

Instytut Podstawowych Problemów Techniki

Zakład Mechaniki i Fizyki Płynów

Polska Akademia Nauk

**Zastosowanie metody multipolowej do analizy
oddziaływań hydrodynamicznych w
cylindrycznym mikrokanale**

mgr inż. Marcin Kędzierski

Rozprawa doktorska

wykonana pod kierunkiem

dr hab. Eligiusza Wajnryba, prof. IPPT PAN

Warszawa 2011

Podziękowania

Pragnę przede wszystkim podziękować dr hab. Eligiuszowi Wajnrybowi za opiekę merytoryczną i okazaną cierpliwość oraz prof. dr hab. Leszkowi Adamowiczowi za zaciekawienie mnie mechaniką płynów. Szczególne podziękowania kieruję do swoich rodziców za to, że dali mi szansę studiowania w Warszawie.

Niniejsza Rozprawa Doktorska została sfinansowana w ramach grantu Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego nr N N501 156538.

Rezultaty przedstawione w Rozprawie zostały zawarte w publikacji:

M. Kędzierski, E. Wajnryb, Precise multipole method for calculating many-body hydrodynamic interactions in a microchannel, *J Chem Phys.* **133**, 154105 (2010).

Streszczenie

Pomimo wielu ważnych technologicznie zastosowań związanych z zawieszinami koloidalnymi w porach i kanałach, pełna analiza matematyczna oddziaływań hydrodynamicznych w takich układach nie została do tej pory rozwinięta. Celem niniejszej pracy jest wypełnienie tej luki. Zaproponowane podejście opiera się na rozwinięciach pola prędkości w sferycznych i cylindrycznych rozwiązaniach równań Stokesa. Oddziaływanie płynu z cząstkami opisuje baza sferyczna, natomiast pole odbite od ścianek cylindra wyrażone jest poprzez bazę cylindryczną. Rdzeniem metody są relacje transformujące obie bazy.

Metoda pozwala z łatwością zmieniać zarówno promień jak i rodzaj cząstek (twarde sfery, porowate sfery, krople itd.). Tych cech nie posiada żaden istniejący algorytm. Porównanie z dostępnymi wynikami waliduje naszą metodę. W szczególności otrzymujemy świetną zgodność ze znanym analitycznym wynikiem na jednocząstkowy współczynnik tarcia aksjalnego. Ponadto obserwujemy ujemne sprzężenie hydrodynamiczne dla cząstek o skończonych rozmiarach, co jest konsystentne z wcześniej zaobserwowanym efektem dla cząstek punktowych. Jako przykład zastosowania metody obliczamy prędkości łańcuchów polimerycznych w przepływie parabolicznym i porównujemy je z wynikami dla przestrzeni nieograniczonej. Zaproponowana metoda pomoże w zrozumieniu fizycznych i fizyko-

chemicznych procesów zachodzących w układach biologicznych i geofizycznych oraz w systemach mikrofluidycznych.

Abstract

Despite many important technological applications involving colloidal systems in a pore geometry, full mathematical analysis of hydrodynamic interactions in such a system has not been developed. In this thesis we introduce a novel and precise method for computing many-body hydrodynamic interactions in a cylindrical microchannel. Our approach involves expanding the fluid velocity field into spherical and cylindrical solutions of the Stokes equations. The interaction of the fluid with the particles is described using the spherical basis. The flow scattered by the bounding microchannel is expressed in terms of the cylindrical basis. At the core of our method are transformation relations between the spherical and cylindrical basis sets.

The method is generic in the sense that we can easily change the radius and the character of particles (hard spheres, droplets, permeable spheres etc.). These features are not available in any of the existing methods. Comparison with the available results validates our method. In particular we obtain excellent agreement with the analytically known expression for the single particle friction coefficient. Additionally we observe negative hydrodynamic coupling for finite particles which is consistent with the recently reported effect for point particles. As an example we compute the velocities of polymeric chains of particles in parabolic flow and compare them to

unbounded space. The method will be helpful in the understanding of physical and physicochemical processes in a wide range of bio-, geophysical and microfluidic systems.

Spis treści

1	Wprowadzenie	15
1.1	Skale czasowe istotne dla dynamiki cząstek koloidalnych .	16
1.2	Przegląd literaturowy	20
1.3	Cel i plan pracy	22
2	Opis hydrodynamiczny zawiesiny koloidalnej	25
2.1	Oddziaływania hydrodynamiczne	25
2.2	Równanie całkowe na gęstości sił indukowanych	26
3	Wielocząstkowe oddziaływania hydrodynamiczne w języku metody multipolowej	33
3.1	Baza sferyczna	33
3.2	Układ równań na multipole gęstości sił indukowanych . .	36
3.3	Interpretacja multipoli gęstości siły	40
3.4	Notacja macierzowa	41
4	Zastosowanie metody multipolowej dla układu ograniczonego cylindrycznym mikrokanalem	43
4.1	Geometria i układ współrzędnych	43
4.2	Baza cylindryczna	45
4.3	Elementy macierzowe operatora T_b	48

4.4	Operator odbicia	59
4.5	Macierze transformacji między bazami	61
4.6	Macierze przesunięcia	70
4.7	Symetrie	75
5	Wyniki numeryczne	77
5.1	Macierze tarcia i mobilności	77
5.2	Błędy numeryczne	80
5.3	Ekranowanie oddziaływań hydrodynamicznych	82
5.4	Aksjalny współczynnik tarcia	84
5.5	Problem mobilnościowy dla dwóch cząstek	87
5.6	Cząstki w przepływie parabolicznym	91
6	Podsumowanie	95
A	Definicje i zależności dla funkcji specjalnych wykorzystywanych w rozprawie	99
A.1	Zmodyfikowane funkcje Bessela	99
A.2	Wielomiany Legendre’a	99
A.3	Znormalizowane harmoniki sferyczne	100
A.4	Zależności asymptotyczne	100
A.4.1	Sferyczne funkcje Bessela	100

A.4.2	Funkcje hiperboliczne	101
A.4.3	Hiperboliczne stowarzyszone wielomiany Legendre'a	101
B	Wyprowadzenie tożsamości dla stowarzyszonych wielomianów Legendre'a $P_l^m(x)$	103
C	Rozwinięcie regularnych cylindrycznych rozwiązań równania Laplace'a w regularne sferyczne rozwiązania równania Laplace'a	105

1 Wprowadzenie

Cząstki koloidalne są wszędzie wokół nas. Znajdują się w atmosferze jako cząstki pyłów i kurzu oraz w wodzie jako mikroorganizmy i zawieszone zanieczyszczenia. Możemy je znaleźć w każdym układzie biologicznym w formie makromolekuł. Wobec ich wszechobecności ważne jest by zrozumieć ich własności.

W wielu układach cząstki koloidalne zawarte są w pewnych ograniczonych geometriach. Na przykład w organizmach żywych tym ograniczeniem może być membrana lub kapilara. Podobnie porowata struktura gleby wpływa w istotny sposób na przepływ wody gruntowej z zawieszonymi w niej cząstkami.

Dynamika cząstek koloidalnych jest zależna zarówno od oddziaływań potencjalnych (np. elektrostatycznych) jak i pośrednich oddziaływań hydrodynamicznych związanych z zaburzeniami pola prędkości wywołanych przez obecność cząstek i geometrycznego ograniczenia. Oddziaływania hydrodynamiczne między cząstkami zawieszonymi w cylindrycznym kanale są przedmiotem dużego zainteresowania w inżynierii chemicznej i biomedycznej, a także w inżynierii środowiska. Do badanych procesów należą między innymi sedymentacja, flotacja, koagulacja i depozycja cząstek

[1, 2], ruch komórek krwi w arteriach i żyłach [3] oraz dyfuzja w porach [4]-[6].

W niniejszej pracy skoncentrujemy się na problemie wielocząstkowych oddziaływań hydrodynamicznych między cząstkami sferycznymi zawieszonymi w cylindrycznym mikrokanale. W celu uwypuklenia efektów hydrodynamicznych zakładamy, że cząstki oddziałują bezpośrednio poprzez potencjał twardego rdzenia, co implikuje jedynie niemożliwość przenikania się cząstek.

1.1 Skale czasowe istotne dla dynamiki cząstek koloidalnych

Charakter dynamiki zawiesiny koloidalnej zależy w istotny sposób od wzajemnej relacji skal czasowych odpowiadających procesom zachodzącym w układzie. Dla cząstek o masie m , promieniu a i gęstości ρ_{par} , zanurzonych w płynie o lepkości η i gęstości ρ możemy wyróżnić następujące charakterystyczne skale czasowe:

- Czas relaksacji prędkości cząstki w płynie

$$\tau_{vel} = \frac{m}{\xi} = \frac{2a^2 \rho_{par}}{9\eta}, \quad (1)$$

gdzie ξ jest współczynnikiem tarcia. Dla cząstek sferycznych dany jest on wzorem Stokesa

$$\xi = 6\pi\eta a. \quad (2)$$

- Czas lepkiej relaksacji zaburzeń prędkości cieczy na skali odległości związanej z rozmiarem cząstki

$$\tau_{vis} = \frac{a^2 \rho}{\eta}. \quad (3)$$

- Czas, w którym fala dźwiękowa propaguje się na odległość równą promieniowi cząstki a

$$\tau_{snd} = \frac{a}{c}, \quad (4)$$

gdzie c jest prędkością dźwięku w płynie.

- Charakterystyczny czas, w którym cząstka przemieszcza się na odległość a

$$\tau_{par} = \frac{a}{U}, \quad (5)$$

gdzie U jest prędkością cząstki.

- Czas potrzebny cząstce Brownowskiej na przemieszczenie się na od-

ległość równą jej promieniowi a

$$\tau_{diff} = \frac{a^2}{D}. \quad (6)$$

Współczynnik dyfuzji D dany jest przez tzw. twierdzenie fluktuacyjno-dyssypacyjne Einsteina-Smoluchowskiego [7]

$$D = \frac{k_B T}{\xi}, \quad (7)$$

gdzie k_B oznacza stałą Boltzmanna, a T temperaturę.

Korzystając z powyższych definicji możemy wprowadzić trzy bezwymiarowe parametry charakteryzujące rozważany układ. Są to:

- Liczba Reynoldsa dana przez wyrażenie

$$Re = \frac{\tau_{vis}}{\tau_{par}} = \frac{\rho U a}{\eta}. \quad (8)$$

Można pokazać, że Re jest miarą stosunku sił bezwładności do sił lepkościowych w ruchu płynu wokół cząstek koloidalnych [8]. Dla $Re \ll 1$ siły lepkości dominują nad siłami bezwładnościowymi. Analogicznie dla $Re \gg 1$, efekty bezwładnościowe są czynnikiem dominującym.

- Liczba Pecleta zdefiniowana poprzez wyrażenie

$$Pe = \frac{\tau_{diff}}{\tau_{par}} = \frac{Ua}{D}, \quad (9)$$

jest miarą wpływu ruchów Browna na własności zawiesiny. Jeśli spełniony jest warunek $Pe \gg 1$, to ruchy Browna nie mają istotnego znaczenia dla dynamiki cząstek koloidalnych. Dominującym czynnikiem, decydującym o zachowaniu zawiesiny, jest wówczas ruch cząstek pod wpływem zewnętrznego pola siły.

- Liczba Macha dana przez wyrażenie

$$Ma = \frac{\tau_{snd}}{\tau_{par}} = \frac{U}{c}. \quad (10)$$

Dla $Ma \ll 1$ możemy zaniedbać ściśliwość płynu.

W niniejszej pracy rozważać będziemy zawiesiny niebrownowskie w reżimie małych liczb Reynoldsa, zanurzone w nieściślimym płynie. Zakładamy więc, że $Pe \gg 1$, $Re \ll 1$ i $Ma \ll 1$. Pozwala to ograniczyć się do liniowych równań Stokesa w opisie płynu zamiast rozważać pełne nieliniowe równania Naviera-Stokesa (rozdział 2).

1.2 Przegląd literaturowy

W przeszłości problem dynamiki jednej cząstki koloidalnej w cylindrycznym mikrokanale próbowano rozwiązać analitycznie różnorodnymi technikami perturbacyjnymi słusznymi jedynie dla różnych przypadków granicznych [9]. Można je podzielić na trzy klasy.

Pierwszą klasę stanowi tzw. metoda odbić [10] - [14]. Polega ona na początkowym obliczeniu przepływu odbitego od cząstki w nieograniczonej przestrzeni. Następnie odejmujemy poprawkę w celu wyzerowania prędkości na ściankach cylindra. Zapewnia to spełnienie warunku brzegowego braku poślizgu na powierzchni mikrokanалу, ale psuje spełnienie warunku brzegowego na powierzchni cząstki. W związku z tym wykonuje się kilka iteracji powyższej procedury w celu zmniejszenia popełnianego błędu. Metodę można zastosować tylko wtedy, gdy odległość między środkiem cząstki a cylindrem jest znacznie większa od promienia cząstki. Równoważna technika oparta o regularne szeregi perturbacyjne ma podobne ograniczenia [15], [16].

Druga klasa metod opiera się na przybliżeniu powierzchni mikrokanалу płaszczyzną [17], [18], [19]. Oczywistym ograniczeniem jest spełnienie założenia tylko w granicy dużego stosunku promienia cylindra do promienia cząstki i jej położenia dostatecznie daleko od osi mikrokanалу.

Ostatnia klasa metod dotyczy cząstki wypełniającej mikrokanal prawie

całkowicie. W takim przypadku można użyć tzw. teorii lubrykacji opartej o singularne szeregi perturbacyjne [20], [21].

Powyższych metod nie da się uogólnić na układy wielocząstkowe. W najlepszym przypadku mogą być użyte do obliczenia dwuciałowych wkładów do oddziaływań hydrodynamicznych [22]. Do istotnych prac naukowych z ostatnich kilku lat, które wciąż używają tych przybliżeń należą obliczenia współczynników dyfuzji [22]-[25] i potencjału strumieniowego (ang. streaming potential) generowanego przez cząstkę w przepływie parabolicznym [26, 27].

Wielocząstkowe symulacje zawiesin koloidalnych można także wykonywać korzystając z metod opartych na generacji siatki obliczeniowej takich jak metoda elementów brzegowych [28], [29], [30], metoda elementów spektralnych [31] i metoda elementów skończonych [32], [33], [34], [35] oraz wykonując symulacje dynamiki molekularnej [36], [37]. Wymienione techniki wymagają jednak dużych kosztów obliczeniowych. W związku z tym, istnieje zapotrzebowanie na bardziej wydajne algorytmy wyznaczania dynamiki cząstek koloidalnych w ograniczonych geometriach.

Efektywne metody obliczania oddziaływań hydrodynamicznych w nieograniczonej przestrzeni oraz przy ograniczeniu jedną lub dwoma ścianami są już opracowane [38]-[44]. Opierają się one na rozwinięciu multipolowym prędkości i sił indukowanych na powierzchniach wszystkich cząstek

pod wpływem padającego na nie przepływu [45]-[58]. W konsekwencji algorytmy te są bezsiatkowe, dokładne i szybkie. Ostatnio zastosowano je do obliczania potencjału strumieniowego [59, 60], który jest w centrum zainteresowania wśród naukowców zajmujących mikrofluidyką [61] i przepływami geofizycznymi [62, 63].

1.3 Cel i plan pracy

Celem niniejszej pracy doktorskiej jest opracowanie, implementacja i walidacja algorytmu obliczania oddziaływań hydrodynamicznych między cząstkami koloidalnymi w cylindrycznym mikrokanale. Zagadnienie to będzie rozwiązane w ramach metod opartych na rozwinięciu multipolowym.

