar{v} \right)_i dt, \end{aligned}$$

natomiast dla $i = m_1 + 1, \dots, m_2$:

$$\begin{aligned} \bar{v}_i(\bar{t}, \bar{x}) &= \bar{v}_i(\sigma_i, l) + \\ &\quad + \int_{\sigma_i}^{\bar{t}} (\mathcal{P}_t Z - \mathcal{P}_t \bar{Z})_i dt - \int_{\sigma_i}^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left((L - \bar{L}) u_{,t} \right)_i dt - \int_{\sigma_i}^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left((DL - \bar{D}\bar{L}) u_{,x} \right)_i dt \\ &\quad + \int_{\sigma_i}^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left((L_{,t}[\bar{u}] + L'(\bar{u}; \bar{b} - \bar{\Gamma} \bar{D} \bar{p}) + \bar{D} \frac{\partial}{\partial x} \bar{L}) \bar{\Gamma} \bar{v} \right)_i dt, \end{aligned}$$

Zauważmy, że zachodzą następujące oszacowania

$$|\bar{v}_i(\sigma_i, 0)| \leq \tilde{C}(\bar{t}) \sup_{t \in [0, \bar{t}]} \|\bar{v}(t, x)\|_0, \quad i = 1, \dots, m_1 \quad (5.96)$$

$$|\bar{v}_i(\sigma_i, l)| \leq \tilde{C}(\bar{t}) \sup_{t \in [0, \bar{t}]} \|\bar{v}(t, x)\|_0, \quad i = m_1 + 1, \dots, m_2 \quad (5.97)$$

dla pewnej nieujemnej stałej \tilde{C} zależnej od czasu \bar{t} i takiej, że $\tilde{C} \rightarrow 0$, gdy $\bar{t} \rightarrow 0$. Obie nierówności uzyskujemy postępując tak jak w przypadku wzoru (5.58) dla układu liniowego.

Dla $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{piT_0}$, $i = 1, \dots, n$, zachodzi oszacowanie (4.28), czyli

$$|\bar{v}_i(\bar{t}, x)| \leq C_3 \int_0^{\bar{t}} \|\bar{v}(t, x)\|_0 dt. \quad (5.98)$$

ze stałą C_3 określoną na stronie 62. Na podstawie (5.96), (5.97), (5.98) otrzymujemy dla dowolnego $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{T_0}$

$$\sup_{t \in [0, \bar{t}]} \|\bar{v}(\bar{t}, x)\|_0 \leq \tilde{C}(\bar{t}) \sup_{t \in [0, \bar{t}]} \|\bar{v}(t, x)\|_0 + C_3 \int_0^{\bar{t}} \|\bar{v}(t, x)\|_0 dt. \quad (5.99)$$

Jeśli czas \bar{t} spełnia warunek

$$\tilde{C}(\bar{t}) < 1, \quad (5.100)$$

to (5.99) możemy przekształcić do postaci

$$\sup_{t \in [0, \bar{t}]} \|\bar{v}(\bar{t}, x)\|_0 \leq \frac{C_3}{1 - \tilde{C}} \int_0^{\bar{t}} \|\bar{v}(t, x)\|_0 dt,$$

z której na mocy lematu Gronwalla wnioskujemy, że

$$\sup_{t \in [0, \bar{t}]} \|\bar{v}(\bar{t}, x)\|_0 = 0.$$

Oznacza to jednoznaczność rozwiązania dla $t \in [0, \bar{t}]$, gdzie \bar{t} jest obciążone warunkiem (5.100). Biorąc następnie \bar{t} jako czas początkowy możemy powtórzyć rozumowanie i otrzymać jednoznaczność dla następnego odcinka czasu. Postępujemy tak, aż do momentu, gdy osiągniemy maksymalny czas istnienia rozwiązania. Będzie to możliwe, ponieważ wszystkie stałe z szacowań na stronie 61 nie zmieniają się w obszarze określoności zagadnienia (5.83) - (5.88).

Istnienie

Istnienie rozwiązania dowodzimy korzystając z metody kolejnych przybliżeń. Zgodnie z umową z rozdziału 4 będziemy pisali $\overset{(s)}{L}$ zamiast $L[\overset{(s)}{u}]$ i podobnie dla pozostałych operatorów. Definiujemy ciąg kolejnych przybliżeń w postaci liniowego układu z warunkiem początkowym i brzegowym:

$$\begin{aligned} \overset{(0)}{u}(t, x) &= u^0(x) \\ \overset{(s)}{L} \overset{(s+1)}{u}_{,t} + \overset{(s)}{D} \overset{(s)}{L} \overset{(s+1)}{u}_{,x} &= \overset{(s)}{Z} \\ \overset{(s+1)}{u}(0, x) &= u^0(x) \\ F_j(t, \overset{(s+1)}{u}(t, 0), \varphi_j(t)) &= 0, \quad j = 1, \dots, m_1 \\ F_j(t, \overset{(s+1)}{u}(t, l), \varphi_j(t)) &= 0, \quad j = m_1 + 1, \dots, m_2, \end{aligned}$$

gdzie $\varphi_j(t) = \int_0^l K_j(t, y, \overset{(s+1)}{u}(t, y)) dg_j(y)$.

Na mocy Twierdzenia 5.6 dla każdego $s = 0, 1, 2, \dots$, układ posiada jednoznaczne rozwiązanie $\overset{(s+1)}{u}$ klasy C^1 i jest ono określone dla $t \in [0, t_*)$, gdzie t_* jest zdefiniowane wzorem (4.20) na stronie 59.

Jednostajna zbieżność ciągu $\{\overset{(s)}{u}\}$

Funkcja $\overset{(s+1)}{r}_i(t, x) = \overset{(s)}{L}_i \left(\overset{(s+1)}{u} - \overset{(s)}{u} \right)$, $s = 0, 1, \dots$, $i = 1, \dots, n$, spełnia układ równań całkowych (4.38) dla $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{piT_0}$. Natomiast dla $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{biT_0}$ mamy:

- jeśli $i = 1, \dots, m_1$

$$\begin{aligned}
{}^{(s+1)}r_i(\bar{t}, \bar{x}) &= {}^{(s+1)}r_i(\sigma_i, 0) + \\
&+ \int_{\sigma_i}^{\bar{t}} \left(\mathcal{P}_t \overset{(s)}{Z} - \mathcal{P}_t \overset{(s-1)}{Z} \right)_i dt \\
&+ \int_{\sigma_i}^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(L_{,t}[\overset{(s)}{u}] \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s+1)}{r} \right)_i dt \\
&+ \int_{\sigma_i}^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(L' \left(\overset{(s)}{u}; \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s)}{Z} - \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s)}{D} \overset{(s)}{p} \right) \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s+1)}{r} \right)_i dt \\
&+ \int_{\sigma_i}^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(\overset{(s)}{D} \left(\frac{\partial}{\partial x} \overset{(s)}{L} \right) \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s+1)}{r} \right)_i dt \\
&- \int_{\sigma_i}^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(\left(\overset{(s)}{L} - \overset{(s-1)}{L} \right) \overset{(s)}{u}_{,t} \right)_i dt \\
&- \int_{\sigma_i}^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(\left(\overset{(s)}{D} \overset{(s)}{L} - \overset{(s-1)}{D} \overset{(s-1)}{L} \right) \overset{(s)}{u}_{,x} \right)_i dt,
\end{aligned} \tag{5.101}$$

- oraz gdy $i = m_1 + 1, \dots, m_2$

$$\begin{aligned}
{}^{(s+1)}r_i(\bar{t}, \bar{x}) &= {}^{(s+1)}r_i(\sigma_i, l) + \\
&+ \int_{\sigma_i}^{\bar{t}} \left(\mathcal{P}_t \overset{(s)}{Z} - \mathcal{P}_t \overset{(s-1)}{Z} \right)_i dt \\
&+ \int_{\sigma_i}^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(L_{,t}[\overset{(s)}{u}] \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s+1)}{r} \right)_i dt \\
&+ \int_{\sigma_i}^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(L' \left(\overset{(s)}{u}; \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s)}{Z} - \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s)}{D} \overset{(s)}{p} \right) \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s+1)}{r} \right)_i dt \\
&+ \int_{\sigma_i}^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(\overset{(s)}{D} \left(\frac{\partial}{\partial x} \overset{(s)}{L} \right) \overset{(s)}{\Gamma} \overset{(s+1)}{r} \right)_i dt \\
&- \int_{\sigma_i}^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(\left(\overset{(s)}{L} - \overset{(s-1)}{L} \right) \overset{(s)}{u}_{,t} \right)_i dt \\
&- \int_{\sigma_i}^{\bar{t}} \mathcal{P}_t \left(\left(\overset{(s)}{D} \overset{(s)}{L} - \overset{(s-1)}{D} \overset{(s-1)}{L} \right) \overset{(s)}{u}_{,x} \right)_i dt,
\end{aligned} \tag{5.102}$$

Przekształcenia wzorowane na układzie liniowym z paragrafu 5.2.1 doprowadzą nas do nierówności

$$\left| {}^{(s+1)}r_i(\sigma_i, 0) \right| \leq \bar{C}(\bar{t}) \sup_{t \in [0, \bar{t}]} \| {}^{(s+1)}r(t, x) \|_0 + \bar{C} \int_0^{\bar{t}} \| \overset{(s)}{r}(t, x) \|_0 dt, \tag{5.103}$$

$$i = 1, \dots, m_1$$

$$\left| {}^{(s+1)}r_i(\sigma_i, l) \right| \leq \bar{C}(\bar{t}) \sup_{t \in [0, \bar{t}]} \| {}^{(s+1)}r(t, x) \|_0 + \bar{C} \int_0^{\bar{t}} \| \overset{(s)}{r}(t, x) \|_0 dt, \tag{5.104}$$

$$i = m_1 + 1, \dots, m_2,$$

z pewnymi nieujemnymi stałymi \bar{C} , \bar{C} . Stała \bar{C} zależy od czasu \bar{t} i $\bar{C} \rightarrow 0$, gdy $\bar{t} \rightarrow 0$. Dla układu (4.38), gdy $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{piT_0}$, $i = 1, \dots, n$, uzyskaliśmy odwzorowanie w postaci (4.39):

$$\left| {}^{(s+1)}r_i \right| \leq C_r \int_0^{\bar{t}} \| \overset{(s)}{r} \|_0 dt + C_r \int_0^{\bar{t}} \| \overset{(s+1)}{r} \|_0 dt. \tag{5.105}$$