Skrócony opis poszczególnych rozdziałów rozprawy jest zawarty poniżej.

- Rozdział 2: Wprowadzenie matematycznego opisu oddziaływań hydrodynamicznych. Podstawowe równania hydrodynamiki w formie różniczkowej, skoncentrowanej na opisie płynu oraz w formie całkowej, kładącej nacisk na opis cząstek koloidalnych.
- Rozdział 3: Ogólny formalizm metody multipolowej. Rzutowanie równań całkowych hydrodynamiki na bazę sferyczną. Interpretacja multipoli gęstości sił indukowanych.

- Rozdział 4: Wprowadzenie bazy cylindrycznej i zastosowanie jej do opisu pola odbitego od ścianek cylindrycznego kanału. Faktoryzacja pola odbitego na pięć operatorów i wyprowadzenie ich jawnej postaci.
- Rozdział 5: Macierze tarcia i mobilności. Walidacja wyprowadzonej metody na podstawie porównania wyników numerycznych z wynikami dostępnymi w literaturze.
- Rozdział 6: Podsumowanie rozprawy doktorskiej.

2 Opis hydrodynamiczny zawiesiny koloidalnej

2.1 Oddziaływania hydrodynamiczne

W rozważanej przez nas skali czasowej (rozdział 1.2) prędkość terminalna U pojedynczej sferycznej cząstki opadającej pod wpływem pewnej siły F osiągana jest natychmiastowo. W tym stanie siła oporu hydrodynamicznego dokładnie równoważy zewnętrzną siłę F a związek między U i F jest liniowy [64]

$$F = \xi U, \quad (11)$$

gdzie ξ jest współczynnikiem tarcia.

Dla układu złożonego z N cząstek powyższą zależność można uogólnić na równanie macierzowe [65]

$$F = \xi \cdot U, \quad (12)$$

gdzie $F = (F_1, \dots, F_N)$ i $U = (U_1, \dots, U_N)$ są $3N$ wielowymiarowymi wektorami, a ξ jest translacyjną macierzą tarcia o wymiarze $3N \times 3N$. Nie jest ona diagonalna, ponieważ zaburzenie pola prędkości generowane przez jedną cząstkę jest przenoszone poprzez płyn i wpływa na ruch wszystkich

pozostałych cząstek. W rozważanej skali czasowej ustanowione tym mechanizmem oddziaływania pomiędzy cząstkami są natychmiastowe. Macierz tarcia, która je opisuje, jest funkcją wyłącznie położenia cząstek. Oddziaływania te, zwane **oddziaływaniami hydrodynamicznymi** są wielociałowe (nie spełniają zasady superpozycji). Ponadto w nieograniczonej przestrzeni są nieskończenie-zasięgowe i osobliwe dla małych odległości między powierzchniami cząstek.

2.2 Równanie całkowe na gęstości sił indukowanych

Rozważmy zawieszinę N niedeformowalnych cząstek koloidalnych o promieniach a_i ($i = 1, \dots, N$) położeniach \mathbf{R}_i i prędkościach translacyjnych \mathbf{U}_i , zanurzonych w nieściśliwym płynie o lepkości dynamicznej η . W rozważanych skalach czasowych (rozdział 1.2) pole prędkości $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ i ciśnienia $p(\mathbf{r})$ płynu spełniają równania Stokesa

$$\eta \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p = -\mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (14)$$

gdzie $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ reprezentuje gęstość sił działających na płyn.

Równania (13) i (14) są liniowe stąd ich rozwiązania dla dowolnej funkcji $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ możemy w prosty sposób wyrazić poprzez tzw. funkcje Greena.

Znajdujemy je rozważając równania Stokesa dla siły punktowej \mathbf{f} zlokalizowanej w punkcie \mathbf{r}_0

$$\eta \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p = -\mathbf{f} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (16)$$

których rozwiązania dla układu nieograniczonego mają postać [66]

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{T}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{f}, \quad (17)$$

$$p(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{f}, \quad (18)$$

gdzie \mathbf{T}_0 jest tzw. tensorem Oseena

$$\mathbf{T}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \mathbf{T}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (19)$$

$$\mathbf{T}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\eta r} \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^2} \right), \quad (20)$$

$$\mathbf{P}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \mathbf{P}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (21)$$

$$\mathbf{P}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{4\pi r^3}. \quad (22)$$

Wpływ cząstek na otaczający płyn może być opisany poprzez rozkład gęstości sił indukowanych na powierzchniach cząstek [45], [46], [47], [48]

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{a_i^2} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{a}_i) \mathbf{f}_i(\mathbf{r}), \quad (23)$$

gdzie

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r} - \mathbf{R}_i. \quad (24)$$

Podstawowe równanie opisujące dynamikę cząstek (12) związane jest z rozkładem gęstości sił indukowanych poprzez wyrażenie

$$\mathcal{F}_i = \int \mathbf{F}_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (25)$$

na całkowitą siłę. W związku z tym w celu wyznaczenia macierzy tarcia musimy najpierw wyznaczyć gęstość sił indukowanych dla danych prędkości cząstek.

Z liniowości równań Stokesa wynika, że dla dowolnego rozkładu gęstości sił pole prędkości w dowolnym punkcie poza cząstkami można wyznaczyć na podstawie znajomości funkcji Greena $\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ [11],[48]

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_\infty(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^N \int \mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{F}_i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (26)$$

gdzie uwzględniono także możliwy zewnętrzny przepływ $\mathbf{v}_\infty(\mathbf{r})$. Ponadto z tensora Greena $\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ można wydzielić w sposób jawny tensor Oseena (20)

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{T}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \mathbf{T}_b(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (27)$$

Powyższe rozdzielanie pozwala zinterpretować tensor $\mathbf{T}_b(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ jako opisujący pole odbite od powierzchni ograniczających zawieszinę koloidalną (np. ścianek [40] lub interfejsów oddzielających dwie cieczy [67],[68]). Będziemy korzystali z tej interpretacji w rozdziale 4 przy wyprowadzaniu pola odbitego od ścianek mikrokanalu. Dla przypadku cieczy nieograniczonej mamy

$$\mathbf{T}_b(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0. \quad (28)$$

W układzie wielocząstkowym przepływ padający na i -tą cząstkę \mathbf{v}_i^{in} jest zdefiniowany poprzez równanie

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_i^{in}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_i^{out}(\mathbf{r}), \quad (29)$$

gdzie

$$\mathbf{v}_i^{out}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{T}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{F}_i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (30)$$

Z liniowości równań Stokesa wynika także liniowość związku między rozkładem gęstości sił \mathbf{F}_i indukowanych na powierzchni S_i i-tej cząstki a przepływem \mathbf{v}_i^{in} [47],[48]. Wielkości te łączy operator \mathbf{Z}_i zwany jedno-cząstkowym operatorem tarcia

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{r}) = - \int \mathbf{Z}_i(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i, \mathbf{r}' - \mathbf{R}_i) \cdot (\mathbf{v}_i^{in}(\mathbf{r}') - \mathbf{v}_i^{rb}(\mathbf{r}')) d\mathbf{r}', \quad (31)$$

gdzie

$$\mathbf{v}_i^{rb}(\mathbf{r}) = \mathbf{U}_i + \boldsymbol{\Omega}_i \times (\mathbf{r} - \mathbf{R}_i), \quad (32)$$

jest prędkością ruchu sztywnego cząstki poruszającej się z prędkością liniową \mathbf{U}_i i kątową $\boldsymbol{\Omega}_i$. Wielkość $\mathbf{v}_i^{in} - \mathbf{v}_i^{rb}$ jest prędkością przepływu padającego na i-tą cząstkę w układzie odniesienia związanym z tą cząstką.

Operator \mathbf{Z}_i zależy od konkretnych warunków brzegowych na powierzchni cząstek. Jego postać wyznacza się rozwiązując równania Stokesa dla pojedynczej cząstki znajdującej się w zewnętrznym przepływie. Przykłady jawnych postaci operatora \mathbf{Z}_i można znaleźć w publikacjach [55], [69], [70]. Związek (31) można odwrócić co daje nam zależność

$$\mathbf{v}_i^{in}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}_i^{rb}(\mathbf{r}) = - \int \mathbf{Z}_i^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i, \mathbf{r}' - \mathbf{R}_i) \cdot \mathbf{F}_i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in S_i. \quad (33)$$

Łącząc równania (29),(30) i (33) otrzymujemy wyrażenie

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = & \mathbf{v}_i^{rb}(\mathbf{r}) - \int \mathbf{Z}_i^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i, \mathbf{r}' - \mathbf{R}_i) \cdot \mathbf{F}_i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (34) \\ & + \int \mathbf{T}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{F}_i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \mathbf{r} \in S_i, \end{aligned}$$

na przepływ na powierzchni i-tej cząstki. Podstawiając teraz (26) do (34) dostajemy równanie całkowe na gęstości sił indukowanych \mathbf{F}_i

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^{rb}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}_\infty(\mathbf{r}) = & \int \mathbf{Z}_i^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i, \mathbf{r}' - \mathbf{R}_i) \cdot \mathbf{F}_i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (35) \\ & + \sum_{j=1}^N \int [(1 - \delta_{ij}) \mathbf{T}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \mathbf{T}_b(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot \mathbf{F}_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \mathbf{r} \in S_i. \end{aligned}$$

Przewaga powyższego równania nad równaniami Stokesa tkwi w rozdzielaniu na trzy niezależne operatory \mathbf{Z}_i , \mathbf{T}_0 i \mathbf{T}_b . Zmieniając wyłącznie warunki brzegowe na powierzchni cząstek zmieniamy tylko operator \mathbf{Z}_i , reszta operatorów pozostaje w tej samej formie. Podobnie zmieniając geometrię ograniczającą zawieszinę lub warunek brzegowy na niej, zmianie ulegnie wyłącznie operator \mathbf{T}_b . Powyższe równanie stanowić będzie podstawę wyprowadzeń w następnym rozdziale.

3 Wielocząstkowe oddziaływania hydrodynamiczne w języku metody multipolowej

W poprzednim rozdziale pokazano równoważność podejścia polegającego na rozwiązywaniu równań Stokesa dla naszego układu z rozwiązywaniem równania całkowego (35) dla gęstości sił indukowanych na powierzchni cząstek. Teraz rzutujemy (35) na bazę utworzoną z rozwiązań równań Stokesa w zmiennych sferycznych (od tej pory będziemy nazywać ją po prostu bazą sferyczną). W wyniku tej operacji otrzymamy nieskończony układ równań algebraicznych będący podstawą numerycznego obliczania macierzy tarcia.

3.1 Baza sferyczna

Regularne $v_{lm\sigma}^+$ i singularne $v_{lm\sigma}^-$ ($l = 1, 2, \dots; m = -l, \dots, +l; \sigma = 0, 1, 2$) rozwiązania równań Stokesa w zmiennych sferycznych tworzą bazę zupełną [40],[55]. Ich składowe można zwięźle przedstawić w postaci macierzowej

$$\mathbf{V}_{SPH}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{v}_{lm0}^+ & \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{v}_{lm1}^+ & \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{v}_{lm2}^+ \\ \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{v}_{lm0}^+ & \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{v}_{lm1}^+ & \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{v}_{lm2}^+ \\ \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{v}_{lm0}^+ & \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{v}_{lm1}^+ & \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{v}_{lm2}^+ \end{bmatrix} = r^{l-1} \begin{bmatrix} lY_{lm} \\ \partial_\theta Y_{lm} \\ \frac{im}{\sin \theta} Y_{lm} \end{bmatrix}; \quad (36)$$

$$r^l \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{i(l+1)} \frac{im}{\sin \theta} Y_{lm} \\ -\frac{1}{i(l+1)} \partial_\theta Y_{lm} \end{bmatrix}; \frac{1}{(l+1)(2l+3)} \frac{l+3}{2} r^{l+1} \begin{bmatrix} Y_{lm} \frac{l(l+1)}{l+3} \\ \partial_\theta Y_{lm} \\ \frac{im}{\sin \theta} Y_{lm} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}_{SPH}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{v}_{lm0}^- & \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{v}_{lm1}^- & \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{v}_{lm2}^- \\ \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{v}_{lm0}^- & \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{v}_{lm1}^- & \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{v}_{lm2}^- \\ \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{v}_{lm0}^- & \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{v}_{lm1}^- & \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{v}_{lm2}^- \end{bmatrix} = \frac{1}{2l+1} \frac{-2l^2+3l+2}{(2l+1)2l(2l-1)} r^{-l} \quad (37)$$

$$\times \begin{bmatrix} lY_{lm} \left(\frac{2l^2+3l+1}{-2l^2+3l+2} \right) \\ \partial_\theta Y_{lm} \\ \frac{im}{\sin \theta} Y_{lm} \end{bmatrix}; \frac{1}{il} r^{-l-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{im}{\sin \theta} Y_{lm} \\ -\partial_\theta Y_{lm} \end{bmatrix}; r^{-l-2} \begin{bmatrix} -(l+1)Y_{lm} \\ \partial_\theta Y_{lm} \\ \frac{im}{\sin \theta} Y_{lm} \end{bmatrix},$$

gdzie Y_{lm} jest harmoniką sferyczną znormalizowaną tak jak w [71] a e_r, e_θ, e_ϕ to wersory rozpinające lokalny sferyczny układ współrzędnych. Funkcje $v_{lm\sigma}^+$ są skończone w granicy $r \rightarrow 0$ i wybuchają dla $r \rightarrow \infty$. Analogicznie $v_{lm\sigma}^-$ są skończone w granicy $r \rightarrow \infty$ i wybuchają dla $r \rightarrow 0$.

Powyższa baza nie jest ortonormalna na powierzchni cząstek, dlatego użyteczne jest wprowadzenie kobazy $w_{lm\sigma}^\pm$ zdefiniowanej poprzez warunek ortonormalności na powierzchni sfery o promieniu a [44]

$$\int \mathbf{w}_{lm\sigma}^{\pm*}(\mathbf{r}) \frac{1}{a} \delta(r-a) \cdot \mathbf{v}_{l_1 m_1 \sigma_1}^\pm(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{ll_1} \delta_{mm_1} \delta_{\sigma\sigma_1}. \quad (38)$$

W celu zwartego przedstawiania wyrażeń powyższego typu będziemy od tej pory używali standardowej notacji braketowej Diraca [72]. Warunek (38) ma w tej notacji postać

$$\langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^\pm(\mathbf{r}) \delta_a | \mathbf{v}_{l_1 m_1 \sigma_1}^\pm(\mathbf{r}) \rangle = \delta_{ll_1} \delta_{mm_1} \delta_{\sigma\sigma_1}, \quad (39)$$

gdzie

$$\delta_a = \frac{1}{a} \delta(r-a), \quad (40)$$

i

$$\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle = \int \mathbf{A}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (41)$$

Tensor Oseena można rozwinąć w naszej bazie sferycznej [73]

$$\mathbf{T}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{\eta} \sum_{lm\sigma} \mathbf{v}_{lm\sigma}^-(\mathbf{r}_>) \mathbf{v}_{lm\sigma}^{+*}(\mathbf{r}_<), \quad (42)$$

gdzie $r_< = \min(r, r')$, $r_> = \max(r, r')$. Jest to rozwinięcie analogiczne do znanego z elektrodynamiki rozwinięcia funkcji Greena równania Laplace'a w bazie jego rozwiązań regularnych i singularnych [74] (patrz równanie (), str.).