Ze wzorów (5.101) i (5.102), dla $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{biT_0}$, $i = 1, \dots, m_2$, na podstawie (5.103) i (5.104) mamy:

$$|{}^{(s+1)}r_i(\bar{t}, \bar{x})| \leq \bar{C}(\bar{t}) \sup_{t \in [0, \bar{t}]} \|{}^{(s+1)}r(t, x)\|_0 + (C_r + \bar{C}) \int_0^{\bar{t}} \|{}^{(s)}r\|_0 dt + C_r \int_0^{\bar{t}} \|{}^{(s+1)}r\|_0 dt. \quad (5.106)$$

Z nierówności (5.105) i (5.106) wnioskujemy, że dla dowolnego $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{T_0}$ zachodzi

$$\sup_{t \in [0, \bar{t}]} \|{}^{(s+1)}r\|_0 \leq \bar{C}(\bar{t}) \sup_{t \in [0, \bar{t}]} \|{}^{(s+1)}r(t, x)\|_0 + (C_r + \bar{C}) \int_0^{\bar{t}} \|{}^{(s)}r\|_0 dt + C_r \int_0^{\bar{t}} \|{}^{(s+1)}r\|_0 dt.$$

Jeśli \bar{t} spełnia warunek

$$\bar{C}(\bar{t}) < 1, \quad (5.107)$$

wówczas

$$\sup_{t \in [0, \bar{t}]} \|{}^{(s+1)}r\|_0 \leq \frac{C_r + \bar{C}}{1 - \bar{C}(\bar{t})} \int_0^{\bar{t}} \|{}^{(s)}r\|_0 dt + \frac{C_r}{1 - \bar{C}(\bar{t})} \int_0^{\bar{t}} \|{}^{(s+1)}r\|_0 dt. \quad (5.108)$$

Niech

$$\bar{C}_r = \frac{C_r + \bar{C}}{1 - \bar{C}(\bar{t})}.$$

Nierówność (5.108) zapisujemy przy użyciu funkcji $Q^{(i)}(\bar{t}) = \max_{t \in [0, \bar{t}]} \|{}^{(i)}r(t, x)\|_0$ w postaci

$$Q^{(s+1)}(\bar{t}) \leq \bar{C}_r \int_0^{\bar{t}} Q^{(s)}(t) dt + \bar{C}_r \int_0^{\bar{t}} Q^{(s+1)}(t) dt,$$

która odpowiada formule (4.40). Dalsze rozumowanie przebiega tak jak na stronie 65 i w rezultacie dostajemy

$$Q^{(s+1)}(\bar{t}) \leq \frac{(C_4 \bar{t})^s}{s!} C_Q, \quad s = 0, 1, \dots \quad (5.109)$$

dla $C_4 = \bar{C}_r \exp(\bar{C}_r t_*)$.

Przypomnijmy, że czas \bar{t} musi spełniać warunek (5.107). Aby uzyskać (5.109) prawdziwe dla dowolnego $\bar{t} \in [0, t_*)$ należy przyjąć \bar{t} jako czas początkowy i dojść do nierówności typu (5.109) dla nowego przedziału czasu. Postępujemy w ten sposób do momentu, gdy (5.109) zachodzi dla $\bar{t} \in [0, t_*)$.

Nierówność (5.109) pozwala wywnioskować, że $\{u^{(s)}\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni Banacha $C([0, t_*) \times [0, l])$.

Jednostajna zbieżność ciągu $\{p^{(s)}\}$ względem x dla ustalonego t .

Ostatnia część dowodu dotyczy jednostajnej zbieżności ciągu $p^{(s)}$ względem x na odcinku $[0, l]$ przy ustalonym $t \in [0, t_*)$. Zaczynamy od wykazania jednakowej ciągłości funkcji ciągu $p^{(s)}$ ze względu na x dla $t \in [0, t_*)$. Pokażemy, że istnieje funkcja $\tilde{M}(\delta)$, $\tilde{M}(\delta) \rightarrow 0$ gdy $\delta \rightarrow 0$, która dla dowolnego ustalonego $t \in [0, t_*)$ i dowolnego s spełnia

$$\left| p^{(s+1)}(t, x) - p^{(s+1)}(t, \bar{x}) \right| \leq \tilde{M}(\delta), \quad \text{jeśli } |x - \bar{x}| \leq \delta. \quad (5.110)$$

Zauważmy najpierw, że dla $i = 1, \dots, n$ oraz $(\bar{t}, \bar{x}), (\bar{t}, \bar{x}) \in G_{piT_0}$ moduł ciągłości $\tilde{M}_1(\delta)$ może być wybrany w postaci (4.56), czyli

$$\tilde{M}_1(\delta) = N_0(\delta) e^{2C_{10} t_*} + \frac{t_*}{2} (N_u(\delta) + N(\delta) + N_L(\delta) + \delta) (e^{2C_{10} t_*} - 1).$$

Przyjmijmy umownie, że $\bar{\sigma}_i$ oznacza czas, dla którego do prostokąta G_{T_0} wchodzi i -ta charakterystyka przechodząca przez punkt (\bar{t}, \bar{x}) , natomiast $\bar{\bar{\sigma}}_i$ - czas, dla którego wchodzi i -ta charakterystyka przechodząca przez punkt $(\bar{t}, \bar{\bar{x}})$.

Jeśli $(\bar{t}, \bar{x}), (\bar{t}, \bar{\bar{x}}) \in G_{biT_0}$, $i = 1, \dots, m_1$ to uwzględniając warunek brzegowy dostajemy:

$$\begin{aligned}
{}^{(s+1)}p_i(\bar{t}, \bar{x}) - {}^{(s+1)}p_i(\bar{t}, \bar{\bar{x}}) &= {}^{(s+1)}p_i(\bar{\sigma}_i, 0) - {}^{(s+1)}p_i(\bar{\bar{\sigma}}_i, 0) + \\
&+ \int_{\bar{\sigma}_i}^{\bar{t}} \bar{\mathcal{P}}_t \left(\frac{\partial}{\partial x} {}^{(s)}Z - \left(\frac{\partial}{\partial x} {}^{(s)}L \right) \Gamma {}^{(s)}Z \right) dt \\
&- \int_{\bar{\bar{\sigma}}_i}^{\bar{t}} \bar{\bar{\mathcal{P}}}_t \left(\frac{\partial}{\partial x} {}^{(s)}Z - \left(\frac{\partial}{\partial x} {}^{(s)}L \right) \Gamma {}^{(s)}Z \right) dt \\
&+ \int_{\bar{\sigma}_i}^{\bar{t}} \bar{\mathcal{P}}_t \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} {}^{(s)}L \right) \Gamma D {}^{(s)}p \right) dt \\
&- \int_{\bar{\bar{\sigma}}_i}^{\bar{t}} \bar{\bar{\mathcal{P}}}_t \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} {}^{(s)}L \right) \Gamma D {}^{(s)}p \right) dt \\
&+ \int_{\bar{\sigma}_i}^{\bar{t}} \bar{\mathcal{P}}_t \left(L_{,t}[{}^{(s)}u] \Gamma {}^{(s)}p \right) dt \\
&- \int_{\bar{\bar{\sigma}}_i}^{\bar{t}} \bar{\bar{\mathcal{P}}}_t \left(L_{,t}[{}^{(s)}u] \Gamma {}^{(s)}p \right) dt \\
&+ \int_{\bar{\sigma}_i}^{\bar{t}} \bar{\mathcal{P}}_t \left(L' \left({}^{(s)}u; \Gamma {}^{(s)}Z - \Gamma D {}^{(s)}p \right) \Gamma {}^{(s+1)}p \right) dt \\
&- \int_{\bar{\bar{\sigma}}_i}^{\bar{t}} \bar{\bar{\mathcal{P}}}_t \left(L' \left({}^{(s)}u; \Gamma {}^{(s)}Z - \Gamma D {}^{(s)}p \right) \Gamma {}^{(s+1)}p \right) dt \\
&- \int_{\bar{\sigma}_i}^{\bar{t}} \bar{\mathcal{P}}_t \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} D \right) {}^{(s+1)}p \right) dt \\
&+ \int_{\bar{\bar{\sigma}}_i}^{\bar{t}} \bar{\bar{\mathcal{P}}}_t \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} D \right) {}^{(s+1)}p \right) dt,
\end{aligned} \tag{5.111}$$

gdzie operator podstawiania $\bar{\mathcal{P}}_t$ dotyczy charakterystyki przechodzącej przez punkt (\bar{t}, \bar{x}) , a $\bar{\bar{\mathcal{P}}}_t$ - charakterystyki przechodzącej przez $(\bar{t}, \bar{\bar{x}})$.

Zajmiemy się teraz tylko oszacowaniem różnicy ${}^{(s+1)}p_i(\bar{\sigma}_i, 0) - {}^{(s+1)}p_i(\bar{\bar{\sigma}}_i, 0)$, bowiem pozostałe składniki po prawej stronie wzoru (5.111) szacuje się tak samo jak dla zagadnienia początkowego z rozdziału 4, tzn. przez prawą stronę nierówności (4.52).

Metodą dodawania i odejmowania wyrażeń (tak, aby skorzystać z nierówności trójkąta dla normy oraz lipschitzowskości poszczególnych funkcji) dochodzimy do ($i = 1, \dots, m_1$):

$$\begin{aligned}
\left| {}^{(s+1)}p_i(\bar{\sigma}_i, 0) - {}^{(s+1)}p_i(\bar{\bar{\sigma}}_i, 0) \right| &\leq C_* \left| {}^{(s+1)}u(\bar{\sigma}_i, 0) - {}^{(s+1)}u(\bar{\bar{\sigma}}_i, 0) \right| \\
&+ C_* \sup_{y \in [0, l]} \left| {}^{(s+1)}u(\bar{\sigma}_i, y) - {}^{(s+1)}u(\bar{\bar{\sigma}}_i, y) \right| \\
&+ C_* \left| F_{,u}(\bar{\sigma}_i, {}^{(s+1)}u(\bar{\sigma}_i, 0), {}^{(s+1)}\varphi(\bar{\sigma}_i)) - F_{,u}(\bar{\bar{\sigma}}_i, {}^{(s+1)}u(\bar{\bar{\sigma}}_i, 0), {}^{(s+1)}\varphi(\bar{\bar{\sigma}}_i)) \right| \\
&+ C_* \left| F_{,t}(\bar{\sigma}_i, {}^{(s+1)}u(\bar{\sigma}_i, 0), {}^{(s+1)}\varphi(\bar{\sigma}_i)) - F_{,t}(\bar{\bar{\sigma}}_i, {}^{(s+1)}u(\bar{\bar{\sigma}}_i, 0), {}^{(s+1)}\varphi(\bar{\bar{\sigma}}_i)) \right| \\
&+ C_* \left| F_{,\varphi}(\bar{\sigma}_i, {}^{(s+1)}u(\bar{\sigma}_i, 0), {}^{(s+1)}\varphi(\bar{\sigma}_i)) - F_{,\varphi}(\bar{\bar{\sigma}}_i, {}^{(s+1)}u(\bar{\bar{\sigma}}_i, 0), {}^{(s+1)}\varphi(\bar{\bar{\sigma}}_i)) \right|
\end{aligned} \tag{5.112}$$

$$\begin{aligned}
& + C_* \left| \begin{bmatrix} p_{m_1+1}^{(s+1)}(\bar{\sigma}_i, 0) - p_{m_1+1}^{(s+1)}(\bar{\bar{\sigma}}_i, 0) \\ \vdots \\ p_n^{(s+1)}(\bar{\sigma}_i, 0) - p_n^{(s+1)}(\bar{\bar{\sigma}}_i, 0) \end{bmatrix} \right| \\
& + C_* \sum_{k=1}^{m_1} \int_0^l \left(p_k^{(s+1)}(\bar{\sigma}_i, y) - p_k^{(s+1)}(\bar{\bar{\sigma}}_i, y) \right) dg_i(y) \\
& + C_* \sum_{k=m_1+1}^n \int_0^l \left(p_k^{(s+1)}(\bar{\sigma}_i, y) - p_k^{(s+1)}(\bar{\bar{\sigma}}_i, y) \right) dg_i(y).
\end{aligned}$$