3.2 Układ równań na multipole gęstości sił indukowanych

Biorąc iloczyn skalarny (w sensie (41)) obu stron równania całkowego (35) z funkcjami $\mathbf{w}_{lm\sigma}^{\pm*}(\mathbf{r}) \frac{1}{a} \delta(r - a)$ oraz korzystając z zupełności bazy sferycznej otrzymujemy nieskończony układ równań algebraicznych

$$c_i(lm\sigma) = \sum_{j=1}^N \sum_{l'=1}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \sum_{\sigma'=0}^2 M_{ij}(lm\sigma, l'm'\sigma') f_j(l'm'\sigma'), \quad (43)$$

gdzie multipole gęstości siły dane są poprzez wyrażenie

$$f_j(lm\sigma) = \int \mathbf{v}_{lm\sigma}^{+*}(\mathbf{r}' - \mathbf{R}_j) \cdot \mathbf{F}_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \langle \mathbf{v}_{lm\sigma}^+ | \mathbf{F}_j \rangle, \quad (44)$$

a multipole prędkości przez

$$c_i(lm\sigma) = \langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+(i) \delta_{a_i} | \mathbf{v}_i^{rb} - \mathbf{v}_\infty \rangle. \quad (45)$$

Dla prostoty użyliśmy notacji $\mathbf{w}_{lm\sigma}^+(i) = \mathbf{w}_{lm\sigma}^+(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i)$. Z fizycznego punktu widzenia warto rozróżnić dwa wkłady do multipoli prędkości

$$c_i(lm\sigma) = c_{i,rb}(lm\sigma) - c_{i,\infty}(lm\sigma), \quad (46)$$

gdzie $c_{i,rb}(lm\sigma)$ jest wkładem związanym z ruchem sztywnym cząstki i

$$c_{i,rb}(lm\sigma) = \langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+(i) \delta_{a_i} | \mathbf{v}_i^{rb} \rangle, \quad (47)$$

a $c_{i,\infty}(lm\sigma)$ jest wkładem związanym z przepływem zewnętrznym

$$c_{i,\infty}(lm\sigma) = \langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+(i) \delta_{a_i} | \mathbf{v}_\infty \rangle. \quad (48)$$

Powyższe wzory na $c_{i,rb}$ i $c_{i,\infty}$ są ekwiwalentne następującym rozwinięciom

$$U_i + \boldsymbol{\Omega}_i \times (\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{\sigma=0}^1 c_{i,rb} (lm\sigma) \mathbf{v}_{lm\sigma}^+ (\mathbf{r} - \mathbf{R}_i), \quad (49)$$

$$\mathbf{v}_\infty (\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{\sigma=0}^2 c_{i,\infty} (lm\sigma) \mathbf{v}_{lm\sigma}^+ (\mathbf{r} - \mathbf{R}_i). \quad (50)$$

Elementy macierzowe M_{ij} zawierają trzy wkłady

$$\begin{aligned} M_{ij} (lm\sigma, l'm'\sigma') &= \delta_{ij} Z_i^{-1} (lm\sigma, l'm'\sigma') \\ &+ (1 - \delta_{ij}) T_{ij}^0 (lm\sigma, l'm'\sigma') \\ &+ T_{ij}^b (lm\sigma, l'm'\sigma'), \end{aligned} \quad (51)$$

gdzie

$$Z_i^{-1} (lm\sigma, l'm'\sigma') = \langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+ (i) \delta_{a_i} | \mathbf{Z}_i^{-1} | \mathbf{w}_{l'm'\sigma'}^+ (i) \delta_{a_i} \rangle, \quad (52)$$

$$T_{ij}^0 (lm\sigma, l'm'\sigma') = \langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+ (i) \delta_{a_i} | \mathbf{T}_0 | \mathbf{w}_{l'm'\sigma'}^+ (j) \delta_{a_j} \rangle, \quad (53)$$

$$T_{ij}^b (lm\sigma, l'm'\sigma') = \langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+ (i) \delta_{a_i} | \mathbf{T}_b | \mathbf{w}_{l'm'\sigma'}^+ (j) \delta_{a_j} \rangle. \quad (54)$$

Jawne wyrażenia na $\mathbf{Z}_i (lm\sigma, l'm'\sigma')$ dla różnych typów cząstek zawarte są w [55], [69], [70].

Elementy macierzowe $T_{ij}^0(lm\sigma, l'm'\sigma')$ mogą być obliczone korzystając z rozwinięcia tensora Oseena w bazie sferycznej (42) oraz z warunku ortonormalności (38)

$$\begin{aligned} T_{ij}^0(lm\sigma, l'm'\sigma') &= \langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+(i) \delta_{a_i} | \mathbf{T}_0 | \mathbf{w}_{l'm'\sigma'}^+(j) \delta_{a_j} \rangle \\ &= \frac{1}{\eta} \langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+(i) \delta_{a_i} | \mathbf{v}_{l'm'\sigma'}^-(j) \rangle. \end{aligned} \quad (55)$$

Powyższy element macierzowy pojawia się także przy rozwinięciu singularnego pola $\mathbf{v}_{l'm'\sigma'}^-$ zcentrowanego na cząstce j na regularne pole $\mathbf{v}_{lm\sigma}^+$ zcentrowane na cząstce i [38]

$$\mathbf{v}_{l'm'\sigma'}^-(j) = \sum_{lm\sigma} \mathbf{v}_{lm\sigma}^+(i) \langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+(i) \delta_{a_i} | \mathbf{v}_{l'm'\sigma'}^-(j) \rangle. \quad (56)$$

Konkretne wartości współczynników rozwinięcia dane są przez tzw. twierdzenie o przesunięciu (*displacement theorem*) w postaci macierzy przesunięcia S^{+-} [75]

$$\begin{aligned} T_{ij}^0(lm\sigma, l'm'\sigma') &= \frac{1}{\eta} \langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+(i) \delta_{a_i} | \mathbf{v}_{l'm'\sigma'}^-(j) \rangle \\ &= \frac{1}{\eta} \frac{n_{lm}}{n_{l'm'}} S^{+-}(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j; lm\sigma, l'm'\sigma'), \end{aligned} \quad (57)$$

gdzie n_{lm} jest stałą normalizacji harmonik sferycznych

$$n_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}}. \quad (58)$$

3.3 Interpretacja multipoli gęstości siły

W układzie wielocząstkowym przepływ rozproszony przez i -tą cząstkę \mathbf{v}_i^{out} dany jest wyrażeniem (30)

$$\mathbf{v}_i^{out}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}_i^{in}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{T}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{F}_i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

Podstawiając do powyższego równania rozwinięcie tensora Oseena w bazie sferycznej (42) otrzymujemy

$$\mathbf{v}_i^{out}(\mathbf{r}) = \sum_{lm\sigma} \frac{f_i(lm\sigma)}{\eta} \mathbf{v}_{lm\sigma}^-(i), \quad (59)$$

gdzie skorzystaliśmy także z definicji multipoli gęstości sił (44).

Rozważmy teraz ogólne rozwinięcie \mathbf{v}_i^{out} na funkcje $\mathbf{v}_{lm\sigma}^-(i)$

$$\mathbf{v}_i^{out}(\mathbf{r}) = \sum_{lm\sigma} c_i^-(lm\sigma) \mathbf{v}_{lm\sigma}^-(i). \quad (60)$$

Porównując (59) i (60) dostajemy

$$c_i^-(lm\sigma) = \frac{f_i(lm\sigma)}{\eta}. \quad (61)$$

Z powyższego równania wynika, że możemy interpretować multipole gęstości sił $f_i(lm\sigma)$ jako współczynniki rozwinięcia pola rozproszonego przez i -tą cząstkę \mathbf{v}_i^{out} na funkcje bazowe $\mathbf{v}_{lm\sigma}^-(i)$. Będziemy korzystali z tej interpretacji w rozdziale 4.3 przy wyprowadzaniu jawnego wyrażenia na macierz T_{ij}^b .

3.4 Notacja macierzowa

W dalszej części rozprawy będziemy używać także zwartej notacji macierzowej trójwymiarowej przestrzeni liniowej o składowych odpowiadających indeksom $\sigma = 0, 1, 2$. W związku z tym elementy macierzowe (52)-(54) będą oznaczane przez $\mathbf{Z}_i^{-1}(lm, l'm')$, $\mathbf{T}_{ij}^0(lm, l'm')$ i $\mathbf{T}_{ij}^b(lm, l'm')$. Analogicznie zmienne z jednym indeksem σ takie jak $c_i(lm\sigma)$ będą traktowane jak wektory kolumnowe $\mathbf{c}_i(lm)$. W tej notacji nasz główny układ równań (43) przyjmuje postać

$$\mathbf{c}_i(lm) = \sum_{j=1}^N \sum_{l'=1}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \mathbf{M}_{ij}(lm, l'm') \cdot \mathbf{f}_j(l'm'), \quad (62)$$

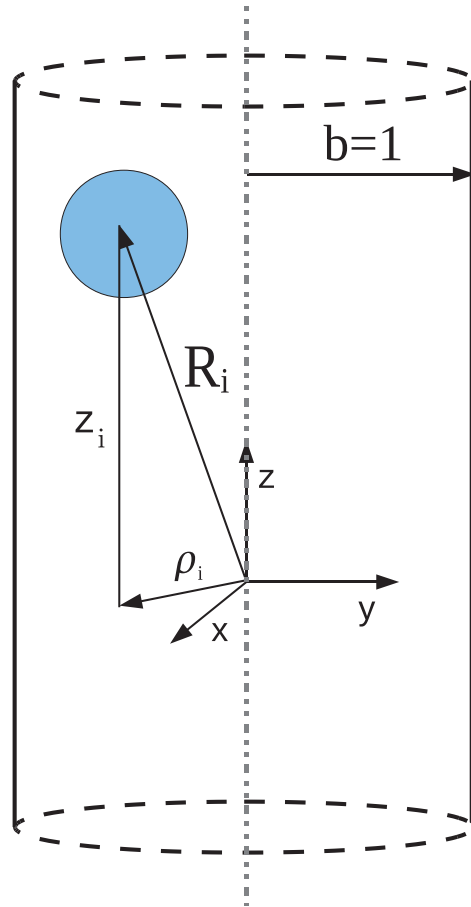
gdzie \cdot oznacza mnożenie macierzowe.

4 Zastosowanie metody multipolowej dla układu ograniczonego cylindrycznym mikrokanalem

Ogólną strukturę metody multipolowej obliczania oddziaływań hydrodynamicznych przedstawioną w poprzednim rozdziale można zastosować do jakiegokolwiek geometrii ograniczającej. W tym rozdziale skonstruujemy odpowiednią bazę cylindryczną, którą użyjemy do wyznaczenia przepływu odbitego od cylindrycznego mikrokanalu. Wyprowadzając dodatkowo relacje transformujące bazę sferyczną w cylindryczną i odwrotnie będziemy mogli wyznaczyć elementy macierzowe T_{ij}^b (54).

4.1 Geometria i układ współrzędnych

Rozważamy cylindryczny mikrokanal o promieniu b , wypełniony zawieszoną koloidalną złożoną z cieczy o lepkości dynamicznej η i zanurzonych w niej N sferycznych cząstek o promieniach a_i ($i = 1, \dots, N$). Układ współrzędnych jest zcentrowany na osi cylindra (rysunek 1). Do parametrów charakteryzujących i -tą cząstkę należą położenie środka sfery \mathbf{R}_i ($\rho_i + z_i \mathbf{e}_z$ we współrzędnych cylindrycznych), prędkość translacyjna \mathbf{U}_i i prędkość kątowna Ω_i . Ponadto jako skalę długości ustalamy $b = 1$.



Rysunek 1: Mikrokanal z układem współrzędnych zcentrowanym na osi cylindra. Położenia są wyrażane zarówno w sferycznych jak i cylindrycznych współrzędnych.

4.2 Baza cylindryczna

Cylindryczną bazę regularną $\mathbf{v}_{km\sigma}^+$ i singularną $\mathbf{v}_{km\sigma}^-$ tworzą rozwiązania równań Stokesa w zmiennych cylindrycznych wzięte z [76] ale z innymi prefaktorami. Ich składowe dane są następującymi macierzami

$$\mathbf{V}_{CYL}^+(\mathbf{r}; k, m) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{v}_{km0}^+ & \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{v}_{km1}^+ & \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{v}_{km2}^+ \\ \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{v}_{km0}^+ & \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{v}_{km1}^+ & \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{v}_{km2}^+ \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v}_{km0}^+ & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v}_{km1}^+ & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v}_{km2}^+ \end{bmatrix} = \frac{1}{k} e^{im\phi} e^{ikz} \quad (63)$$

$$\times \begin{bmatrix} I_m'(|k|\rho) & -\frac{im}{\rho} I_m(|k|\rho) & \frac{1}{2}\rho I_m''(|k|\rho) \\ \frac{im}{\rho} I_m(|k|\rho) & I_m'(|k|\rho) & \frac{1}{2}im \left(-\frac{1}{\rho} I_m(|k|\rho) + I_m'(|k|\rho) \right) \\ ik I_m(|k|\rho) & 0 & \frac{1}{2}ik (\rho I_m'(|k|\rho) + I_m(|k|\rho)) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}_{CYL}^-(\mathbf{r}; k, m) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{v}_{km0}^- & \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{v}_{km1}^- & \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{v}_{km2}^- \\ \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{v}_{km0}^- & \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{v}_{km1}^- & \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{v}_{km2}^- \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v}_{km0}^- & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v}_{km1}^- & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v}_{km2}^- \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{k} e^{im\phi} e^{ikz} \quad (64)$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\rho K_m''(|k|\rho) & \frac{im}{\rho} K_m(|k|\rho) & K_m'(|k|\rho) \\ \frac{1}{2}im \left(-\frac{1}{\rho} K_m(|k|\rho) + K_m'(|k|\rho) \right) & -K_m'(|k|\rho) & \frac{im}{\rho} K_m(|k|\rho) \\ \frac{1}{2}ik (\rho K_m'(|k|\rho) + K_m(|k|\rho)) & 0 & ik K_m(|k|\rho) \end{bmatrix},$$

gdzie I_m i K_m są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela, odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju, prim oznacza różniczkowanie tylko po ρ , \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_ϕ , \mathbf{e}_z to wersory rozpinające lokalny cylindryczny układ współrzędnych a ρ , ϕ , z to składowe cylindryczne wektora \mathbf{r} . Funkcje $\mathbf{v}_{km\sigma}^+$ są skończone w granicy $r \rightarrow 0$ i wybuchają dla $r \rightarrow \infty$. Analogicznie $\mathbf{v}_{km\sigma}^-$ są skończone w granicy $r \rightarrow \infty$ i wybuchają dla $r \rightarrow 0$.