Stała C_* jest wybrana jako maksymalna wielkość spośród: $\max_{s=0,1,2,\dots} \left\{ \left| \frac{(s)}{D} \right|, \left| \frac{(s)}{\Gamma} \right|, \left| \frac{(s)}{Z} \right| \right\}$,

$$\max_{s=0,1,2,\dots} \left\{ \left| \frac{(s+1)}{K_{,t}} \right|, \left| \frac{(s+1)}{K_{,u}} \right| \right\}, \max_{s=0,1,2,\dots} \left\{ \left| \frac{(s+1)}{F_{,u}} \right|, \left| \frac{(s+1)}{F_{,t}} \right|, \left| \frac{(s+1)}{F_{,\varphi}} \right| \right\}, \max_{i=1,\dots,m_1} \mathcal{V}_0^l(g_i).$$

Funkcje $F_{,u}$, $F_{,t}$, $F_{,\varphi}$ są ciągłe na odcinku $[0, t_*)$. Dla dowolnego $s = 0, 1, 2, \dots$, $\frac{(s+1)}{u}$ jest ciągła na $[0, t_*) \times [0, l]$. Stąd wszystkie te funkcje są jednostajnie ciągłe na podanych zbiorach i istnieje taka funkcja $\tilde{N}(\delta)$, $\tilde{N}(\delta) \rightarrow 0$ dla $\delta \rightarrow 0$, że

- $\left| \frac{(s+1)}{u}(\bar{\sigma}_i, 0) - \frac{(s+1)}{u}(\bar{\bar{\sigma}}_i, 0) \right| \leq \tilde{N}(\delta) \quad \text{dla } |\bar{\sigma}_i - \bar{\bar{\sigma}}_i| \leq \delta,$
- $\sup_{y \in [0, l]} \left| \frac{(s+1)}{u}(\bar{\sigma}_i, y) - \frac{(s+1)}{u}(\bar{\bar{\sigma}}_i, y) \right| \leq \tilde{N}(\delta) \quad \text{dla } |\bar{\sigma}_i - \bar{\bar{\sigma}}_i| \leq \delta,$
- $\left| F_{,t}(\bar{\sigma}_i, \frac{(s+1)}{u}(\bar{\sigma}_i, 0), \frac{(s+1)}{\varphi}(\bar{\sigma}_i)) - F_{,t}(\bar{\bar{\sigma}}_i, \frac{(s+1)}{u}(\bar{\bar{\sigma}}_i, 0), \frac{(s+1)}{\varphi}(\bar{\bar{\sigma}}_i)) \right| \leq \tilde{N}(\delta) \quad \text{dla } |\bar{\sigma}_i - \bar{\bar{\sigma}}_i| \leq \delta$
- $\left| F_{,u}(\bar{\sigma}_i, \frac{(s+1)}{u}(\bar{\sigma}_i, 0), \frac{(s+1)}{\varphi}(\bar{\sigma}_i)) - F_{,u}(\bar{\bar{\sigma}}_i, \frac{(s+1)}{u}(\bar{\bar{\sigma}}_i, 0), \frac{(s+1)}{\varphi}(\bar{\bar{\sigma}}_i)) \right| \leq \tilde{N}(\delta) \quad \text{dla } |\bar{\sigma}_i - \bar{\bar{\sigma}}_i| \leq \delta$
- $\left| F_{,\varphi}(\bar{\sigma}_i, \frac{(s+1)}{u}(\bar{\sigma}_i, 0), \frac{(s+1)}{\varphi}(\bar{\sigma}_i)) - F_{,\varphi}(\bar{\bar{\sigma}}_i, \frac{(s+1)}{u}(\bar{\bar{\sigma}}_i, 0), \frac{(s+1)}{\varphi}(\bar{\bar{\sigma}}_i)) \right| \leq \tilde{N}(\delta) \quad \text{dla } |\bar{\sigma}_i - \bar{\bar{\sigma}}_i| \leq \delta$

gdzie

$$\begin{aligned}
F_{,u} & := [F_{j,u_i}]_{i=1,\dots,m_1} \\
F_{,t} & := [F_{1,t}, \dots, F_{m_1,t}]^T \\
F_{,\varphi} & := [F_{1,\varphi_1}, \dots, F_{m_1,\varphi_{m_1}}]^T.
\end{aligned}$$

Funkcje $\bar{\sigma}_i$ oraz $\bar{\bar{\sigma}}_i$ są klasy C^1 . Stąd dla pewnej nieujemnej stałej C_σ :

$$|\bar{\sigma}_i - \bar{\bar{\sigma}}_i| \leq C_\sigma |\bar{x} - \bar{\bar{x}}|.$$

Poszerzymy definicję stałej C_* o maksimum ze wszystkich danych funkcji występujących w układzie (4.47). Zauważmy dalej, że dla $k = m_1 + 1, \dots, n$ oraz $i = 1, \dots, m_1$, punkty $(\bar{\sigma}_i, 0), (\bar{\bar{\sigma}}_i, 0) \in G_{pkT_0}$. Dlatego na podstawie (4.47) zachodzi nierówność:

$$\left| p_k^{(s+1)}(\bar{\sigma}_i, 0) - p_k^{(s+1)}(\bar{\bar{\sigma}}_i, 0) \right| \leq C_* |\bar{\sigma}_i - \bar{\bar{\sigma}}_i| \leq C_* C_\sigma |\bar{x} - \bar{\bar{x}}|. \quad (5.113)$$

Rozważmy teraz sumę całek $\sum_{k=m_1+1}^n \int_0^l \left(\binom{s+1}{p_k} (\bar{\sigma}_i, y) - \binom{s+1}{p_k} (\bar{\bar{\sigma}}_i, y) \right) dg_i(y)$.

Ponieważ $(\bar{\sigma}_i, y), (\bar{\bar{\sigma}}_i, y) \in G_{pkT_0}$ dla $k = m_1 + 1, \dots, n$, oraz $i = 1, \dots, m_1$, więc podobnie jak dla (5.113):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=m_1+1}^n \left| \int_0^l \left(\binom{s+1}{p_k} (\bar{\sigma}_i, y) - \binom{s+1}{p_k} (\bar{\bar{\sigma}}_i, y) \right) dg_i(y) \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=m_1+1}^n \mathcal{V}_0^l(g_i) \max_{y \in [0, l]} \left| \binom{s+1}{p_k} (\bar{\sigma}_i, y) - \binom{s+1}{p_k} (\bar{\bar{\sigma}}_i, y) \right| \\ & \leq (n - m_1) \mathcal{V}_0^l(g_i) C_* |\bar{\sigma}_i - \bar{\bar{\sigma}}_i| \leq (n - m_1) \mathcal{V}_0^l(g_i) C_* C_\sigma |\bar{x} - \bar{\bar{x}}|. \end{aligned} \quad (5.114)$$

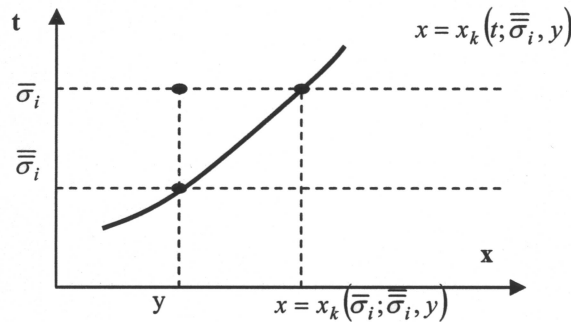
Założmy dalej bez utraty ogólności, że $\max \{\bar{\sigma}_i, \bar{\bar{\sigma}}_i\} = \bar{\sigma}_i$. Wtedy

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{m_1} \left| \int_0^l \left(\binom{s+1}{p_k} (\bar{\sigma}_i, y) - \binom{s+1}{p_k} (\bar{\bar{\sigma}}_i, y) \right) dg_i(y) \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^{m_1} \left| \int_0^{\Phi_k(\bar{\sigma}_i)} \left(\binom{s+1}{p_k} (\bar{\sigma}_i, y) - \binom{s+1}{p_k} (\bar{\bar{\sigma}}_i, y) \right) dg_i(y) \right| + \\ & \quad + \sum_{k=1}^{m_1} \left| \int_{\Phi_k(\bar{\sigma}_i)}^l \left(\binom{s+1}{p_k} (\bar{\sigma}_i, y) - \binom{s+1}{p_k} (\bar{\bar{\sigma}}_i, y) \right) dg_i(y) \right| \\ & \leq \sum_{k=1}^{m_1} \mathcal{V}_0^{\Phi_k(\bar{\sigma}_i)}(g_i) \max_{y \in [0, \Phi_k(\bar{\sigma}_i)]} \left| \binom{s+1}{p_k} (\bar{\sigma}_i, y) - \binom{s+1}{p_k} (\bar{\bar{\sigma}}_i, y) \right| \\ & \quad + \sum_{k=1}^{m_1} \mathcal{V}_0^l(g_i) \max_{y \in [\Phi_k(\bar{\sigma}_i), l]} \left| \binom{s+1}{p_k} (\bar{\sigma}_i, y) - \binom{s+1}{p_k} (\bar{\bar{\sigma}}_i, y) \right| \end{aligned} \quad (5.115)$$

Punkty $(\bar{\sigma}_i, y), (\bar{\bar{\sigma}}_i, y)$ dla $y \in [\Phi_k(\bar{\sigma}_i), l]$ należą do zbioru G_{pkT_0} , $i, k = 1, \dots, m_1$ i dlatego

$$\sum_{k=1}^{m_1} \mathcal{V}_0^l(g_i) \max_{y \in [\Phi_k(\bar{\sigma}_i), l]} \left| \binom{s+1}{p_k} (\bar{\sigma}_i, y) - \binom{s+1}{p_k} (\bar{\bar{\sigma}}_i, y) \right| \leq m_1 \mathcal{V}_0^l(g_i) C_* |\bar{\sigma}_i - \bar{\bar{\sigma}}_i| \leq m_1 \mathcal{V}_0^l(g_i) C_* C_\sigma |\bar{x} - \bar{\bar{x}}|.$$

Jeśli $y \in [0, \Phi_k(\bar{\sigma}_i)]$, $i, k = 1, \dots, m_1$, to $(\bar{\sigma}_i, y) \in G_{bkT_0}$, natomiast punkt $(\bar{\bar{\sigma}}_i, y)$ może należeć zarówno do G_{bkT_0} jak i G_{pkT_0} . Nie będzie to jednak istotne.