Pola bazowe zcentrowane w różnych punktach definiują tzw. macierze przesunięcia \mathbf{S}_{CYL}^{++} i \mathbf{S}_{CYL}^{--} , przydatne przy późniejszych wyprowadzeniach. Dla szczególnego przypadku, gdy jedna z baz jest zcentrowana na osi cylindra a druga poza osią w punkcie wyznaczonym przez wektor $\boldsymbol{\rho}_0$ o

zerowej współrzędnej z-towej, definicje te przybierają postać

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{km0}^+(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_0) \\ \mathbf{v}_{km1}^+(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_0) \\ \mathbf{v}_{km2}^+(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_0) \end{bmatrix}^T = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{ks0}^+(\mathbf{r}) \\ \mathbf{v}_{ks1}^+(\mathbf{r}) \\ \mathbf{v}_{ks2}^+(\mathbf{r}) \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{S}_{CYL}^{++}(\boldsymbol{\rho}_0; k, s, m), \quad (65)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{km0}^-(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_0) \\ \mathbf{v}_{km1}^-(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_0) \\ \mathbf{v}_{km2}^-(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_0) \end{bmatrix}^T = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{ks0}^-(\mathbf{r}) \\ \mathbf{v}_{ks1}^-(\mathbf{r}) \\ \mathbf{v}_{ks2}^-(\mathbf{r}) \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{S}_{CYL}^{--}(\boldsymbol{\rho}_0; k, s, m). \quad (66)$$

Macierz przesunięcia dla dwóch baz zcentrowanych na osi cylindra w punktach o współrzędnej z-towej równych z_i i z_j jest trywialna. Z jawnej postaci bazy cylindrycznej widzimy, że sprowadza się ona do skalaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{km0}^+(\mathbf{r} - z_j \mathbf{e}_z) \\ \mathbf{v}_{km1}^+(\mathbf{r} - z_j \mathbf{e}_z) \\ \mathbf{v}_{km2}^+(\mathbf{r} - z_j \mathbf{e}_z) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{km0}^+(\mathbf{r} - z_i \mathbf{e}_z) \\ \mathbf{v}_{km1}^+(\mathbf{r} - z_i \mathbf{e}_z) \\ \mathbf{v}_{km2}^+(\mathbf{r} - z_i \mathbf{e}_z) \end{bmatrix}^T \cdot e^{ik(z_i - z_j)}, \quad (67)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{km0}^-(\mathbf{r} - z_j \mathbf{e}_z) \\ \mathbf{v}_{km1}^-(\mathbf{r} - z_j \mathbf{e}_z) \\ \mathbf{v}_{km2}^-(\mathbf{r} - z_j \mathbf{e}_z) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{km0}^-(\mathbf{r} - z_i \mathbf{e}_z) \\ \mathbf{v}_{km1}^-(\mathbf{r} - z_i \mathbf{e}_z) \\ \mathbf{v}_{km2}^-(\mathbf{r} - z_i \mathbf{e}_z) \end{bmatrix}^T \cdot e^{ik(z_i - z_j)}. \quad (68)$$

4.3 Elementy macierzowe operatora T_b

Pole prędkości wewnątrz cylindra wynikające z obecności cząstek można rozłożyć na niezależne składniki w następujący sposób

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \sum_j^N [\mathbf{v}_{w,j}^{in}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_{w,j}^{out}(\mathbf{r})], \quad (69)$$

gdzie

$$\mathbf{v}_{w,j}^{in} = \int \mathbf{T}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{F}_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (70)$$

$$\mathbf{v}_{w,j}^{out} = \int \mathbf{T}_b(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{F}_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (71)$$

Wielkość $\mathbf{v}_{w,j}^{in}$ można interpretować jako pole prędkości, którego źródłem jest j -ta cząstka, padająca na powierzchnię mikrokanału. Podobnie $\mathbf{v}_{w,j}^{out}$ interpretujemy jako pole odbite od mikrokanału, którego źródłem jest j -ta cząstka. Porównując (30) i (70) otrzymujemy równość pola rozproszonego przez cząstkę i pola padającego na cylinder co jest zgodne z naszymi oczekiwaniami

$$\mathbf{v}_j^{out} = \mathbf{v}_{w,j}^{in}. \quad (72)$$

Pola $\mathbf{v}_{w,j}^{in}$ i $\mathbf{v}_{w,j}^{out}$ są odpowiednio singularne i regularne, dlatego możemy je rozwinąć na analogiczne funkcje tworzące bazę cylindryczną

$$\mathbf{v}_{w,j}^{in}(\mathbf{r}) = \int dk \sum_m \sum_\sigma \mathbf{v}_{km\sigma}^-(jaxis) c_{w,j}^{in}(k, m, \sigma), \quad (73)$$

$$\mathbf{v}_{w,j}^{out}(\mathbf{r}) = \int dk \sum_m \sum_\sigma \mathbf{v}_{km\sigma}^+(jaxis) c_{w,j}^{out}(k, m, \sigma), \quad (74)$$

gdzie dla prostoty wprowadziliśmy oznaczenie $\mathbf{v}_{km\sigma}^{+-}(jaxis) = \mathbf{v}_{km\sigma}^{+-}(\mathbf{r} - z_j \mathbf{e}_z)$.

W notacji macierzowej powyższe rozwinięcia przybierają postać

$$\mathbf{v}_{w,j}^{in}(\mathbf{r}) = \int dk \sum_m [\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z] \cdot \mathbf{V}_{CYL}^-(jaxis; k, m) \cdot \mathbf{c}_{w,j}^{in}(k, m), \quad (75)$$

$$\mathbf{v}_{w,j}^{out}(\mathbf{r}) = \int dk \sum_m [\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z] \cdot \mathbf{V}_{CYL}^+(jaxis; k, m) \cdot \mathbf{c}_{w,j}^{out}(k, m). \quad (76)$$

Równanie (71) można rzutować na bazę sferyczną analogicznie jak przy wyprowadzaniu układu równań algebraicznych (43). W wyniku otrzymujemy

$$\langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+(i) \delta_{a_i} | \mathbf{v}_{w,j}^{out} \rangle = \sum_{l', m', \sigma'} T_{ij}^b(lm\sigma, l'm'\sigma') f_j(l'm'\sigma'). \quad (77)$$

Lewą stroną równania (77) można wyrazić także przy pomocy rozwinięcia (74) jako

$$\langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+ (i) \delta_{a_i} | \mathbf{v}_{w,j}^{out} \rangle = \int dk \sum_{m_1} \sum_{\sigma_1} \langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+ (i) \delta_{a_i} | \mathbf{v}_{km_1\sigma_1}^+ (jaxis) \rangle c_{w,j}^{out} (k, m_1, \sigma_1). \quad (78)$$

Korzystając z aksjalnej macierzy przesunięcia (67) dostajemy

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+ (i) \delta_{a_i} | \mathbf{v}_{w,j}^{out} \rangle &= \int dk \sum_{m_1} \sum_{\sigma_1} e^{ik(z_i - z_j)} \\ &\times \langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+ (i) \delta_{a_i} | \mathbf{v}_{km_1\sigma_1}^+ (iaxis) \rangle c_{w,j}^{out} (k, m_1, \sigma_1). \end{aligned} \quad (79)$$

Następnie możemy zastosować definicję radialnej macierzy przesunięcia (65)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+ (i) \delta_{a_i} | \mathbf{v}_{w,j}^{out} \rangle &= \int dk \sum_{m_1} \sum_{\sigma_1} \sum_{m_2} \sum_{\sigma_2} e^{ik(z_i - z_j)} \\ &\times \langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+ (i) \delta_{a_i} | \mathbf{v}_{km_2\sigma_2}^+ (i) \rangle [\mathbf{S}_{CYL}^{++} (-\boldsymbol{\rho}_i; k, m_2, m_1)]_{\sigma_2\sigma_1} c_{w,j}^{out} (k, m_1, \sigma_1), \end{aligned} \quad (80)$$

gdzie $[\mathbf{A}]_{\sigma_2\sigma_1}$ oznacza element $A_{\sigma_2\sigma_1}$ macierzy \mathbf{A} .

Element macierzowy $\langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+ (i) \delta_{a_i} | \mathbf{v}_{km_2\sigma_2}^+ (i) \rangle$ możemy obliczyć poprzez wprowadzenie macierzy zmiany bazy \mathbf{T}_{SC}^{++} zdefiniowanej poprzez wyrażenie

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{km0}^+ \\ \mathbf{v}_{km1}^+ \\ \mathbf{v}_{km2}^+ \end{bmatrix}^T = \sum_l \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{lm0}^+ \\ \mathbf{v}_{lm1}^+ \\ \mathbf{v}_{lm2}^+ \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{T}_{SC}^{++} (lm, k). \quad (81)$$

Podstawiając (81) do (80) dostajemy

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+ (i) \delta_{a_i} | \mathbf{v}_{w,j}^{out} \rangle &= \int dk \sum_{m_1} \sum_{\sigma_1} \sum_{m_2} \sum_{\sigma_2} \sum_{l'} \sum_{\sigma_3} e^{ik(z_i - z_j)} \\ &\times \langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+ (i) \delta_{a_i} | \mathbf{v}_{l'm_2\sigma_3}^+ (i) \rangle [\mathbf{T}_{SC}^{++} (l'm_2, k)]_{\sigma_3\sigma_2} \\ &\times [\mathbf{S}_{CYL}^{++} (-\boldsymbol{\rho}_i; k, m_2, m_1)]_{\sigma_2\sigma_1} c_{w,j}^{out} (k, m_1, \sigma_1). \end{aligned} \quad (82)$$

Relacja ortogonalności (39) dla bazy sferycznej upraszcza nam powyższe równanie do postaci

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+ (i) \delta_{a_i} | \mathbf{v}_{w,j}^{out} \rangle &= \int dk \sum_{m_1} \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} e^{ik(z_i - z_j)} \\ &\times [\mathbf{T}_{SC}^{++} (lm, k)]_{\sigma\sigma_2} [\mathbf{S}_{CYL}^{++} (-\boldsymbol{\rho}_i; k, m, m_1)]_{\sigma_2\sigma_1} c_{w,j}^{out} (k, m_1, \sigma_1). \end{aligned} \quad (83)$$

Teraz zajmiemy się współczynnikiem $c_{w,j}^{out}$. Wprowadzamy w tym celu operator odbicia zapewniający spełnienie zadanego warunku brzegowego na ściankach cylindra (na przykład warunek braku poślizgu) zdefiniowany jako [40]

$$c_{w,j}^{out}(k, m, \sigma) = - \sum_{\sigma'} [\mathbf{Z}_C(k, m)]_{\sigma\sigma'} c_{w,j}^{in}(k, m, \sigma'), \quad (84)$$

lub ekwiwalentnie w notacji macierzowej

$$\mathbf{c}_{w,j}^{out}(k, m) = -\mathbf{Z}_C(k, m) \cdot \mathbf{c}_{w,j}^{in}(k, m). \quad (85)$$

Po podstawieniu (84) do (83) dostajemy

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+(i) \delta_{a_i} | \mathbf{v}_{w,j}^{out} \rangle &= - \int dk \sum_{m_1} \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \sum_{\sigma_3} e^{ik(z_i - z_j)} \\ &\times [\mathbf{T}_{SC}^{++}(lm, k)]_{\sigma\sigma_2} [\mathbf{S}_{CYL}^{++}(-\boldsymbol{\rho}_i, k, m, m_1)]_{\sigma_2\sigma_1} \\ &\times [\mathbf{Z}_C(k, m_1)]_{\sigma_1\sigma_3} c_{w,j}^{in}(k, m_1, \sigma_3). \end{aligned} \quad (86)$$

Problem sprowadza się do znalezienia współczynników $c_{w,j}^{in}$. W tym celu wprowadźmy kobazę $\mathbf{w}_{km\sigma}^-$ ortogonalną do bazy cylindrycznej $\mathbf{v}_{km\sigma}^-$, analogicznie jak dla bazy sferycznej. Jawna postać funkcji $\mathbf{w}_{km\sigma}^-$ nie jest istotna, ważne jednak aby spełniony był warunek ortogonalności na powierzchni cylindra o promieniu b

$$\begin{aligned} \langle \delta_b \mathbf{w}_{km\sigma}^- | \mathbf{v}_{k'm'\sigma'}^- \rangle &= \int \mathbf{w}_{km\sigma}^- (\mathbf{r}) \delta(\rho - b) \cdot \mathbf{v}_{k'm'\sigma'}^- (\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ &= \delta(k - k') \delta_{m,m'} \delta_{\sigma,\sigma'}, \end{aligned} \quad (87)$$

gdzie

$$\delta_b = \delta(\rho - b). \quad (88)$$

Pozwala to zrzutować rozwinięcie $\mathbf{v}_{w,j}^{in}$ (73) na funkcje $\mathbf{w}_{km\sigma}^-$, co daje wyrażenie na $c_{w,j}^{in}$ w postaci

$$c_{w,j}^{in}(k, m, \sigma) = \langle \delta_b \mathbf{w}_{km\sigma}^- (j_{axis}) | \mathbf{v}_{w,j}^{in} \rangle. \quad (89)$$

Korzystając z równości $\mathbf{v}_{w,j}^{in}$ i \mathbf{v}_j^{out} (72) dostajemy

$$c_{w,j}^{in}(k, m, \sigma) = \langle \delta_b \mathbf{w}_{km\sigma}^- (j_{axis}) | \mathbf{v}_j^{out} \rangle. \quad (90)$$

Następnie skorzystajmy z interpretacji multipoli gęstości sił (59)

$$c_{w,j}^{in}(k, m, \sigma) = \frac{1}{\eta} \sum_{l'm'\sigma'} \langle \delta_b \mathbf{w}_{km\sigma}^- (j_{axis}) | \mathbf{v}_{l'm'\sigma'}^- (j) \rangle f_j(l'm'\sigma'). \quad (91)$$

Element macierzowy $\langle \delta_b \mathbf{w}_{km\sigma}^- (j_{axis}) | \mathbf{v}_{l'm'\sigma'}^- (j) \rangle$ możemy obliczyć poprzez wprowadzenie macierzy zmiany bazy \mathbf{T}_{CS}^- zdefiniowanej poprzez wyrażenie

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{lm0}^- \\ \mathbf{v}_{lm1}^- \\ \mathbf{v}_{lm2}^- \end{bmatrix}^T = \int dk \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{km0}^- \\ \mathbf{v}_{km1}^- \\ \mathbf{v}_{km2}^- \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{T}_{CS}^- (k, lm). \quad (92)$$

Podstawiając (92) do (91) dostajemy

$$\begin{aligned} c_{w,j}^{in}(k, m, \sigma) &= \frac{1}{\eta} \sum_{l'm'\sigma'} \sum_{\sigma_4} \int dk' \langle \delta_b \mathbf{w}_{km\sigma}^- (j_{axis}) | \mathbf{v}_{k'm'\sigma_4}^- (j) \rangle \\ &\times [\mathbf{T}_{CS}^- (k', l'm')]_{\sigma_4\sigma'} f_j(l'm'\sigma'). \end{aligned} \quad (93)$$

Następnie możemy zastosować definicję radialnej macierzy przesunięcia (66)

$$c_{w,j}^{in}(k, m, \sigma) = \frac{1}{\eta} \sum_{l'm'\sigma'} \sum_{\sigma_4} \sum_{m_5} \sum_{\sigma_5} \int dk' \langle \delta_b \mathbf{w}_{km\sigma}^- (j_{axis}) | \mathbf{v}_{k'm_5\sigma_5}^- (j_{axis}) \rangle \\ \times [\mathbf{S}_{CYL}^{--}(\boldsymbol{\rho}_j; k', m_5, m')]_{\sigma_5\sigma_4} [\mathbf{T}_{CS}^{--}(k', l'm')]_{\sigma_4\sigma'} f_j(l'm'\sigma'). \quad (94)$$

Relacja ortogonalności (87) dla bazy cylindrycznej upraszcza nam powyższe równanie do postaci

$$c_{w,j}^{in}(k, m, \sigma) = \frac{1}{\eta} \sum_{l'm'\sigma'} \sum_{\sigma_4} [\mathbf{S}_{CYL}^{--}(\boldsymbol{\rho}_j; k, m, m')]_{\sigma\sigma_4} \\ \times [\mathbf{T}_{CS}^{--}(k, l'm')]_{\sigma_4\sigma'} f_j(l'm'\sigma'). \quad (95)$$