Rys. 5.6

Przekształćmy wyrażenie $\left| \binom{s+1}{p_k} (\bar{\sigma}_i, y) - \binom{s+1}{p_k} (\bar{\bar{\sigma}}_i, y) \right|$, gdzie $y \in [0, \Phi_k(\bar{\sigma}_i)]$. Wartość funkcji $\binom{s+1}{p_k}$ w punkcie $(\bar{\bar{\sigma}}_i, y)$ przedstawimy (Rys. 5.6) za pomocą całki wzdłuż charakterystyki

przechodzącej przez punkt $(\bar{\sigma}_i, y)$, czyli

$$p_k^{(s+1)}(\bar{\sigma}_i, y) = p_k^{(s+1)}(\bar{\sigma}_i, x_k(\bar{\sigma}_i; \bar{\sigma}_i, y)) + \int_{\bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}_i} f_k^{(s)}(t, x_k(t; \bar{\sigma}_i, y)) dt,$$

gdzie

$$\begin{aligned} f^{(s)}(t, x) &= \frac{\partial}{\partial x} Z^{(s)} - \left(\frac{\partial}{\partial x} L^{(s)} \right) \Gamma Z^{(s)} + \left(\frac{\partial}{\partial x} L^{(s)} \right) \Gamma D P^{(s)} \\ &\quad + L_{,t}^{(s)}[u] \Gamma P^{(s+1)} + L' \left(u; \Gamma Z^{(s)} - \Gamma D P^{(s)} \right) \Gamma P^{(s+1)} - \left(\frac{\partial}{\partial x} D^{(s)} \right) P^{(s+1)}. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \left| p_k^{(s+1)}(\bar{\sigma}_i, y) - p_k^{(s+1)}(\bar{\sigma}_i, y) \right| &\leq \left| p_k^{(s+1)}(\bar{\sigma}_i, y) - p_k^{(s+1)}(\bar{\sigma}_i, x_k(\bar{\sigma}_i; \bar{\sigma}_i, y)) \right| + \left| \int_{\bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}_i} f(t, x_k(t; \bar{\sigma}_i, y)) dt \right| \\ &\leq \left| p_k^{(s+1)}(\bar{\sigma}_i, y) - p_k^{(s+1)}(\bar{\sigma}_i, x_k(\bar{\sigma}_i; \bar{\sigma}_i, y)) \right| + C_* |\bar{\sigma}_i - \bar{\sigma}_i| \\ &\leq \left| p_k^{(s+1)}(\bar{\sigma}_i, y) - p_k^{(s+1)}(\bar{\sigma}_i, x_k(\bar{\sigma}_i; \bar{\sigma}_i, y)) \right| + C_* C_\sigma |\bar{x} - \bar{x}| \end{aligned}$$

Należy tu zauważyć, że odległość między y i $x_k(\bar{\sigma}_i; \bar{\sigma}_i, y)$ jest następująca:

$$|y - x_k(\bar{\sigma}_i; \bar{\sigma}_i, y)| = \left| y - y - \int_{\bar{\sigma}_i}^{\bar{\sigma}_i} \xi_k(t, x_k(t; \bar{\sigma}_i, y)) dt \right| \leq C_* |\bar{\sigma}_i - \bar{\sigma}_i| \leq C_* C_\sigma |\bar{x} - \bar{x}|.$$

Ostatecznie dostajemy

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m_1} \mathcal{V}_0^{\Phi_k(\bar{\sigma}_i)}(g_i) \max_{y \in [0, \Phi_k(\bar{\sigma}_i)]} \left| p_k^{(s+1)}(\bar{\sigma}_i, y) - p_k^{(s+1)}(\bar{\sigma}_i, y) \right| \\ &\leq m_1 \max_{k=1, \dots, m_1} \mathcal{V}_0^{\Phi_k(\bar{t})}(g_i) \left\{ \max_{\substack{y \in [0, \Phi_k(\bar{t})] \\ k=1, \dots, m_1}} \left| p_k^{(s+1)}(\bar{\sigma}_i, y) - p_k^{(s+1)}(\bar{\sigma}_i, x_k(\bar{\sigma}_i; \bar{\sigma}_i, y)) \right| + C_* C_\sigma |\bar{x} - \bar{x}| \right\}. \end{aligned}$$

Podsumowując oszacowania poszczególnych składników prawej strony wzoru (5.112) dostajemy nierówność¹⁴ ($i = 1, \dots, m_1$):

$$\begin{aligned} \left| p_i^{(s+1)}(\bar{t}, \bar{x}) - p_i^{(s+1)}(\bar{t}, \bar{x}) \right| &< N_0(\delta) + C_{10} \left\{ \int_0^{\bar{t}} (N_u(\delta) + N(\delta) + N_L(\delta) + \delta) dt \right. \\ &\quad + \int_0^{\bar{t}} \max_{k=1, \dots, n} |p^{(s)}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}) - p^{(s)}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))| dt \\ &\quad + \left. \int_0^{\bar{t}} \max_{k=1, \dots, n} |p^{(s+1)}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}) - p^{(s+1)}(t, x_k(t; \bar{t}, \bar{x}))| dt \right\} \\ &\quad + 5\tilde{N}(\delta) + 2n \mathcal{V}_0^l(g_i) C_* C_\sigma \delta \\ &\quad + m_1 \max_{k=1, \dots, m_1} \mathcal{V}_0^{\Phi_k(\bar{t})}(g_i) \max_{\substack{y \in [0, \Phi_k(\bar{t})] \\ k=1, \dots, m_1}} \left| p_k^{(s+1)}(\bar{\sigma}_i, y) - p_k^{(s+1)}(\bar{\sigma}_i, x_k(\bar{\sigma}_i; \bar{\sigma}_i, y)) \right|. \end{aligned} \tag{5.116}$$

Niech $C_{11} = 2n \mathcal{V}_0^l(g_i) C_* C_\sigma$ oraz $C_{12} = m_1 \max_{k=1, \dots, m_1} \mathcal{V}_0^{\Phi_k(\bar{t})}(g_i)$. Zauważmy, że stała C_{12} zależy od czasu \bar{t} i dąży do zera, jeśli \bar{t} dąży do zera.

¹⁴Wyrażenia w nawiasach sześciennych uzyskane na podstawie (4.52)

Na podstawie (5.116), dla funkcji $M_{s+1}(\bar{t}, \delta)$ zdefiniowanej wzorem (4.53) zachodzi

$$M_{s+1}(\bar{t}, \delta) \leq N_0(\delta) + \bar{t}C_{10}(N_u(\delta) + N(\delta) + N_L(\delta) + \delta) + 2C_{10} \int_0^{\bar{t}} M_{s+1}(t, \delta) dt + 5\tilde{N}(\delta) + C_{11}\delta + C_{12}M_{s+1}(\bar{t}, \delta)$$

Jeśli \bar{t} jest taki, że

$$C_{12}(\bar{t}) < 1, \quad (5.117)$$

to

$$M_{s+1}(\bar{t}, \delta) \leq \frac{1}{1 - C_{12}(\bar{t})} \left\{ N_0(\delta) + 5\tilde{N}(\delta) + C_{11}\delta + \bar{t}C_{10}(N_u(\delta) + N(\delta) + N_L(\delta) + \delta) + 2C_{10} \int_0^{\bar{t}} M_{s+1}(t, \delta) dt \right\}.$$

Z lematu Gronwalla

$$M_{s+1}(\bar{t}, \delta) \leq \frac{N_0(\delta) + 5\tilde{N}(\delta) + C_{11}\delta}{1 - C_{12}(\bar{t})} \exp\left(\frac{2C_{10}\bar{t}}{1 - C_{12}(\bar{t})}\right) + \frac{\bar{t}}{2}(N_u(\delta) + N(\delta) + N_L(\delta) + \delta) \left[\exp\left(\frac{2C_{10}\bar{t}}{1 - C_{12}(\bar{t})}\right) - 1 \right]. \quad (5.118)$$

Ponieważ (5.118) zachodzi dla \bar{t} spełniającego (5.117), więc w kolejnym kroku należy powtórzyć rozumowanie przyjmując ten czas jako początkowy. Na koniec wybieramy

$$\tilde{M}_2(\delta) = \frac{N_0(\delta) + 5\tilde{N}(\delta) + C_{11}\delta}{1 - \tilde{C}_{12}} \exp\left(\frac{2C_{10}t_*}{1 - \tilde{C}_{12}}\right) + \frac{t_*}{2}(N_u(\delta) + N(\delta) + N_L(\delta) + \delta) \left[\exp\left(\frac{2C_{10}t_*}{1 - \tilde{C}_{12}}\right) - 1 \right], \quad (5.119)$$

gdzie \tilde{C}_{12} jest maksymalną stałą ze wszystkich stałych typu C_{12} z poszczególnych kroków.

Podobnie będzie dla $(\bar{t}, \bar{x}), (\bar{t}, \bar{\bar{x}}) \in G_{biT_0}$, $i = m_1 + 1, \dots, m_2$.

Nie będziemy rozważać trzeciej możliwości, tzn. gdy $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{piT_0}$ oraz $(\bar{t}, \bar{\bar{x}}) \in G_{biT_0}$ dla $i = 1, \dots, m_1$ lub $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_{piT_0}$ oraz $(\bar{t}, \bar{\bar{x}}) \in G_{biT_0}$ dla $i = m_1 + 1, \dots, m_2$. Udowodnimy jedynie lemat, na podstawie którego wnioskujemy, że jako moduł ciągłości w tym przypadku można przyjąć sumę funkcji $\tilde{M}_1(\delta)$ i $\tilde{M}_2(\delta)$.

Lemat 5.5 *Jeśli ciąg funkcji $\{f_n(x)\}$ jest jednakowo ciągły na odcinku $[a, b]$ oraz na odcinku $[b, c]$, to jest on również jednakowo ciągły na $[a, c]$.*

Dowód. Niech

$$M_1(\delta) = \sup_{\substack{|x-y|<\delta \\ x,y \in [a,b]}} |f_n(x) - f_n(y)|, \quad M_2(\delta) = \sup_{\substack{|x-y|<\delta \\ x,y \in [b,c]}} |f_n(x) - f_n(y)|.$$

Łatwo zauważyć, że

$$\sup_{\substack{|x-y|<\delta \\ x \in [a,b] \\ y \in [b,c]}} |f_n(x) - f_n(y)| \leq \sup_{\substack{|x-b|<\delta \\ x \in [a,b]}} |f_n(x) - f_n(b)| + \sup_{\substack{|b-y|<\delta \\ y \in [b,c]}} |f_n(b) - f_n(y)| \leq M_1(\delta) + M_2(\delta).$$

□

Dodatek A

Dowód Lematu 2.2

Lemat 2.2. Niech $u(\tau, t, x)$, $v(\tau, t, x) \in C^1([0, T] \times [0, T] \times [\alpha_0, \beta_0])$.

Wtedy funkcja

$$J(t, x) = \int_0^t v_{,\tau}(\tau, t, x) u(\tau, t, x) d\tau,$$

jest klasy $C^1([0, T] \times [0, T] \times [\alpha_0, \beta_0])$ oraz

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(t, x)}{\partial x} &= \left[v_{,x}(\tau, t, x) u(\tau, t, x) \right]_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t \left(v_{,\tau}(\tau, t, x) u_x(\tau, t, x) - v_x(\tau, t, x) u_{,\tau}(\tau, t, x) \right) d\tau, \\ \frac{\partial J(t, x)}{\partial y} &= v_{,\tau}(\tau, t, x) u(\tau, t, x) \Big|_{\tau=t} + \left[v_{,t}(\tau, t, x) u(\tau, t, x) \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &\quad + \int_0^t \left(v_{,\tau}(\tau, t, x) u_{,t}(\tau, t, x) - v_{,t}(\tau, t, x) u_{,\tau}(\tau, t, x) \right) d\tau. \end{aligned}$$

Dowód. Zaczniemy od obliczenia pochodnej cząstkowej $\frac{\partial J}{\partial x}$. Ustalmy dowolnie $x = x_0$ i weźmy pewien przyrost tej zmiennej $\Delta x = h$. Wyznaczamy iloraz różnicowy

$$\begin{aligned} \frac{J(t, x_0 + h) - J(t, x_0)}{h} &= \frac{1}{h} \int_0^t \left(u(\tau, t, x_0 + h) v_{,\tau}(\tau, t, x_0 + h) - u(\tau, t, x_0) v_{,\tau}(\tau, t, x_0) \right) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{u(\tau, t, x_0 + h) - u(\tau, t, x_0)}{h} v_{,\tau}(\tau, t, x_0 + h) d\tau \\ &\quad + \int_0^t u(\tau, t, x_0) \frac{v_{,\tau}(\tau, t, x_0 + h) - v_{,\tau}(\tau, t, x_0)}{h} d\tau. \end{aligned}$$

Następnie w ostatniej całce całkujemy przez części:

$$\begin{aligned} \int_0^t u(\tau, t, x_0) \frac{v_{,\tau}(\tau, t, x_0 + h) - v_{,\tau}(\tau, t, x_0)}{h} d\tau &= \left[u(\tau, t, x_0) \frac{v(\tau, t, x_0 + h) - v(\tau, t, x_0)}{h} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &\quad - \int_0^t u_{,\tau}(\tau, t, x_0) \frac{v(\tau, t, x_0 + h) - v(\tau, t, x_0)}{h} d\tau. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \frac{J(t, x_0 + h) - J(t, x_0)}{h} &= \left[u(\tau, t, x_0) \frac{v(\tau, t, x_0 + h) - v(\tau, t, x_0)}{h} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &\quad + \int_0^t \frac{u(\tau, t, x_0 + h) - u(\tau, t, x_0)}{h} v_{,\tau}(\tau, t, x_0 + h) d\tau \\ &\quad - \int_0^t u_{,\tau}(\tau, t, x_0) \frac{v(\tau, t, x_0 + h) - v(\tau, t, x_0)}{h} d\tau. \end{aligned}$$

Całki po prawej stronie zależą od parametru h . Ponieważ funkcje u i v są klasy $C^1([0, T] \times [0, T] \times [\alpha_0, \beta_0])$, więc możliwe jest przejście do granicy pod znakiem całki przy $h \rightarrow 0$. Stąd wynika istnienie pochodnej

$$\frac{\partial J(t, x_0)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{J(t, x_0 + h) - J(t, x_0)}{h},$$

i otrzymujemy równość:

$$\frac{\partial J(t, x_0)}{\partial x} = [u(\tau, t, x_0) v_{,x}(\tau, t, x_0)]_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t (u_{,x}(\tau, t, x_0) v_{,\tau}(\tau, t, x_0) - u_{,\tau}(\tau, t, x_0) v_{,x}(\tau, t, x_0)) d\tau.$$

Do wyznaczenia pozostaje pochodna cząstkowa $\frac{\partial J}{\partial t}$. Funkcję J zapiszemy w postaci sumy funkcji J_1 i J_2 :

$$J(t, x) = J_1(t, x) + J_2(t, x) = \int_0^{t_0} u(\tau, t, x) v_{,\tau}(\tau, t, x) d\tau + \int_{t_0}^t u(\tau, t, x) v_{,\tau}(\tau, t, x) d\tau,$$

gdzie t_0 jest dowolną wartością z przedziału $[0, T]$.

Dla pewnego przyrostu $\Delta t = k$ mamy

$$\begin{aligned} \frac{J_1(t_0 + k, x) - J_1(t_0, x)}{k} &= \frac{1}{k} \int_0^{t_0} (u(\tau, t_0 + k, x) v_{,\tau}(\tau, t_0 + k, x) - u(\tau, t_0, x) v_{,\tau}(\tau, t_0, x)) d\tau \\ &= \int_0^{t_0} \frac{u(\tau, t_0 + k, x) - u(\tau, t_0, x)}{k} v_{,\tau}(\tau, t_0 + k, x) d\tau \\ &\quad + \int_0^{t_0} u(\tau, t_0, x) \frac{v_{,\tau}(\tau, t_0 + k, x) - v_{,\tau}(\tau, t_0, x)}{k} d\tau. \end{aligned}$$

W ostatniej całce po prawej stronie wykonujemy, podobnie jak wcześniej, całkowanie przez części:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} u(\tau, t_0, x) \frac{v_{,\tau}(\tau, t_0 + k, x) - v_{,\tau}(\tau, t_0, x)}{k} d\tau &= \left[u(\tau, t_0, x) \frac{v(\tau, t_0 + k, x) - v(\tau, t_0, x)}{k} \right]_{\tau=0}^{\tau=t_0} \\ &\quad - \int_0^{t_0} u_{,\tau}(\tau, t_0, x) \frac{v(\tau, t_0 + k, x) - v(\tau, t_0, x)}{k} d\tau. \end{aligned}$$

Jest zatem

$$\begin{aligned} \frac{J_1(t_0 + k, x) - J_1(t_0, x)}{k} &= \left[u(\tau, t_0, x) \frac{v(\tau, t_0 + k, x) - v(\tau, t_0, x)}{k} \right]_{\tau=0}^{\tau=t_0} \\ &\quad + \int_0^{t_0} \frac{u(\tau, t_0 + k, x) - u(\tau, t_0, x)}{k} v_{,\tau}(\tau, t_0 + k, x) d\tau \\ &\quad - \int_0^{t_0} u_{,\tau}(\tau, t_0, x) \frac{v(\tau, t_0 + k, x) - v(\tau, t_0, x)}{k} d\tau. \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy z $k \rightarrow 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1(t_0, x)}{\partial t} &= [u(\tau, t_0, x) v_{,t}(\tau, t_0, x)]_{\tau=0}^{\tau=t_0} \\ &\quad + \int_0^{t_0} (u_{,t}(\tau, t_0, x) v_{,\tau}(\tau, t_0, x) - u_{,\tau}(\tau, t_0, x) v_{,t}(\tau, t_0, x)) d\tau. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Dla funkcji J_2 z twierdzenia o wartości średniej mamy

$$J_2(t, x) = \int_{t_0}^t u(\tau, t, x) v_{,\tau}(\tau, t, x) d\tau = (t - t_0) \cdot u(\tilde{\tau}, t, x) v_{,\tau}(\tilde{\tau}, t, x),$$

gdzie $\tilde{\tau}$ jest zawarte między t_0 i t . Stąd

$$\frac{J_2(t, x)}{t - t_0} = u(\tilde{\tau}, t, x) v_{,\tau}(\tilde{\tau}, t, x).$$

Obliczymy teraz pochodną cząstkową funkcji J_2 względem zmiennej t w punkcie (t_0, x)

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2(t_0, x)}{\partial t} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{J_2(t, x) - J_2(t_0, x)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} u(\tilde{\tau}, t, x) v_{,\tau}(\tilde{\tau}, t, x) \\ &= u(t_0, t_0, x) v_{,\tau}(t_0, t_0, x), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

ponieważ $J_2(t_0, x) = 0$.