Mając $c_{w,j}^{in}$ możemy podstawić powyższe wyrażenie do równania (86)

$$\langle \mathbf{w}_{lm\sigma}^+(i) \delta_{a_i} | \mathbf{v}_{w,j}^{out} \rangle = -\frac{1}{\eta} \sum_{l'm'\sigma'} \int dk \sum_{m_1} \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \sum_{\sigma_3} \sum_{\sigma_4} e^{ik(z_i - z_j)} \\ \times [\mathbf{T}_{SC}^{++}(lm, k)]_{\sigma\sigma_1} [\mathbf{S}_{CYL}^{++}(-\boldsymbol{\rho}_i; k, m, m_1)]_{\sigma_1\sigma_2} [\mathbf{Z}_C(k, m_1)]_{\sigma_2\sigma_3} \\ \times [\mathbf{S}_{CYL}^{--}(\boldsymbol{\rho}_j, k, m_1, m')]_{\sigma_3\sigma_4} [\mathbf{T}_{CS}^{--}(k, l'm')]_{\sigma_4\sigma'} f_j(l'm'\sigma'). \quad (96)$$

Porównując wyraz po wyrazie (96) z wyjściowym równaniem (77) dostajemy szukane wyrażenie na elementy macierzowe operatora T_{ij}^b

$$\begin{aligned}
T_{ij}^b(lm\sigma, l'm'\sigma') &= -\frac{1}{\eta} \int dk \sum_{m_1} \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \sum_{\sigma_3} \sum_{\sigma_4} e^{ik(z_i - z_j)} \\
&\times [\mathbf{T}_{SC}^{++}(lm, k)]_{\sigma\sigma_1} [\mathbf{S}_{CYL}^{++}(-\boldsymbol{\rho}_i; k, m, m_1)]_{\sigma_1\sigma_2} [\mathbf{Z}_C(k, m_1)]_{\sigma_2\sigma_3} \\
&\times [\mathbf{S}_{CYL}^{--}(\boldsymbol{\rho}_j; k, m_1, m')]_{\sigma_3\sigma_4} [\mathbf{T}_{CS}^{--}(k, l'm')]_{\sigma_4\sigma'} . \quad (97)
\end{aligned}$$

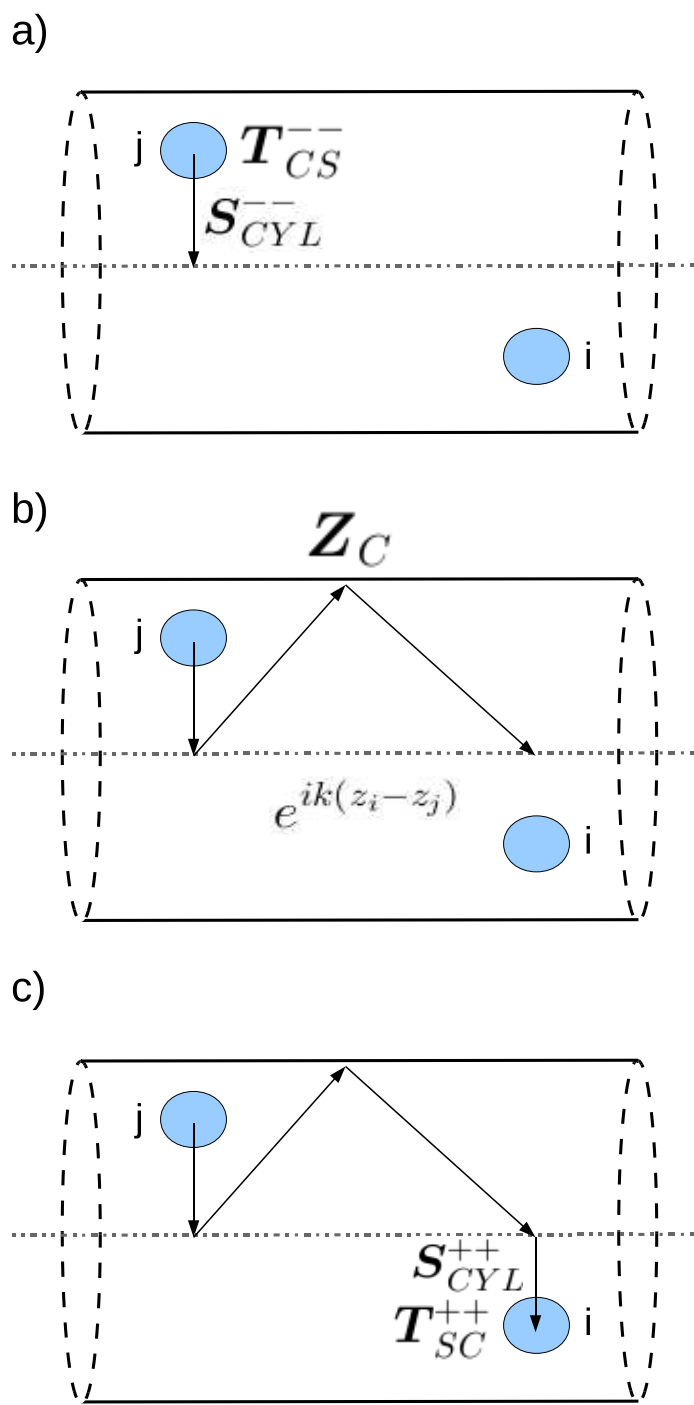
W notacji macierzowej przyjmuje ono zwartą postać

$$\mathbf{T}_{ij}^b(lm, l'm') = -\frac{1}{\eta} \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{lm, l'm'}(m_1, k; \boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\rho}_j) e^{ik(z_i - z_j)} dk, \quad (98)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{lm, l'm'}(m_1, k; \boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\rho}_j) &= \mathbf{T}_{SC}^{++}(lm, k) \cdot \mathbf{S}_{CYL}^{++}(-\boldsymbol{\rho}_i; k, m, m_1) \cdot \mathbf{Z}_C(k, m_1) \\
&\cdot \mathbf{S}_{CYL}^{--}(\boldsymbol{\rho}_j; k, m_1, m') \cdot \mathbf{T}_{CS}^{--}(k, l'm') . \quad (99)
\end{aligned}$$

Równania (98-99) mają prostą interpretację fizyczną. Cząstka j jest źródłem pola o pewnych współrzędnych w bazie sferycznej, które są przekształcane we współrzędne w bazie cylindrycznej poprzez macierz \mathbf{T}_{CS}^{-} . Następnie współrzędne te są przesuwane poprzez macierz \mathbf{S}_{CYL}^{-} do osi mikrokanalu (rysunek 2a), gdzie są w dogodnej formie matematycznej na wyrażenie pola odbitego od ścianek cylindra (wyznaczonego przez operator \mathbf{Z}_C , rysunek 2b). Pole odbite jest przesuwane przez $e^{ik(z_i - z_j)}$ i \mathbf{S}_{CYL}^{+} do centrum cząstki i a następnie transformowane z powrotem do bazy sferycznej za pomocą \mathbf{T}_{SC}^{+} (rysunek 2c).



Rysunek 2: Schematyczna interpretacja operatorów (a) T_{CS}^{--} , S_{CYL}^{--} , (b) Z_C , (c) S_{CYL}^{++} i T_{SC}^{++} .

4.4 Operator odbicia

Operator odbicia (84) można wyznaczyć podstawiając ogólne rozwinięcia pól $\mathbf{v}_{w,j}^{in}(\mathbf{r})$ i $\mathbf{v}_{w,j}^{out}(\mathbf{r})$ (75-76) do całkowitego pola prędkości (69) wynikającego z obecności cząstek, które w przypadku braku poślizgu na ściankach cylindra spełnia warunek $\mathbf{v}(\boldsymbol{\rho} + z\mathbf{e}_z) = \mathbf{0}|_{\rho=b}$. W wyniku otrzymujemy

$$\sum_j^N \int dk \sum_m [\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z] \cdot$$

$$\cdot [\mathbf{V}_{CYL}^-(j_{axis}; k, m) \cdot \mathbf{c}_{w,j}^{in}(k, m) + \mathbf{V}_{CYL}^+(j_{axis}; k, m) \cdot \mathbf{c}_{w,j}^{out}(k, m)]_{\rho=b} = 0. \quad (100)$$

Ekwiwalentnie możemy po prostu napisać

$$[\mathbf{V}_{CYL}^-(j_{axis}; k, m) \cdot \mathbf{c}_{w,j}^{in}(k, m) + \mathbf{V}_{CYL}^+(j_{axis}; k, m) \cdot \mathbf{c}_{w,j}^{out}(k, m)]_{\rho=b} = 0. \quad (101)$$

Następnie korzystamy z wcześniej wprowadzonej definicji operatora odbicia w notacji macierzowej (85). Daje to równanie

$$[(\mathbf{V}_{CYL}^-(j_{axis}; k, m) - \mathbf{V}_{CYL}^+(j_{axis}; k, m) \cdot \mathbf{Z}_C(k, m)) \cdot \mathbf{c}_{w,j}^{in}(k, m)]_{\rho=b} = 0. \quad (102)$$

Powyższa postać jest równoważna wyrażeniu

$$\mathbf{Z}_C(k, m) = [\mathbf{V}_{CYL}^+(j_{axis}; k, m)]_{\rho=b}^{-1} \cdot [\mathbf{V}_{CYL}^-(j_{axis}; k, m)]_{\rho=b}. \quad (103)$$

W przypadku odbicia od ścianek cylindra o promieniu $b = 1$ daje to jawne wyrażenie postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_C(k, m) &= [\mathbf{V}_{CYL}^+(j_{axis}; k, m)]_{\rho=1}^{-1} \cdot [\mathbf{V}_{CYL}^-(j_{axis}; k, m)]_{\rho=1} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\left(1 + A \left(B - 2(mA)^2\right)\right) \left[\frac{dI_m(|k|\rho)}{d\rho}\right]_{\rho=1}^2} \\ &\times \begin{bmatrix} \frac{(k^2+m^2+1)}{2} + m^2 A & im(A+1) & C+E \\ -im(A+1) & -C - D \cdot B & i2mA \\ C+E & -i2mA & 2 \end{bmatrix}, \quad (104) \end{aligned}$$

gdzie dla zwięzłości użyliśmy notacji

$$A = \frac{I_m(|k|)}{\left[\frac{dI_m(|k|\rho)}{d\rho}\right]_{\rho=1}},$$

$$B = 2 - (k^2 + m^2) \cdot A,$$

$$\begin{aligned}
C &= \left[\frac{dK_m(|k|\rho)}{d\rho} \right]_{\rho=1} \left[\frac{dI_m(|k|\rho)}{d\rho} \right]_{\rho=1} - 2m^2 K_m(|k|) I_m(|k|) \cdot A, \\
D &= \left[\frac{dK_m(|k|\rho)}{d\rho} \right]_{\rho=1} I_m(|k|), \\
E &= 1 + 2D - (k^2 + m^2) K_m(|k|) I_m(|k|).
\end{aligned}$$

Ostateczna forma macierzy \mathbf{Z}_C została otrzymana korzystając z wronskianu dla funkcji I_m and K_m (wyrażenie (191) a załączniku A). Warto zauważyć, że \mathbf{Z}_C nie zależy od ϕ ani z .

4.5 Macierze transformacji między bazami

W rozdziale 4.3 zdefiniowaliśmy macierze transformacji między bazami sferyczną i cylindryczną, poprzez następujące równania

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{km0}^+ \\ \mathbf{v}_{km1}^+ \\ \mathbf{v}_{km2}^+ \end{bmatrix}^T = \sum_l \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{lm0}^+ \\ \mathbf{v}_{lm1}^+ \\ \mathbf{v}_{lm2}^+ \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{T}_{SC}^{++}(lm, k), \quad (105)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{lm0}^- \\ \mathbf{v}_{lm1}^- \\ \mathbf{v}_{lm2}^- \end{bmatrix}^T = \int dk \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{km0}^- \\ \mathbf{v}_{km1}^- \\ \mathbf{v}_{km2}^- \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{T}_{CS}^{--}(k, lm). \quad (106)$$

W celu wyprowadzenia jawnych wyrażeń na macierze \mathbf{T}_{SC}^{++} i \mathbf{T}_{CS}^{--} uważmy, że funkcje \mathbf{v}_{lm0}^+ , \mathbf{v}_{lm2}^- , \mathbf{v}_{km0}^+ , \mathbf{v}_{km2}^- są proporcjonalne do gradientów rozwiązań równania Laplace'a $\Phi_{l,m}^\pm$ i $\Pi_{k,m}^\pm$, odpowiednio w sferycznych i cylindrycznych współrzędnych [55],[76]

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{lm0}^+(\mathbf{r}) &= \nabla\Phi_{l,m}^+(\mathbf{r}), & \mathbf{v}_{km0}^+(\mathbf{r}) &= \frac{1}{k}\nabla\Pi_{k,m}^+(\mathbf{r}), \\ \mathbf{v}_{lm2}^-(\mathbf{r}) &= \nabla\Phi_{l,m}^-(\mathbf{r}), & \mathbf{v}_{km2}^-(\mathbf{r}) &= \frac{1}{k}\nabla\Pi_{k,m}^-(\mathbf{r}),\end{aligned}\tag{107}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\Phi_{l,m}^+(\mathbf{r}) &= r^l Y_{l,m}(\theta, \phi), & \Pi_{k,m}^+(\mathbf{r}) &= I_m(|k|\rho) e^{im\phi} e^{ikz}, \\ \Phi_{l,m}^-(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{l,m}(\theta, \phi), & \Pi_{k,m}^-(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi^2} K_m(|k|\rho) e^{im\phi} e^{ikz}.\end{aligned}\tag{108}$$

Ponadto zachodzą następujące związki

$$\nabla \times \mathbf{v}_{lm0}^+ = \mathbf{0}, \quad \nabla \times \mathbf{v}_{km0}^+ = \mathbf{0}, \tag{109}$$

$$\nabla \times \mathbf{v}_{lm2}^- = \mathbf{0}, \quad \nabla \times \mathbf{v}_{km2}^- = \mathbf{0}, \tag{110}$$

$$\mathbf{v}_{lm0}^+ = i\nabla \times \mathbf{v}_{lm1}^+, \quad \mathbf{v}_{km0}^+ = \frac{i}{k}\nabla \times \mathbf{v}_{km1}^+, \quad (111)$$

$$\mathbf{v}_{lm1}^+ = i\nabla \times \mathbf{v}_{lm2}^+, \quad \mathbf{v}_{km1}^+ = \frac{i}{k}\nabla \times \mathbf{v}_{km2}^+, \quad (112)$$

$$\mathbf{v}_{lm1}^- = -i\nabla \times \mathbf{v}_{lm0}^-, \quad \mathbf{v}_{km1}^- = \frac{-i}{k}\nabla \times \mathbf{v}_{km0}^-, \quad (113)$$

$$\mathbf{v}_{lm2}^- = -i\nabla \times \mathbf{v}_{lm1}^-, \quad \mathbf{v}_{km2}^- = \frac{-i}{k}\nabla \times \mathbf{v}_{km1}^-. \quad (114)$$

Idea wyprowadzenia polega na tym, żeby dostać relacje transformacyjne między parami $(\Phi_{l,m}^+, \Pi_{k,m}^+)$, $(\Phi_{l,m}^-, \Pi_{k,m}^-)$ a następnie zastosować (107) i relacje rotacyjne (109-114) w celu otrzymania $\mathbf{T}_{SC}^{++}(lm, k)$ oraz $\mathbf{T}_{CS}^{--}(k, lm)$.