Ostatecznie, korzystając z (A.1) i (A.2) stwierdzamy, że pochodna cząstkowa $\frac{\partial J(t_0, x)}{\partial t}$ istnieje i wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(t_0, x)}{\partial t} &= [u(\tau, t_0, x) v_{,t}(\tau, t_0, x)]_{\tau=0}^{\tau=t_0} + u(t_0, t_0, x) v_{,\tau}(t_0, t_0, x) \\ &\quad + \int_0^{t_0} \left(u_{,t}(\tau, t_0, x) v_{,\tau}(\tau, t_0, x) - u_{,\tau}(\tau, t_0, x) v_{,t}(\tau, t_0, x) \right) d\tau. \end{aligned}$$

□

Dodatek B

Przekształcenia równania energii dla elektronów

Zauważmy najpierw, że korzystając z równania ciągłości dla elektronów (1.4) możemy przekształcić równanie pędu dla elektronów w kierunku osi X (1.5) i równanie pędu dla elektronów w kierunku azymutalnym (1.6) odpowiednio do postaci:

$$\frac{\partial V_{ex}}{\partial t} + V_{ex} \frac{\partial V_{ex}}{\partial x} = -\frac{k}{n_e m_e} \frac{\partial}{\partial x} (T_e n_e) - \beta N_a V_{ex} - \frac{eE}{m_e} + \omega_B V_{e\theta} - \nu_m V_{ex}, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial V_{e\theta}}{\partial t} + V_{ex} \frac{\partial V_{e\theta}}{\partial x} = -\beta N_a V_{e\theta} - \omega_B V_{ex} - \nu_m V_{e\theta}. \quad (\text{B.2})$$

Dokonyamy teraz przekształceń w równaniu (1.7), czyli w równaniu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(n_e E_{ke} + \frac{3}{2} n_e k T_e \right) + \frac{\partial \left(n_e V_{ex} E_{ke} + n_e V_{ex} \frac{3}{2} k T_e \right)}{\partial x} + \frac{\partial (n_e V_{ex} k T_e)}{\partial x} = Q_{Joules} - Q_{ioniz} - Q_{wall},$$

gdzie

$$\begin{aligned} Q_{Joules} &= -V_{ex} n_e e E, \\ Q_{ioniz} &= \gamma e E_{ion} \beta N_a n_e, \\ Q_{wall} &= \nu_{ew} n_e (E_{ke} + 2k T_e). \end{aligned}$$

A) Pokażemy najpierw w jaki sposób można doprowadzić (1.7) do postaci (1.19). Różniczkując po lewej stronie równania otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(n_e E_{ke} + \frac{3}{2} n_e k T_e \right) + \frac{\partial \left(n_e V_{ex} E_{ke} + n_e V_{ex} \frac{3}{2} k T_e \right)}{\partial x} + \frac{\partial (n_e V_{ex} k T_e)}{\partial x} = \\ &= k n_e \left(\frac{3}{2} \frac{\partial T_e}{\partial t} + \frac{3}{2} V_{ex} \frac{\partial T_e}{\partial x} + T_e \frac{\partial V_{ex}}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial (n_e V_{ex})}{\partial x} \right) E_{ke} + \\ &+ \frac{3}{2} k T_e \left(\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial (n_e V_{ex})}{\partial x} \right) + k V_{ex} \frac{\partial (T_e n_e)}{\partial x} + n_e \left(\frac{\partial E_{ke}}{\partial t} + V_{ex} \frac{\partial E_{ke}}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Korzystając z równania (1.4) zastępujemy $\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial (n_e V_{ex})}{\partial x}$ przez $\beta N_a n_e$ oraz zapisujemy $\frac{3}{2} \frac{\partial T_e}{\partial t} + \frac{3}{2} V_{ex} \frac{\partial T_e}{\partial x} + T_e \frac{\partial V_{ex}}{\partial x}$ w postaci $\frac{1}{\sqrt{T_e}} \left(\frac{\partial T_e^{\frac{3}{2}}}{\partial t} + \frac{\partial (V_{ex} T_e^{\frac{3}{2}})}{\partial x} \right)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(n_e E_{ke} + \frac{3}{2} n_e k T_e \right) + \frac{\partial \left(n_e V_{ex} E_{ke} + n_e V_{ex} \frac{3}{2} k T_e \right)}{\partial x} + \frac{\partial (n_e V_{ex} k T_e)}{\partial x} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{kn_e}{\sqrt{T_e}} \left(\frac{\partial T_e^{\frac{3}{2}}}{\partial t} + \frac{\partial(V_{ex}T_e^{\frac{3}{2}})}{\partial x} \right) + \beta N_a n_e E_{ke} + \\
&\quad + \frac{3}{2} k T_e \beta N_a n_e + k V_{ex} \frac{\partial(T_e n_e)}{\partial x} + n_e \left(\frac{\partial E_{ke}}{\partial t} + V_{ex} \frac{\partial E_{ke}}{\partial x} \right) \quad (B.3)
\end{aligned}$$

Skupimy teraz uwagę na wyrażeniu $\frac{\partial E_{ke}}{\partial t} + V_{ex} \frac{\partial E_{ke}}{\partial x}$. Pamiętając, że $E_{ke} = \frac{m_e}{2}(V_{ex}^2 + V_{e\theta}^2)$ dostajemy

$$\begin{aligned}
&n_e \left(\frac{\partial E_{ke}}{\partial t} + V_{ex} \frac{\partial E_{ke}}{\partial x} \right) = \\
&= n_e m_e V_{ex} \left(\frac{\partial V_{ex}}{\partial t} + V_{ex} \frac{\partial V_{ex}}{\partial x} \right) + n_e m_e V_{e\theta} \left(\frac{\partial V_{e\theta}}{\partial t} + V_{ex} \frac{\partial V_{e\theta}}{\partial x} \right),
\end{aligned}$$

a po zastosowaniu (B.1) i (B.2) zapisujemy jako

$$n_e \left(\frac{\partial E_{ke}}{\partial t} + V_{ex} \frac{\partial E_{ke}}{\partial x} \right) = -2\beta N_a n_e E_{ke} - 2\nu_m n_e E_{ke} - k V_{ex} \frac{\partial(T_e n_e)}{\partial x} - e n_e E V_{ex}. \quad (B.4)$$

Podstawiamy wyrażenie (B.4) do (B.3) i otrzymujemy lewą stronę równania (1.7) w postaci

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \left(n_e E_{ke} + \frac{3}{2} n_e k T_e \right) + \frac{\partial \left(n_e V_{ex} E_{ke} + n_e V_{ex} \frac{3}{2} k T_e \right)}{\partial x} + \frac{\partial(n_e V_{ex} k T_e)}{\partial x} = \\
&= \frac{kn_e}{\sqrt{T_e}} \left(\frac{\partial T_e^{\frac{3}{2}}}{\partial t} + \frac{\partial(V_{ex}T_e^{\frac{3}{2}})}{\partial x} \right) + \beta N_a n_e \left(\frac{3}{2} k T_e - E_{ke} \right) - 2\nu_m n_e E_{ke} - e n_e E V_{ex}. \quad (B.5)
\end{aligned}$$

Porównując teraz (B.5) z $Q_{Joules} - Q_{ioniz} - Q_{wall}$, po podzieleniu przez kn_e , ostatecznie dojdziemy do równania (1.19):

$$\frac{1}{\sqrt{T_e}} \left(\frac{\partial T_e^{\frac{3}{2}}}{\partial t} + \frac{\partial(V_{ex}T_e^{\frac{3}{2}})}{\partial x} \right) = Q_1,$$

gdzie

$$Q_1 = -\frac{1}{k} \beta N_a \left(\gamma_e E_{ion} + \frac{3}{2} k T_e - E_{ke} \right) + 2 \frac{\nu_m}{k} E_{ke} - \frac{\nu_{ew}}{k} (E_{ke} + 2k T_e).$$

B) Od postaci (1.19) łatwo przejść do (1.20).

Wychodząc z równania

$$\frac{1}{\sqrt{T_e}} \left(\frac{\partial T_e^{\frac{3}{2}}}{\partial t} + V_{ex} \frac{\partial T_e^{\frac{3}{2}}}{\partial x} + T_e^{\frac{3}{2}} \frac{\partial V_{ex}}{\partial x} \right) = Q_1,$$

poprzez dodanie i odjęcie tych samych wyrażen otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{T_e}} \left[-\frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial t} T_e^{\frac{3}{2}} + \frac{\partial T_e^{\frac{3}{2}}}{\partial t} - \frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} V_{ex} T_e^{\frac{3}{2}} + V_{ex} \frac{\partial T_e^{\frac{3}{2}}}{\partial x} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial t} T_e^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} V_{ex} T_e^{\frac{3}{2}} + T_e^{\frac{3}{2}} \frac{\partial V_{ex}}{\partial x} \right) \right] = Q_1. \quad (B.6)
\end{aligned}$$

Zauważmy, że po pomnożeniu równania ciągłości dla elektronów przez $\frac{T_e^{\frac{3}{2}}}{n_e}$ mamy

$$\frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial t} T_e^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} V_{ex} T_e^{\frac{3}{2}} + T_e^{\frac{3}{2}} \frac{\partial V_{ex}}{\partial x} = \beta N_a T_e^{\frac{3}{2}}.$$

Stąd w (B.6) sumę w nawiasie zwykłym zastępujemy przez $\beta N_a T_e^{\frac{3}{2}}$ i równanie zapisujemy w postaci

$$\frac{1}{\sqrt{T_e}} \left[-\frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial t} T_e^{\frac{3}{2}} + \frac{\partial T_e^{\frac{3}{2}}}{\partial t} - \frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} V_{ex} T_e^{\frac{3}{2}} + V_{ex} \frac{\partial T_e^{\frac{3}{2}}}{\partial x} \right] = Q_1 - \beta N_a T_e,$$

i dalej jako

$$\frac{n_e}{\sqrt{T_e}} \left[-\frac{1}{n_e^2} \frac{\partial n_e}{\partial t} T_e^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{n_e} \frac{\partial T_e^{\frac{3}{2}}}{\partial t} - \frac{1}{n_e^2} \frac{\partial n_e}{\partial x} V_{ex} T_e^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{n_e} V_{ex} \frac{\partial T_e^{\frac{3}{2}}}{\partial x} \right] = Q_1 - \beta N_a T_e.$$

Ostatecznie

$$\frac{n_e}{\sqrt{T_e}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T_e^{\frac{3}{2}}}{n_e} \right) + V_e \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T_e^{\frac{3}{2}}}{n_e} \right) \right] = Q_2,$$

gdzie

$$Q_2 = Q_1 - \beta N_a T_e.$$

Dodatek C

Sprawdzenie założeń $(A_1) - (A_5)$ dla układu standardowego

Układ standardowy dla niewiadomych N_a, n_i, V_i, T_e ma postać:

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} + \frac{\partial(N_a V_a)}{\partial x} = -\beta N_a n_e, \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i V_i)}{\partial x} = \beta N_a n_e, \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{1}{n_e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k T_e}{m_i} n_e \right) = \nu_{eff} \left(\frac{I(t)}{n_e e} - \frac{n_i}{n_e} V_i \right) + \beta N_a (V_a - V_i), \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{n_e}{\sqrt{T_e}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T_e^{\frac{3}{2}}}{n_e} \right) + V_e \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T_e^{\frac{3}{2}}}{n_e} \right) \right] = Q_2, \quad (\text{C.4})$$

gdzie

$$Q_2 = -\frac{1}{k} \beta N_a \left(\gamma e E_{ion} + \frac{3}{2} k T_e - E_{ke} \right) + 2 \frac{\nu_m}{k} E_{ke} - \frac{\nu_{ew}}{k} (E_{ke} + 2k T_e) - \beta N_a T_e,$$

$$E_{ke} = \frac{m_e}{2} (V_{ex}^2 + V_{e\theta}^2) = \frac{m_e}{2} \left(1 + \frac{\omega_B^2}{\nu_e^2} \right) V_{ex}^2.$$

V_a jest zadaną funkcją klasy C^1 .

Dla wektora funkcji niewiadomych przyjmujemy oznaczenie

$$u = [N_a, n_i, V_i, T_e]^T.$$

$I(t)$ jest w istocie dane przez następujący funkcjonal

$$I[u] = \left(\int_0^L \frac{\nu_{eff}}{e n_e} dx \right)^{-1} \cdot \left[\frac{e}{m_i} U_0 + \int_0^L \left(\nu_{eff} V_i + \frac{1}{n_e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k T_e}{m_i} n_e \right) \right) dx \right]. \quad (\text{C.5})$$

Piszemy $I(t)$, aby podkreślić, że wartości $I[u]$ nie zależą od x , mogą zależeć tylko od czasu ponieważ rozwiązanie na ogół zależy od czasu.

W równaniu (C.4) V_e oznacza prędkość elektronów w kierunku osi X i wyraża się w postaci

$$V_e = \frac{n_i}{n_e} V_i - \frac{I[u]}{n_e e}.$$

Pomimo założenia elektrycznej neutralności w układzie (C.1) - (C.4) pozostawiliśmy obie zmienne n_i i n_e tak jak one oryginalnie występują. Jednym z powodów jest fakt, że n_e często

pojawia się w mianowniku. Wtedy możemy położyć $n_e = n_i + n_r$ zamiast n_i , ponieważ nawet w przypadku nieobecności jonów ($n_i = 0$) w układzie płynie mały resztkowy prąd elektronowy, któremu odpowiada pewna resztkowa gęstość elektronowa n_r . W ten sposób unikamy osobliwości, które mogłyby się pojawić we współczynnikach. Prąd resztkowy jest tak mały, że tam, gdzie nie grozi osobliwość można go pominąć i przyjąć $n_e = n_i$.

Zauważmy, że funkcja $\Psi_i = \ln n_i$ spełnia na charakterystyce równanie

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = \beta N_a - V_{i,x}.$$

Fizyczna interpretacja wymaga, żeby $n_i(t, x) \geq 0$. Jeżeli $n_i(0, x) > 0$, to przy założeniu, że $|\beta N_a|, |V_{i,x}| < C$ otrzymujemy, że $n_i(t, x) > 0$. To natomiast oznacza, że $n_e = n_i + n_r \geq 0$ (w mianowniku).

Dla $n_e = n_i$, charakterystyki dla układu (C.1) - (C.4) mają następujące nachylenia:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= V_a, \\ \xi_2 &= V_i - \sqrt{\frac{5kT_e}{3m_i}}, \\ \xi_3 &= V_i + \sqrt{\frac{5kT_e}{3m_i}}, \\ \xi_4 &= V_e \end{aligned}$$

a odpowiadające im lewe wektory własne to

$$\begin{aligned} L_1 &= [1, 0, 0, 0], \\ L_2 &= \left[0, \frac{T_e}{n_e} - \frac{m_i}{k e n_e^2} \sqrt{\frac{5kT_e}{3m_i}} I[u], \frac{m_i}{k e n_e} I[u] - \frac{m_i}{k} \sqrt{\frac{5kT_e}{3m_i}}, 1 \right], \\ L_3 &= \left[0, \frac{T_e}{n_e} + \frac{m_i}{k e n_e^2} \sqrt{\frac{5kT_e}{3m_i}} I[u], \frac{m_i}{k e n_e} I[u] + \frac{m_i}{k} \sqrt{\frac{5kT_e}{3m_i}}, 1 \right], \\ L_4 &= \left[0, 1, 0, -\frac{3n_e}{2T_e} \right] \end{aligned}$$

Równania (C.1) - (C.4) stanowią więc układ hiperboliczny. Wartość własna $\xi_4 = V_e$, lewe wektory własne L_2 i L_3 oraz prawa strona tego układu (w równaniu (C.3) i (C.4)) poprzez prąd całkowity $I[u]$ dany wzorem (C.5) zależą funkcjonalnie od rozwiązania. W układzie standardowym nie ma zależności funkcjonalnej w warunkach brzegowych.

Przypomnijmy warunki $(A_1) - (A_5)$ dla układu

$$u_{,t} + A[u]u_{,x} = b[u],$$

gdzie

$$A[u] = L^{-1}[u]D[u]L[u], \quad D[u] = \text{diag}[\xi_1[u], \dots, \xi_n[u]], \quad L[u] = \begin{bmatrix} L_1[u] \\ \vdots \\ L_n[u] \end{bmatrix},$$

z warunkiem początkowym

$$u(0, x) = u^0(x), \quad x \in [0, l].$$

Wiersze nieosobliwej macierzy $L[u]$ są liniowo niezależnymi lewymi wektorami własnymi $A[u]$.
Oznaczając przestrzeń Banacha

$$X_0 = \left\{ u \in C([0, l]); \|u\|_0 := \sup_{x \in [0, l]} \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} < \infty \right\},$$

$$X_1 = \{u \in C^1([0, l]); \|u\|_1 := \|u\|_0 + \|u_{,x}\|_0 < \infty\},$$

zakładamy, że istnieje kula otwarta $B_r^1(u^0)$ o środku u^0 i promieniu r w X_1 taka, że dla każdego $t \in [0, T_0]$ zachodzą następujące warunki:

(A₁) $K : B_r^1(u^0) \rightarrow X_1$ i dla pewnej stałej $C < \infty$: $\|K[v]\|_1 \leq C$ dla dowolnego $v \in B_r^1(u^0)$, gdzie K oznacza L, L^{-1}, D, Z ($Z = Lb$).

(A₂) L jest ciągłym nieliniowym operatorem, $L : B_r^1(u^0) \rightarrow X_1$. Zakładamy, że L jest różniczkowalny w sensie Frécheta i dodatkowo przyjmujemy, że pochodna $L' : X_1 \rightarrow X_1$ może być rozszerzona w sposób ciągły na całą przestrzeń X_0 , tzn. $\exists_{C>0} \forall_{v \in B_r^1(u^0)} \forall_{h \in X_1} \|L'(v)h\|_0 \leq C\|h\|_0$.

(A₃) $L[v]$ jest klasy C^1 ze względu na parametr t i istnieje stała C taka, że $\|\frac{\partial}{\partial t}L[v]\|_0 \leq C$, $v \in B_r^1(u^0)$.

(A₄) Dla $|x - \bar{x}| \leq \delta$ i dla każdego $v \in B_r^1(u^0)$, istnieje stała C i funkcja $N(\delta)$, $N(\delta) \rightarrow 0$ jeśli $\delta \rightarrow 0$ taka, że

$$\left| \frac{\partial}{\partial x}K[v](t, x) - \frac{\partial}{\partial x}K[v](t, \bar{x}) \right| \leq C|v_{,x}(x) - v_{,x}(\bar{x})| + C|v(x) - v(\bar{x})| + N(\delta),$$

gdzie K oznacza L, D, Z . $|\cdot|$ - metryka euklidesowa.

(A₅) Istnieje stała C , że $\|K[v] - K[\bar{v}]\|_0 \leq C\|v - \bar{v}\|_0$ dla $v \in B_r^1(u^0)$, gdzie K symbolizuje L, L^{-1}, D, Z .

Uwaga do (A₃):

Występującą w warunku (A₃) pochodną rozumiemy jako pochodną cząstkową po t odwzorowania $(t, v) \rightarrow L[v]$, gdzie $(t, v) \in [0, T_0] \times B_r^1(u^0)$ (funkcja v nie zależy od t). W przypadku jeśli $u = u(t, x)$, wówczas dla przejrzystości będziemy tę pochodną cząstkową po t operatora L obliczaną na u oznaczać $\left(\frac{\partial}{\partial t}L\right)[u]$, a więc

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}L\right)[u] = \frac{\partial}{\partial t}L[v] \Big|_{v=u}.$$

Natomiast pochodna $\frac{\partial}{\partial t}(L[u])$ jest sumą pochodnej cząstkowej $\left(\frac{\partial}{\partial t}L\right)[u]$ i pochodnej Frécheta L' w punkcie u w działaniu na $u_{,t}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(L[u]) = \left(\frac{\partial}{\partial t}L\right)[u] + L'[u]u_{,t}.$$

Uwaga do (A₅):

Dla L warunek (A₅) wynika z (A₂).

We współczynnikach równań (C.3) i (C.4) funkcjonal $I[u]$ jest mnożony przez funkcje różniczkowalne w sposób ciągły. Ponadto funkcja $\nu_{eff}(x) > 0$. Natomiast n_i jest ograniczona z góry, bo należy do kuli $B_r^1(u^0)$ o promieniu r i środku $u^0 = [N_a(0, x), n_i(0, x), V_i(0, x), T_e(0, x)]^T$ z przestrzeni X_1 . Niech dla uproszczenia n_r będzie stałe. Przyjmijmy, że kula $B_r^1(u^0)$ jest na tyle mała, aby dla wszystkich $n_i \in B_r^1(u^0)$ było $n_e = n_i + n_r > \frac{1}{2} n_r$. Stąd

$$\frac{1}{2} n_r < \sup_{x \in [0, l]} |n_e| \leq r + \sup_{x \in [0, l]} |n_i(0, x)| + n_r.$$

Zatem wystarczy sprawdzić założenia $(A_1) - (A_5)$ tylko dla $I[u]$.

Dla lepszej przejrzystości będziemy pisać V, T, ν zamiast V_i, T_e, ν_{eff} . Opuścimy też stałe współczynniki $\frac{1}{e}, \frac{k}{m_i}$.

Dla $u \in B_r^1(u^0)$ i $t \in [0, T_0]$ mamy

Warunek (A_1)

Ponieważ funkcje, które występują w $I[u]$, tzn. u i ν_{eff} , są różniczkowalne w sposób ciągły oraz $u \in B_r^1(u^0)$, $\nu_{eff} > 0$ stąd $I[u]$ jest ograniczone przez stałą.