Z [77] wiemy, że zachodzi następująca tożsamość

$$K_m(k\rho) = \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})(2\rho)^m}{2k^m\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikz} dz}{(\rho^2 + z^2)^{m+\frac{1}{2}}}, \quad k > 0. \quad (115)$$

Powyższa równość może być interpretowana jako odwrotna transformata Fouriera funkcji $(\rho^2 + z^2)^{-(m+\frac{1}{2})}$. W związku z tym transformata prosta wynosi

$$\frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{m+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)} 2^m \rho^m \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikz} |k|^m K_m(|k|\rho) dk. \quad (116)$$

Korzystając z formuły dla funkcji gamma Eulera [78]

$$\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} (2m)!}{2^{2m} m!}, \quad (117)$$

upraszczamy (116) do

$$\frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{m+\frac{1}{2}}} = \frac{2^m m!}{\pi \rho^m (2m)!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikz} |k|^m K_m(|k|\rho) dk. \quad (118)$$

Z definicji stowarzyszonych wielomianów Legendre'a [71] dostajemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{m+1}} P_m^m(\cos \theta) &= \frac{1}{r^{m+1}} \frac{(2m)!}{2^m m!} \sin^m(\theta) = \frac{(2m)!}{2^m m!} \frac{\rho^m}{r^{2m+1}} \\ &= \frac{(2m)!}{2^m m!} \frac{\rho^m}{(\rho^2 + z^2)^{m+\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (119)$$

Łącząc (119) i równanie (118) otrzymujemy

$$\frac{1}{r^{m+1}} P_m^m(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikz} |k|^m K_m(|k|\rho) dk. \quad (120)$$

Różniczkując (119) $(l - m)$ razy względem z i używając wyprowadzonej tożsamości (213) dla stowarzyszonych wielomianów Legendre'a (złącznik B) dostajemy

$$\begin{aligned} & (-1)^{l-m} (l - m)! \frac{1}{r^{l+1}} P_l^m (\cos \theta) \\ &= \frac{i^{l-m}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikz} k^{l-m} |k|^m K_m (|k| \rho) dk. \end{aligned} \quad (121)$$

Ostateczny rezultat ma postać (po pomnożeniu przez $e^{im\phi}$)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2l + 1)} \frac{1}{r^{l+1}} \frac{(-1)^m}{n_{lm}} P_l^m (\cos \theta) e^{im\phi} \\ &= \frac{(-1)^m (-i)^{l-m}}{n_{lm} (2l + 1)} \frac{4\pi}{(l - m)!} \int_{-\infty}^{+\infty} k^l [\text{sgn} (k)]^m \frac{1}{4\pi^2} e^{ikz} K_m (|k| \rho) e^{im\phi} dk, \end{aligned} \quad (122)$$

lub w bardziej zwartej formie

$$\Phi_{l,m}^- (\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} k^l f^* (l, m|k) \Pi_{k,m}^- (\mathbf{r}) dk, \quad (123)$$

gdzie $*$ oznacza sprzężenie zespolone, sgn jest funkcją signum a $f (l, m|k)$

wynosi

$$\begin{aligned}
f(l, m|k) &= \frac{(-1)^m i^{l-m} n_{lm}}{(l+m)!} [\operatorname{sgn}(k)]^m \\
&= \frac{(-1)^m i^{l-m}}{n_{lm} (2l+1) (l-m)!} 4\pi [\operatorname{sgn}(k)]^m.
\end{aligned} \tag{124}$$

Korzystając z definicji stowarzyszonych wielomianów Legendre'a łatwo udowodnić, że postać (123) jest dokładnie taka sama dla ujemnych wartości m (194, załącznik A).

W elektrodynamice klasycznej udowadnia się, że dla dowolnych punktów \mathbf{r} and \mathbf{r}' zachodzą następujące rozwinięcia [74]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \Phi_{l,m}^{+*}(r_<, \theta', \phi') \Phi_{l,m}^-(r_>, \theta, \phi) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{k,m}^{+*}(\rho_<, \phi', z') \Pi_{k,m}^-(\rho_>, \phi, z) dk,
\end{aligned} \tag{125}$$

gdzie $r_< = \min(r, r')$, $r_> = \max(r, r')$, $\rho_< = \min(\rho, \rho')$, $\rho_> = \max(\rho, \rho')$.

Podstawiając (123) do powyższej równości widzimy, że musi zachodzić następujące rozwinięcie

$$\Pi_{k,m}^+(\mathbf{r}) = \sum_l k^l f(l, m|k) \Phi_{l,m}^+(\mathbf{r}). \tag{126}$$

Można to także udowodnić na drodze bezpośredniego wyprowadzenia (za-

łącznik C). Kończy to wyprowadzenia zależności transformacyjnych dla rozwiązań równania Laplace'a.

Teraz skorzystajmy z tego, że funkcje bazowe równań Stokesa \mathbf{v}_{km0}^+ i \mathbf{v}_{lm0}^+ są proporcjonalne do gradientów rozwiązań równania Laplace'a (107). Działając operatorem gradientu na obie strony równania (126) otrzymujemy

$$\mathbf{v}_{km0}^+ = \sum_l k^{l-1} f(l, m|k) \mathbf{v}_{lm0}^+. \quad (127)$$

Następnie podstawiamy do (127) odpowiednie relacje rotacyjne (111)

$$\nabla \times \mathbf{v}_{km1}^+ = \sum_l k^l f(l, m|k) \nabla \times \mathbf{v}_{lm1}^+. \quad (128)$$

Ekwiwalentnie, korzystając ze (109), zakładamy następujące rozwinięcie

$$\mathbf{v}_{km1}^+ = \sum_l f(l, m|k) [k^l \mathbf{v}_{lm1}^+ + k^{l-1} s(l, m) \mathbf{v}_{lm0}^+], \quad (129)$$

konsystentne z (128). W celu otrzymania $s(l, m)$ rzutujemy (129) na wektor \mathbf{e}_r i używamy jawnych wyrażeń na funkcje bazowe (36), (63). Dodatkowo rozpatrujemy punkt o wektorze wodzącym $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}$ czyli o zerowej współrzędnej z -towej. W rezultacie otrzymujemy

$$-im\Pi_{k,m}^+(\mathbf{r}) = \sum_l [s(l, m) l] k^l f(l, m|k) \Phi_{l,m}^+(\mathbf{r}). \quad (130)$$

Porównując powyższe równanie z transformacją (126) dostajemy

$$s(l, m) = -\frac{im}{l}. \quad (131)$$

Następnie powtarzamy całą procedurę, mianowicie podstawiamy relacje rotacyjne (111-112) do (129) i zakładamy ekwiwalentne rozwinięcie w postaci

$$\mathbf{v}_{km2}^+ = \sum_l f(l, m|k) \left[k^{l+1} \mathbf{v}_{lm2}^+ - \frac{im}{l} k^l \mathbf{v}_{lm1}^+ + q(l, m) k^{l-1} \mathbf{v}_{lm0}^+ \right]. \quad (132)$$

W celu otrzymania $q(l, m)$ rzutujemy (132) na wersor e_r , używamy jawnych postaci funkcji bazowych (37),(63), rozpatrujemy punkt o wektorze wodzącym $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}$ i na końcu korzystamy z reprezentacji zmodyfikowanych funkcji Bessela w postaci szeregu [79]. Porównując odpowiednie potęgi ρ po obu stronach równania dostajemy

$$q(l, m) = \frac{l(l^2 - l + 1) + m^2(l - 2)}{2l(2l - 1)}. \quad (133)$$

Wyprowadzenie dla $\mathbf{T}_{CS}^{\bar{-}}(k, lm)$ jest analogiczne.

Jawną postać macierzy \mathbf{T}_{SC}^{++} i \mathbf{T}_{CS}^{--} podsumowuje poniższe zestawienie

$$\mathbf{T}_{SC}^{++}(lm, k) = f(l, m|k)$$

$$\cdot \begin{bmatrix} k^{l-1} & 0 & 0 \\ 0 & k^l & 0 \\ 0 & 0 & k^{l+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & s(l, m) & q(l, m) \\ 0 & 1 & s(l, m) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (134)$$

$$\mathbf{T}_{CS}^{--}(k, lm) = f^*(l, m|k)$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s^*(l, m) & 1 & 0 \\ q(l, m) & s^*(l, m) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k^{l-1} & 0 & 0 \\ 0 & k^l & 0 \\ 0 & 0 & k^{l+1} \end{bmatrix}, \quad (135)$$

gdzie

$$f(l, m|k) = \frac{(-1)^m i^{l-m} n_{lm}}{(l+m)!} [\text{sgn}(k)]^m$$

$$= \frac{(-1)^m i^{l-m}}{n_{lm} (2l+1)} \frac{4\pi}{(l-m)!} [\text{sgn}(k)]^m, \quad (136)$$

$$s(l, m) = -\frac{im}{l}, \quad (137)$$

$$q(l, m) = \frac{l(l^2 - l + 1) + m^2(l - 2)}{2l(2l - 1)}. \quad (138)$$

4.6 Macierze przesunięcia

W rozdziale 4.2 zdefiniowaliśmy macierze przesunięcia dla bazy cylindrycznej, poprzez następujące równania

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{km0}^+(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_0) \\ \mathbf{v}_{km1}^+(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_0) \\ \mathbf{v}_{km2}^+(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_0) \end{bmatrix}^T = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{ks0}^+(\mathbf{r}) \\ \mathbf{v}_{ks1}^+(\mathbf{r}) \\ \mathbf{v}_{ks2}^+(\mathbf{r}) \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{S}_{CYL}^{++}(\boldsymbol{\rho}_0; k, s, m), \quad (139)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{km0}^-(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_0) \\ \mathbf{v}_{km1}^-(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_0) \\ \mathbf{v}_{km2}^-(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_0) \end{bmatrix}^T = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{ks0}^-(\mathbf{r}) \\ \mathbf{v}_{ks1}^-(\mathbf{r}) \\ \mathbf{v}_{ks2}^-(\mathbf{r}) \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{S}_{CYL}^{--}(\boldsymbol{\rho}_0; k, s, m). \quad (140)$$

W celu otrzymania jawnej postaci macierzy przesunięcia zauważmy, że zachodzą następujące związki [76]

$$\mathbf{v}_{km0}^+(\mathbf{r}) = \frac{1}{k} \nabla \Pi_{k,m}^+(\mathbf{r}) \quad (141)$$

$$\mathbf{v}_{km2}^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{k} \nabla \Pi_{k,m}^-(\mathbf{r}) \quad (142)$$

$$\mathbf{v}_{km1}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z \times \frac{1}{k} \nabla \Pi_{k,m}^+(\mathbf{r}), \quad (143)$$

$$\mathbf{v}_{km1}^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{k} \nabla \Pi_{k,m}^-(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}_z, \quad (144)$$

$$\mathbf{v}_{km2}^+(\mathbf{r}) = \frac{1}{2k} \left[\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \cdot \nabla \Pi_{k,m}^+(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\rho} \cdot \nabla \nabla \Pi_{k,m}^+(\mathbf{r}) \right], \quad (145)$$

$$\mathbf{v}_{km0}^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{2k} \left[\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \cdot \nabla \Pi_{k,m}^-(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\rho} \cdot \nabla \nabla \Pi_{k,m}^-(\mathbf{r}) \right]. \quad (146)$$

Związek między dwoma różnie zcentrowanymi funkcjami $\Pi_{k,m}^\pm$ znany jest jako twierdzenie o dodawaniu (*addition theorem*) dla zmodyfikowanych funkcji Bessela [79]

$$\Pi_{k,m}^\pm(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_j) = \sum_s D^\pm(\boldsymbol{\rho}_j; k, s, m) \Pi_{k,s}^\pm(\mathbf{r}), \quad (147)$$

gdzie

$$D^-(\boldsymbol{\rho}_j; k, s, m) = e^{i(m-s)\phi_j} I_{s-m}(|k| \rho_j), \quad (148)$$

$$D^+(-\boldsymbol{\rho}_j; k, s, m) = [D^-(\boldsymbol{\rho}_j; k, m, s)]^*. \quad (149)$$

Wykorzystując oczywistą równość

$$\nabla_{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}_j}, \quad (150)$$

gdzie $\nabla_{\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}_j}$ oznacza operator gradientu wyrażony w układzie współrzędnych przesuniętym o $\boldsymbol{\rho}_j$, oraz równania (141-144) i (147) stwierdzamy, że muszą zachodzić następujące związki

$$\mathbf{v}_{km0}^+(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_j) = \sum_s D^+(\boldsymbol{\rho}_j; k, s, m) \mathbf{v}_{ks0}^+(\mathbf{r}), \quad (151)$$

$$\mathbf{v}_{km1}^+(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_j) = \sum_s D^+(\boldsymbol{\rho}_j; k, s, m) \mathbf{v}_{ks1}^+(\mathbf{r}), \quad (152)$$

$$\mathbf{v}_{km1}^-(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_j) = \sum_s D^-(\boldsymbol{\rho}_j; k, s, m) \mathbf{v}_{ks1}^-(\mathbf{r}), \quad (153)$$

$$\mathbf{v}_{km2}^-(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_j) = \sum_s D^-(\boldsymbol{\rho}_j; k, s, m) \mathbf{v}_{ks2}^-(\mathbf{r}). \quad (154)$$

Współczynniki macierzy przesunięcia dla \mathbf{v}_{km2}^+ (\mathbf{v}_{km0}^-) można także otrzymać w prosty sposób rozważając oddzielnie człon

$$\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \cdot \nabla \Pi_{k,m}^\pm(\mathbf{r}), \quad (155)$$

oraz człon (patrz równania (145-146))

$$\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla \nabla \Pi_{k,m}^\pm(\mathbf{r}). \quad (156)$$

Różnie zcentrowane funkcje $\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \cdot \nabla \Pi_{k,m}^\pm(\mathbf{r})$ łączą oczywiście współczynniki $D^\pm(\boldsymbol{\rho}_j; k, s, m)$

$$\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \cdot \nabla \Pi_{k,m}^\pm(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_j) = \sum_s D^\pm(\boldsymbol{\rho}_j; k, s, m) \left[\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \cdot \nabla \Pi_{k,s}^\pm(\mathbf{r}) \right]. \quad (157)$$

Natomiast, żeby wyprowadzić współczynnik przesunięcia dla funkcji $\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla \nabla \Pi_{k,m}^{\pm}(\mathbf{r})$ musimy najpierw zwrócić uwagę na następujące identyczności

$$\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_{\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}_j} = -\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\rho}_j-\mathbf{r}} = -\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\rho}_j}. \quad (158)$$

Pozwala to zapisać równości

$$\begin{aligned} & -\boldsymbol{\rho}_j \cdot \nabla_{\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}_j} \left[\nabla \Pi_{k,m}^{\pm}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_j) \right] \\ &= \sum_s \left[\boldsymbol{\rho}_j \cdot \nabla_{\boldsymbol{\rho}_j} D^{\pm}(\boldsymbol{\rho}_j; k, s, m) \right] \left[\nabla \Pi_{k,s}^{\pm}(\mathbf{r}) \right], \end{aligned} \quad (159)$$

oraz

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_{\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}_j} \left[\nabla \Pi_{k,m}^{\pm}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_j) \right] \\ &= \sum_s \left[D^{\pm}(\boldsymbol{\rho}_j; k, s, m) \right] \left[\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \nabla \Pi_{k,s}^{\pm}(\mathbf{r}) \right]. \end{aligned} \quad (160)$$

Dodając do siebie (157), (159) i (160) oraz korzystając z (141-151) i (145-146) dostajemy szukane zależności

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{km2}^+ (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_j) = & \sum_s [D^+ (\boldsymbol{\rho}_j; k, s, m) \mathbf{v}_{ks2}^+ (\mathbf{r}) \\ & + \frac{1}{2} \boldsymbol{\rho}_j \cdot \nabla_{\boldsymbol{\rho}_j} D^+ (\boldsymbol{\rho}_j; k, s, m) \mathbf{v}_{ks0}^+ (\mathbf{r})], \end{aligned} \quad (161)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{km0}^- (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_j) = & \sum_s [D^- (\boldsymbol{\rho}_j; k, s, m) \mathbf{v}_{ks0}^- (\mathbf{r}) \\ & + \frac{1}{2} \boldsymbol{\rho}_j \cdot \nabla_{\boldsymbol{\rho}_j} D^- (\boldsymbol{\rho}_j; k, s, m) \mathbf{v}_{ks2}^- (\mathbf{r})]. \end{aligned} \quad (162)$$

Jawną postać macierzy \mathbf{S}_{CYL}^{++} i \mathbf{S}_{CYL}^{--} podsumowuje poniższe zestawienie

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{CYL}^{++} (-\boldsymbol{\rho}_i; k, m, s) = & e^{-i(m-s)\phi_i} \\ \times & \begin{bmatrix} I_{s-m} (|k| \rho_i) & 0 & \frac{1}{2} \rho_i I'_{s-m} (|k| \rho_i) \\ 0 & I_{s-m} (|k| \rho_i) & 0 \\ 0 & 0 & I_{s-m} (|k| \rho_i) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (163)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{CYL}^{--} (\boldsymbol{\rho}_j; k, s, m) = & e^{i(m-s)\phi_j} \\ \times & \begin{bmatrix} I_{s-m} (|k| \rho_j) & 0 & 0 \\ 0 & I_{s-m} (|k| \rho_j) & 0 \\ \frac{1}{2} \rho_j I'_{s-m} (|k| \rho_j) & 0 & I_{s-m} (|k| \rho_j) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (165)$$

Korzystając z własności zmodyfikowanych funkcji Bessela łatwo sprawdzić, że dla zerowego przesunięcia macierze \mathbf{S}_{CYL}^{++} i \mathbf{S}_{CYL}^{--} przyjmą formę macierzy identycznościowych

$$\mathbf{S}_{CYL}^{++}(\mathbf{0}; k, m, s) = \delta_{m,s} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (166)$$

$$\mathbf{S}_{CYL}^{--}(\mathbf{0}; k, s, m) = \delta_{s,m} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (167)$$

4.7 Symetrie

Z jawnych postaci macierzy \mathbf{T}_{CS}^{--} , \mathbf{S}_{CYL}^{--} , \mathbf{Z}_C , \mathbf{S}_{CYL}^{++} and \mathbf{T}_{SC}^{++} widzimy, że zachodzą następujące relacje symetrii

$$\mathbf{Z}_C(k, m) = [\mathbf{Z}_C(k, m)]^\dagger, \quad (168)$$

$$\mathbf{T}_{SC}^{++}(lm, k) = [\mathbf{T}_{CS}^{--}(k, lm)]^\dagger, \quad (169)$$

$$\mathbf{S}_{CYL}^{++}(-\boldsymbol{\rho}_i; k, m, s) = [\mathbf{S}_{CYL}^{--}(\boldsymbol{\rho}_j; k, s, m)]^\dagger, \quad (170)$$

gdzie \dagger oznacza sprzężenie hermitowskie. Po zastosowaniu powyższych związków do (98) i (99) dostajemy

$$\mathbf{T}_{ij}^b(lm, l'm') = [\mathbf{T}_{ji}^b(l'm', lm)]^\dagger. \quad (171)$$

Wiemy również, że [44]

$$\mathbf{T}_{ij}^0(lm, l'm') = [\mathbf{T}_{ji}^0(l'm', lm)]^\dagger, \quad (172)$$

$$\mathbf{Z}_i^{-1}(lm, l'm') = [\mathbf{Z}_i^{-1}(l'm', lm)]^\dagger, \quad (173)$$

w związku z czym cała macierz $\mathbf{M}_{ij}(lm, l'm')$ zdefiniowana w (51) jest hermitowska.

5 Wyniki numeryczne

W tym rozdziale wprowadzamy macierze tarcia i mobilności a następnie prezentujemy przykładowe zastosowania wyprowadzonego wcześniej formalizmu. Porównanie ze znanymi w literaturze wynikami waliduje naszą metodę. W szczególności otrzymujemy świetną zgodność z analitycznie znanym wyrażeniem na jednocząstkowy współczynnik tarcia. Dodatkowo obserwujemy efekt ujemnego sprzężenia hydrodynamicznego, które jest konsyistentne z niedawno zaobserwowanym efektem dla cząstek punktowych. Prezentujemy także nowy rezultat obliczenia prędkości sztywnych łańcuchów polimerycznych w przepływie parabolicznym i porównujemy je do wyników dla przestrzeni nieograniczonej. Takie łańcuchy mogą być stosowane jako modele polimerów i biopolimerów [80].

5.1 Macierze tarcia i mobilności

Równanie (43) możemy zapisać w bardziej zwartej formie jako

$$c = M \cdot f, \quad (174)$$

lub

$$\mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{c}, \quad (175)$$

gdzie \mathbf{Z} jest wielociałową macierzą tarcia. W praktyce jesteśmy zainteresowani tylko kilkoma multipolami siły wyznaczającymi całkowitą siłę \mathbf{F}_i i całkowity moment siły \mathbf{T}_i działające na i -tą cząstkę. Dla układu N cząstek odpowiada to relacji [44]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{T} \end{pmatrix} = \zeta \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{\Omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{F}_\infty \\ \mathbf{T}_\infty \end{pmatrix}, \quad (176)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_\infty \\ \mathbf{T}_\infty \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{c}_\infty, \quad (177)$$

gdzie $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N)$, $\mathbf{T} = (\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_N)$, $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_N)$,
 $\mathbf{\Omega} = (\mathbf{\Omega}_1, \dots, \mathbf{\Omega}_N)$, $\mathbf{F}_\infty = (\mathbf{F}_{\infty 1}, \dots, \mathbf{F}_{\infty N})$, $\mathbf{T}_\infty = (\mathbf{T}_{\infty 1}, \dots, \mathbf{T}_{\infty N})$,
 $\mathbf{c}_\infty = (\mathbf{c}_{1,\infty}, \dots, \mathbf{c}_{N,\infty})$, a ζ jest N -cząstkową macierzą tarcia

$$\zeta = \begin{pmatrix} \zeta^{tt} & \zeta^{tr} \\ \zeta^{rt} & \zeta^{rr} \end{pmatrix}, \quad (178)$$

z indeksami t, r oznaczającymi, odpowiednio translacje i rotacje. Można pokazać, że ζ jest projekcją \mathbf{Z} na podprzestrzeń odpowiadającą $l = 1, \sigma = 0, 1$. Podobnie $\mathbf{F}_i, \mathbf{T}_i, \boldsymbol{\omega}_i$ dane są przez multipole $\mathbf{f}_i(lm\sigma)$, $\mathbf{c}_i(lm\sigma)$ z

$l = 1, \sigma = 0, 1$. Jawne wyrażenia zawarte są w [38]. \mathbf{V}_∞ i $\boldsymbol{\omega}_\infty$ mogą także być wyrażone przez $c_{i,\infty}(lm\sigma)$ (48) przy pomocy procedury opisanej w [44]. Tutaj warto jedynie zwrócić uwagę, że dla przepływu Poiseuille'a zgodnego z naszą geometrią (rys. 1) mamy

$$\mathbf{v}_\infty(\mathbf{r}) = U_m (1 - \rho^2) \mathbf{e}_z = \sum_{lm\sigma} c_{i,\infty}(lm\sigma) \mathbf{v}_{lm\sigma}^+(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i). \quad (179)$$

W szczególnym przypadku cząstek zlokalizowanych na osi cylindra, jedy-
nymi nieznikającymi współczynnikami są

$$c_{i,\infty}(100) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}, \quad c_{i,\infty}(300) = \sqrt{\frac{16\pi}{1575}}, \quad c_{i,\infty}(102) = -\sqrt{\frac{64\pi}{3}}, \quad (180)$$

Korzystamy z tych współczynników w rozdziale 5.6.

W wielu zastosowaniach interesują nas prędkości cząstek pod działaniem znanych sił i znanego przepływu zewnętrznego (problem mobilnościowy). Z równania (176) dostajemy

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\mu} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{F} - \mathbf{F}_\infty \\ \mathbf{T} - \mathbf{T}_\infty \end{pmatrix}, \quad (181)$$

gdzie macierz mobilności $\boldsymbol{\mu}$ jest odwrotnością macierzy tarcia [38]

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\zeta}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}^{tt} & \boldsymbol{\mu}^{tr} \\ \boldsymbol{\mu}^{rt} & \boldsymbol{\mu}^{rr} \end{pmatrix}. \quad (182)$$

5.2 Błędy numeryczne

W praktyce nie możemy rozwiązać nieskończonego układu równań algebraicznych (43) dlatego ograniczamy l do pewnego skończonego L_{\max} . Jest to parametr kontrolujący dokładność naszej metody. W następnym rozdziale pokażemy wpływ L_{\max} na wyniki. W ogólności musimy zwiększać L_{\max} w miarę jak powierzchnia cząstki zbliża się do powierzchni mikrokanalu. Aby zapobiec stosowania bardzo dużych L_{\max} (i jednocześnie drastycznego zwiększania rozmiaru macierzy M w równaniu 43) można wyprowadzić poprawkę lubrykacyjną, podobnie jak w przypadku cząstki poruszającej się w płynie między dwoma ścianami [81]. W rozprawie ograniczymy się jednak do metody bez tej poprawki.

Inne błędy numeryczne pochodzą od procedury całkującej i skończonego sumowania w równaniu na elementy macierzowe operatora \mathbf{T}^b

$$\mathbf{T}_{ij}^b(lm, l'm') = -\frac{1}{\eta} \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{lm, l'm'}(m_1, k; \boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\rho}_j) e^{ik(z_i - z_j)} dk, \quad (183)$$

gdzie

$$\mathbf{g}_{lm,l'm'}(m_1, k; \boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\rho}_j) = \mathbf{T}_{SC}^{++}(lm, k) \cdot \mathbf{S}_{CYL}^{++}(-\boldsymbol{\rho}_i; k, m, m_1) \cdot \mathbf{Z}_C(k, m_1) \\ \cdot \mathbf{S}_{CYL}^{--}(\boldsymbol{\rho}_j; k, m_1, m') \cdot \mathbf{T}_{CS}^{--}(k, l'm'). \quad (184)$$

Stosując macierze przesunięć \mathbf{S}_{CYL}^{++} i \mathbf{S}_{CYL}^{--} dla zerowego przesunięcia (166-167) można pokazać, że dla szczególnego przypadku cząstek położonych na osi mikrokanalu, (183) sprowadza się do pojedynczej całki

$$\mathbf{T}_{ij}^b(lm, l'm') = -\frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{lm,l'm'}(k) e^{ik(z_i - z_j)} dk,$$

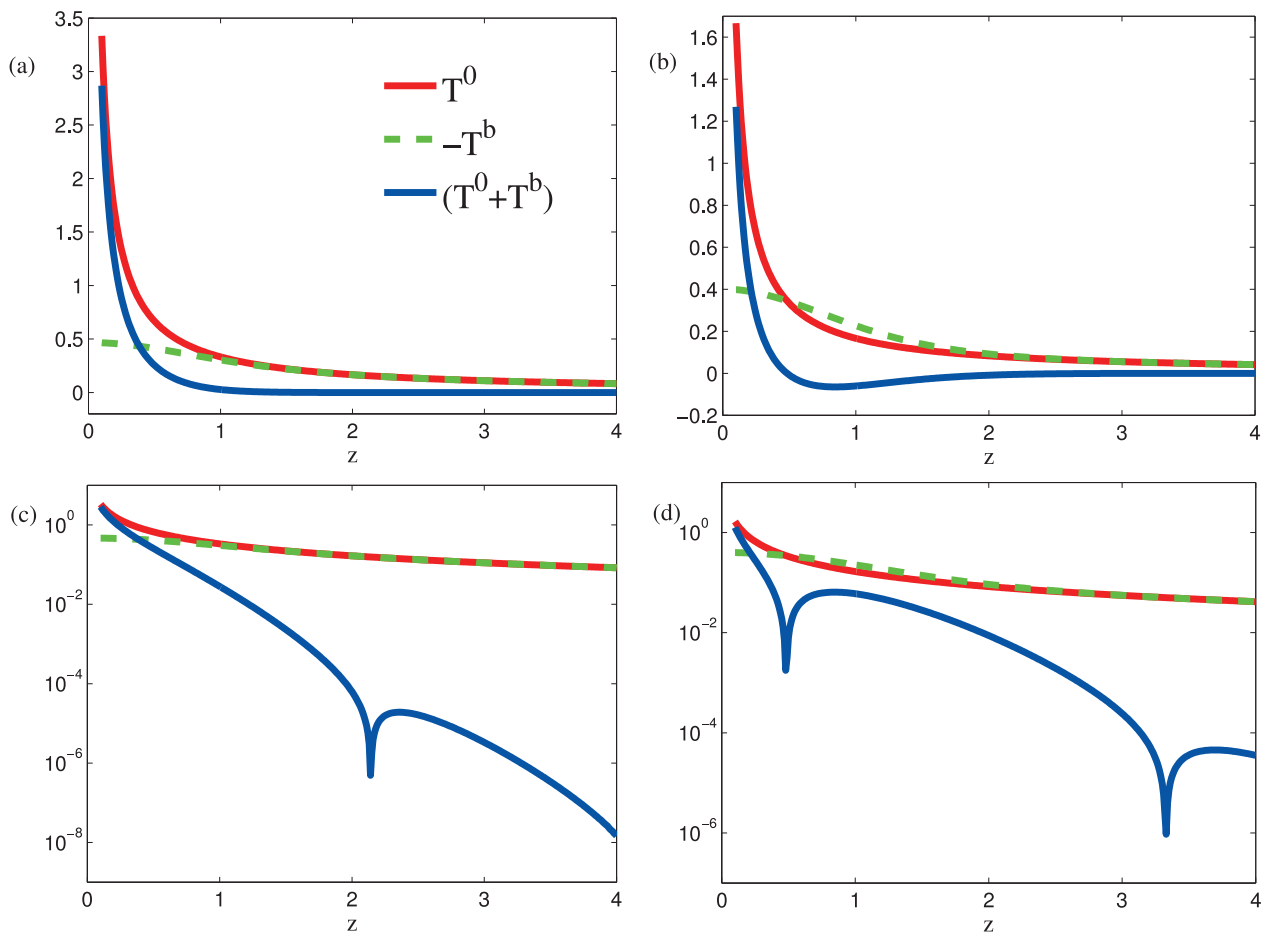
$$\mathbf{g}_{lm,l'm'}(k) = \delta_{mm'} \mathbf{T}_{SC}^{++}(lm, k) \cdot \mathbf{Z}_C(k, m) \cdot \mathbf{T}_{CS}^{--}(k, l'm'). \quad (185)$$

Do całkowania powyższego równania zaimplementowaliśmy adaptacyjny wariant procedury podwójnie-eksponencjalnej (ang. *adaptive double exponential formula*) [82].