Warunek (A_2)

Niech $h = [h_1, h_2, h_3, h_4]^T$, $h \in X_1$ i odpowiada funkcjom $u_1 = N_a$, $u_2 = n_i$, $u_3 = V$, $u_4 = T$. Pamiętajmy, że $n_e = n_i + n_r$ przyjmijmy

$$\begin{aligned} K_1[u] &= \int_0^l \frac{\nu}{n_e} dx, \\ K_2[u] &= \int_0^l \nu V dx, \\ K_3[u] &= \int_0^l \frac{1}{n_e} \frac{\partial(n_e T)}{\partial x} dx. \end{aligned}$$

Stąd

$$I = \frac{1}{K_1} \left(\frac{e}{m_i} U_0 + K_2 + K_3 \right).$$

Ponieważ znane są zasady obliczania różniczki ilorazu (jeśli licznik i mianownik są różniczkowalne), więc ograniczymy się do obliczenia pochodnej Frécheta dla poszczególnych funkcjonałów K_1, K_2, K_3 . W ten sposób najprościej potraktujemy problem wyznaczenia pochodnej Frécheta dla funkcjonału I unikając rozbudowanych wzorów.

•

$$K_1'[u]h = - \int_0^l \frac{\nu}{n_e^2} h_2 dx$$

oraz

$$\|K_1'[u]h\|_0 \leq C_1 \|h_2\|_0 \leq C_1 \|h\|_0 \quad \text{dla} \quad C_1 = \int_0^l \frac{\nu}{n_e^2} dx$$

•

$$K'_2[u]h = \int_0^l \nu h_3 dx$$

oraz

$$\|K'_2[u]h\|_0 \leq C_2 \|h_3\|_0 \leq C_2 \|h\|_0 \quad \text{dla} \quad C_2 = \int_0^l \nu dx$$

•

$$K'_3[u]h = \int_0^l \frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} h_4 dx - \int_0^l \frac{T}{n_e^2} \frac{\partial n_e}{\partial x} h_2 dx + \int_0^l \frac{T}{n_e} \frac{dh_2}{dx} dx$$

Całkując przez części możemy przekształcić ostatnią całkę:

$$K'_3[u]h = \int_0^l \frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} h_4 dx - \int_0^l \frac{T}{n_e^2} \frac{\partial n_e}{\partial x} h_2 dx + \left[h_2(x) \frac{T(t, x)}{n_e(t, x)} \right]_{x=0}^{x=l} - \int_0^l h_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T}{n_e} \right) dx$$

skąd

$$\begin{aligned} \|K'_3[u]h\|_0 &\leq \|h_4\|_0 \cdot \int_0^l \left| \frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} \right| dx + \|h_2\|_0 \cdot \int_0^l \left| \frac{T}{n_e^2} \frac{\partial n_e}{\partial x} \right| dx + \\ &\quad + \|h_2\|_0 \cdot 2 \left\| \frac{T}{n_e} \right\|_0 + \|h_2\|_0 \cdot \int_0^l \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T}{n_e} \right) \right| dx \\ &\leq C_3 \|h\|_0 \end{aligned}$$

dla

$$C_3 = 2 \max \left\{ \int_0^l \left| \frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} \right| dx ; \int_0^l \left| \frac{T}{n_e^2} \frac{\partial n_e}{\partial x} \right| dx + 2 \left\| \frac{T}{n_e} \right\|_0 + \int_0^l \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T}{n_e} \right) \right| dx \right\}.$$

Ponieważ całkując przez części eliminujemy pochodną $\frac{dh_2}{dx}$, więc wystarczy przyjąć $h \in X_0$. Ostatecznie otrzymujemy $\|I'[u]h\|_0 \leq C \|h\|_0$ dla stałej C wyrażonej przez $C_1, C_2, C_3, \frac{e}{m_i} U_0$.

Warunek (A₃)

W tym przypadku $\left(\frac{\partial}{\partial t} I \right) [u] = 0$, bo w $I[u]$ nie ma explicite zależności od t .

Warunek (A₄)

Jeśli $K[u](x) = g(x, u)$, gdzie g jest różniczkowalną w sposób ciągły funkcją od x i u , to warunek (A₄) jest spełniony automatycznie z $N(\delta) = 0$.

Operatory występujące we współczynnikach układu to iloczyny funkcji różniczkowalnych i funkcjonału $I[u]$, np. $\frac{1}{n_i + n_r} I[u]$. Ponieważ $I[u]$ jest ograniczone i $\frac{\partial}{\partial x} (I[u]) = 0$, więc warunek (A₄) jest spełniony.

Warunek (A₅)

Warunek (A₅) można sprawdzić bezpośrednio szacując $\|I[u] - I[\bar{u}]\|_0$. Można też jednak zauważyć, że pochodna Fréchet'a jest ograniczona i stąd zachodzi warunek Lipschitza (A₅).

Ponieważ dla $h \in X_0$ mamy $\|I'[u]h\|_0 \leq C \|h\|_0$, zatem norma pochodnej Fréchet'a jest ograniczona przez C . Stąd $\|I[u] - I[\bar{u}]\|_0 \leq C \|u - \bar{u}\|_0$ dla $u \in B_r^1(u^0)$.

Bibliografia

- [1] Abolinia V.E., Myshkis A.D., *Mixed problem for semilinear hyperbolic systems on the plane*, Mat. Sb. 50, 4 (1960), 423-442
- [2] Alexiewicz A., *Analiza funkcjonalna*, Warszawa 1969
- [3] Barral S., *Numerical studies of Hall thrusters based on fluid equations for plasma*, praca doktorska, IPPT PAN, 2002
- [4] Barral S., Makowski K., Peradzyński Z., Gascon N., Dudeck M., *Wall material effects in stationary plasma thrusters. II. Near-wall and in-wall conductivity*, Phys. Plasmas, (10) 10 (2003), 4137-4152
- [5] Bassanini P., *On a boundary value problem or a class of quasilinear hyperbolic systems in two independent variables*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, XXIV (1975), 343-372
- [6] Bobisud L., *On a class of partial differential equations with time lag*, J. Math. Anal. Appl 18 (1967), 115-128
- [7] Cazzani Nieri M.G., *Teorema di unicità e proprietà della soluzione del problema di Cauchy nella classe delle funzioni assolutamente continue nelle singole variabili*, Ricerche Mat. 28 (1979), no. 2, 215-258
- [8] Cazzani Nieri M.G., *Nuovi teoremi di esistenza per un problema di Cauchy nella classe delle funzioni assolutamente continue nelle singole variabili*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 167 (1994), 351-387
- [9] Cazzani Nieri M.G., *Un teorema di esistenza per sistemi di equazioni a derivate parziali quasi lineari*, Ricerche Mat. 29 (1980), no. 1, 17-64
- [10] Cesari L., *A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems in the Schauder canonic form*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 1 (1974), 311-358
- [11] Cinquini Cibrario M., *Teoremi di esistenza per sistemi di equazioni quasi lineari a derivate parziali in più variabili indipendenti*, Annali Mat. Pura Appl., (4), 75 (1967), 1-46
- [12] Cinquini Cibrario M., *Un teorema di unicità per sistemi equazioni a derivate parziali quasi-lineari*, Annali Mat. Pura Appl., (4), 75 (1967), 231-260
- [13] Courant R., Hilbert D., *Methods of mathematical physics*, vol. II *Partial differential equations* by R. Courant, Interscience Publishers a division of John Wiley & Sons, New York-London, 1962
- [14] Courant R., Lax P., *On nonlinear partial differential equations with two independent variables*, Comm. Pure. Appl. Math. 2 (1949), 255-273

-
- [15] Douglis A., *Some existence theorem for hyperbolic systems of partial differential equations in two independent variables*, Comm. Pure. Appl. Math. 5 (1952), 119-154
- [16] Fichtenholz, G.M., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom II, PWN, Warszawa 1978
- [17] Friedrichs K.O., *Nonlinear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables*, Amer. J. Math. 70 (1948), 555-589
- [18] Garabedian P.R., *Partial differential equations*, Wiley, New York, 1964
- [19] Hartman P., *Ordinary differential equations*, New York, London, Sydney, 1964
- [20] Hartman P., Wintner A., *On hyperbolic partial differential equations*, Amer. J. Math. 74, (1952), 834-864
- [21] Iannelli M., *Mathematical theory of age-structured population dynamics*,
- [22] Jeffrey A. *Quasilinear hyperbolic systems and waves*, Pitman Publishing, 1976
- [23] Kamont Z., *Hyperbolic functional differential inequalities and applications Mathematics and its Applications*, 486. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999
- [24] Lax P.D., *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure. Appl. Math. 10 (1957), 537-566
- [25] Levy H., *Über Anfangswertproblem für eine hyperbolische nichtlineare Differentialgleichung zweiter ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen*, Math. Ann. 97 (1927), 179-191
- [26] Łojasiewicz S., *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa 1976
- [27] Peradzyński Z., *On existence and uniqueness of solutions for equations of stationary plasma thruster*, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Warsaw University, 2002
- [28] Pietrowski I. *Równania różniczkowe cząstkowe*, PWN, Warszawa 1955
- [29] Rozhdstvenski B.L., Yanenko N.N., *Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics*, "Nauka", Moskwa, 1968
- [30] Turo J., *On some class of quasilinear hyperbolic systems of partial differential-functional equations of the first order*, Czech. Math. J. 36 (111) 1986,185-197
- [31] Turo J., *Existence and uniqueness of solutions quasilinear hyperbolic systems of partial differential equations*, Math. Slovaca 37 (1987), No. 4, 375-389
- [32] Turo J., *Local generalized solutions of mixed problems for quasilinear hyperbolic systems of functional partial differential equations in two independent variables*, Ann. Polon. Math. 49 (1989), No.3, 259-278
- [33] Turo J., *Generalized solutions of mixed problems for quasilinear hyperbolic systems of functional partial differential equations in the Schauder canonic form*, Ann. Polon. Math. 50 (1989), 157-183
- [34] Zdanowicz M., Peradzyński Z., *On continuous solutions to linear hyperbolic systems*, Ann. Polon. Math. 86 (2005), 273-281

- [35] Zdanowicz M., Peradzyński Z., *Cauchy problem for quasilinear hyperbolic systems with coefficients functionally dependent on solutions*, Arch. Mech. 59, 2 (2007), w druku
- [36] Zhurin V.V., Kaufman H.R., Robinson R.S., *Physics of closed drifts thrusters*, Plasma Sources Sci. Technol., 8 (1999), R1-R20