Dla cząstek położonych poza osią musimy ograniczyć sumowanie po m_1 w (183) do zakresu $-m_{max}, \dots, +m_{max}$. Sprawdziliśmy numerycznie, że w miarę zmniejszania przerwy między powierzchnią cząstki a ścianą cylindra, musimy zwiększać m_{max} aby osiągnąć zbieżność.

5.3 Ekranowanie oddziaływań hydrodynamicznych

Rysunek 3 przedstawia elementy macierzowe (51) dla $i \neq j$ i wkłady do nich pochodzące od T_0 i $-T_b$ jako funkcje z . Fizycznie elementy te odpowiadają aksjalnemu (rys. 3a) i radialnemu (rys. 3b) komponentowi pola prędkości na osi cylindra, którego źródłem jest siła punktowa (Stokeslet) skierowana odpowiednio aksjalnie i radialnie [38]. Widzimy, że indywidualne wkłady dla pośrednich wartości z opadają różnie, lecz dla dużych z zarówno T_0 jak i $-T_b$ praktycznie zachodzą na siebie do tego stopnia, że $T_0 + T_b$ dąży eksponencjalnie do zera. Jest to dowód na silne ekranowanie oddziaływań hydrodynamicznych w cylindrycznym mikrokanale. Ponadto zanik ma charakter oscylacyjny co można zauważyć na wykresach w skali logarytmicznej (rys. 3c i 3d). Powyższe obserwacje są zgodne z wcześniej opublikowanymi danymi dla cząstek punktowych w geometrii quasi-jednowymiarowej [83].



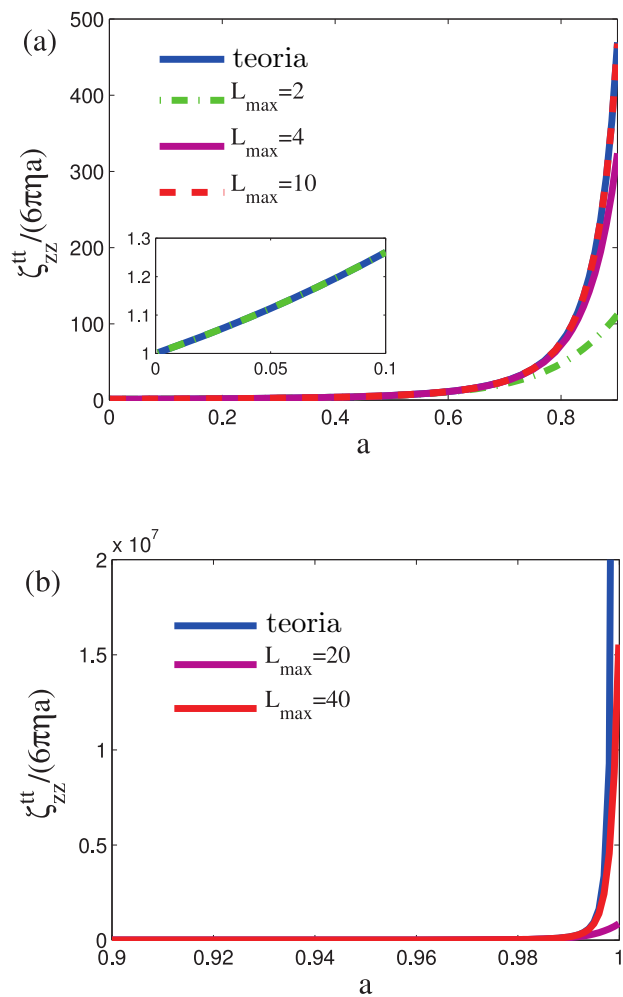
Rysunek 3: T^0 (czerwony), $-T^b$ (zielony) i $T = T^0 + T^b$ (niebieski) dla $l = l' = 1, m = m' = 0, \sigma = \sigma' = 0$ (a) i $l = l' = 1, m = m' = 1, \sigma = \sigma' = 0$ (b) jako funkcje z . Logarytmiczne wykresy ich wartości bezwzględnej przedstawiono odpowiednio na rysunkach (c) i (d).

5.4 Aksjalny współczynnik tarcia

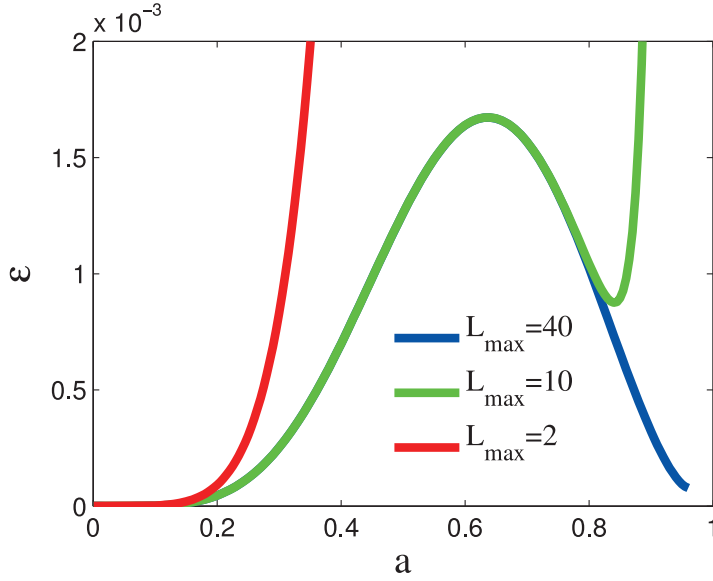
Rozważmy jedną cząstkę na osi cylindra. Aksjalny współczynnik tarcia ζ_{zz}^{tt} jest zdefiniowany przez zależność (176)

$$F_z = -\zeta_{zz}^{tt} v_z, \quad (186)$$

gdzie F_z i v_z są osiowymi komponentami odpowiednio, siły działającej na cząstkę i jej prędkości. Na rysunku 4 widzimy ζ_{zz}^{tt} jako funkcję promienia cząstki a dla różnych L_{\max} . Wynik analityczny dla ζ_{zz}^{tt} [21] jest także przedstawiony. Jakościowo widzimy, że gdy zwiększamy L_{\max} , nasz obliczony współczynnik tarcia zgadza się z teoretycznie obliczonym dla coraz to większego zakresu promienia a . Jest to wynikiem dużych efektów lubrykacyjnych w wąskiej szczelinie między powierzchnią cząstki a ścianką mikrokanалу [65, 81].



Rysunek 4: Znormalizowany współczynnik tarcia aksjalnego jako funkcja promienia cząstki dla różnych wartości L_{\max} .



Rysunek 5: Błąd względny współczynnika tarcia aksjalnego jako funkcja promienia cząstki.

Z ilościowego punktu widzenia definiujemy błąd względny ε jako

$$\varepsilon = \frac{\zeta_{zz}^{tt} - \overline{\zeta_{zz}^{tt}}}{\overline{\zeta_{zz}^{tt}}}, \quad (187)$$

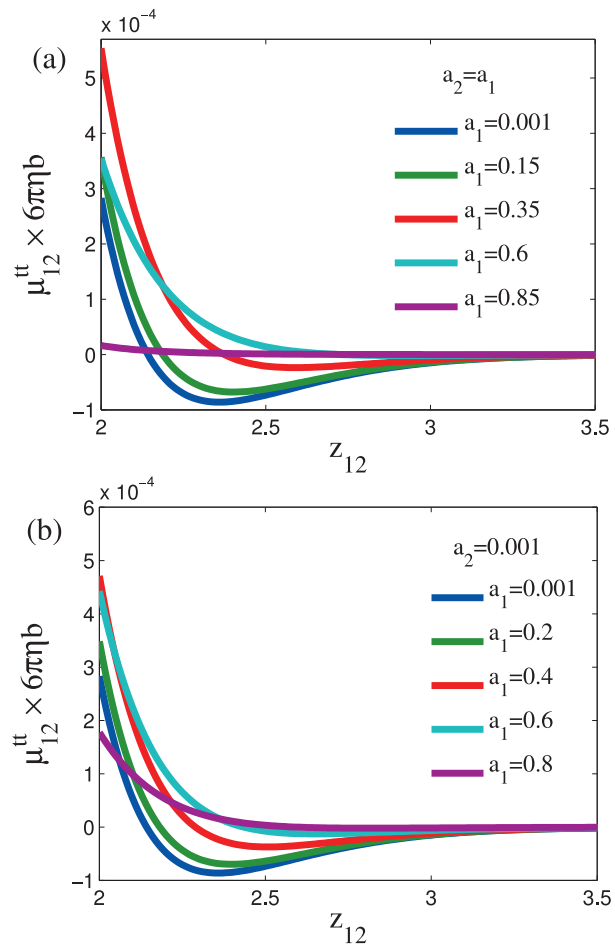
gdzie $\overline{\zeta_{zz}^{tt}}$ jest wynikiem analitycznym wziętym z [21]. Na rysunku 5 przedstawiono ε jako funkcję promienia cząstki a dla różnych L_{\max} . Widzimy, że błąd wykazuje maksimum rzędu 10^{-3} dla pośrednich wartości a i dostatecznie dużego L_{\max} . Wyrażenie na $\overline{\zeta_{zz}^{tt}}$ otrzymano łącząc rozwinięcia perturbacyjne z rozwinięciami asymptotycznymi dlatego powinno być najdokładniejsze w granicach $a \rightarrow 0$ i $a \rightarrow 1$. Autorzy [21] stwierdzają, że dla pośrednich wartości a błąd względny dla $\overline{\zeta_{zz}^{tt}}$ jest mniejszy niż jeden

procent. Przedstawiona w rozprawie metoda ma tą przewagę, że można w niej kontrolować dokładność poprzez parametr L_{\max} , a co za tym idzie maksimum na rysunku 5 powinno być oczekiwane.

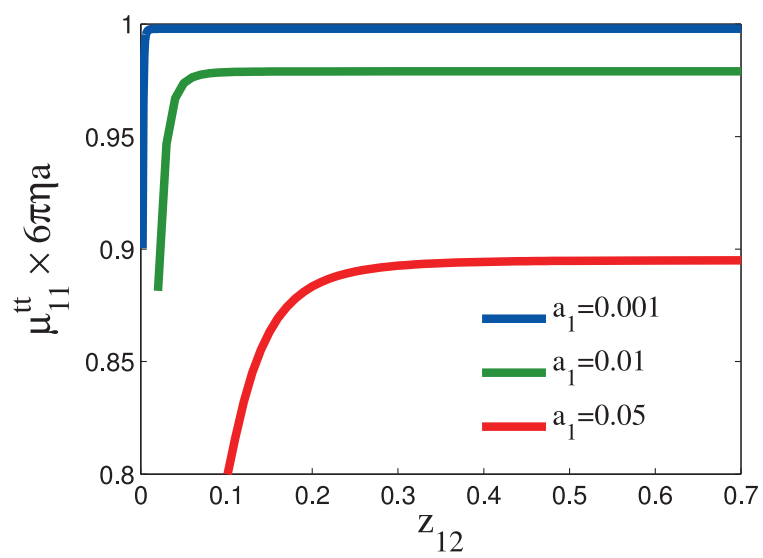
5.5 Problem mobilnościowy dla dwóch cząstek

Rozważmy dwie cząstki na osi cylindra. Autorzy [83] zaobserwowali ciekawy efekt dla cząstek punktowych ustawionych w odległości z_{12} większej niż 2. Cząstki te wzajemnie hamują swój ruch a nie wzmacniają. W naszym przypadku przekłada się to na ujemną wartość współczynnika mobilności wzajemnej μ_{12}^{tt} (182). Za pomocą metody przedstawionej w rozdziale 4 możemy obliczyć μ_{12}^{tt} dla cząstek o skończonych rozmiarach. Na rysunku 6 przedstawiono wyniki obliczeń dla $a_1 = a_2$ i $a_1 \neq a_2$. Widzimy, że wspomniany efekt jest zauważalny także dla cząstek skończonych, ale maleje wraz ze zwiększaniem promienia cząstki. Ponadto, porównując na przykład $a_1 = a_2 = 0.6$ i $a_1 = 0.001, a_2 = 0.6$ widzimy, że ujemne sprzężenie jest silniejsze gdy jedna z cząstek jest mała.

Dla tego samego układu dwóch cząstek obliczyliśmy także współczynnik mobilności własnej μ_{11}^{tt} . W szczególności interesuje nas czy w przypadku małych cząstek (gdy wpływ otaczającego mikrokanalu jest zanedbywalny) i dostatecznie dużej odległości z_{12} (gdy wpływ drugiej cząstki jest zanedbywalny) wielkość $1/\mu_{11}^{tt}$ osiąga wartość daną wyrażeniem Stokesa $6\pi\eta a$. Rysunek 7 potwierdza, że tak jest w rzeczywistości. Dla większych cząstek μ_{11}^{tt} także osiąga stałą wartość odpowiadającą mobilności cząstki izolowanej w cylindrycznym mikrokanale.



Rysunek 6: Znormalizowany współczynnik mobilności wzajemnej jako funkcja odległości międzycząstkowej.



Rysunek 7: Znormalizowany współczynnik mobilności własnej jako funkcja odległości międzycząstkowej dla $a_1 = a_2 = a$.

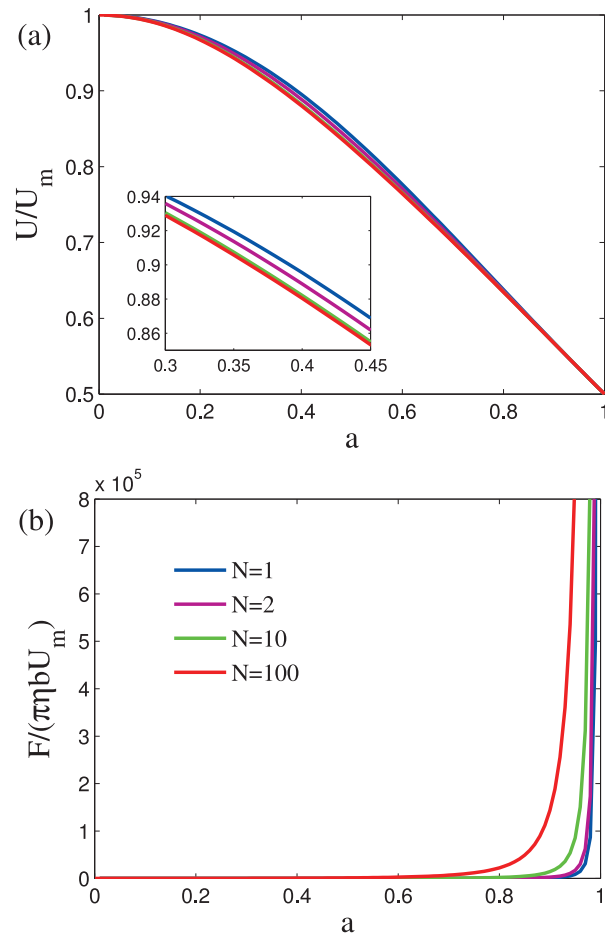
5.6 Cząstki w przepływie parabolicznym

Rozważmy łańcuchy N stykających się sfer o tym samym promieniu a , w przepływie parabolicznym

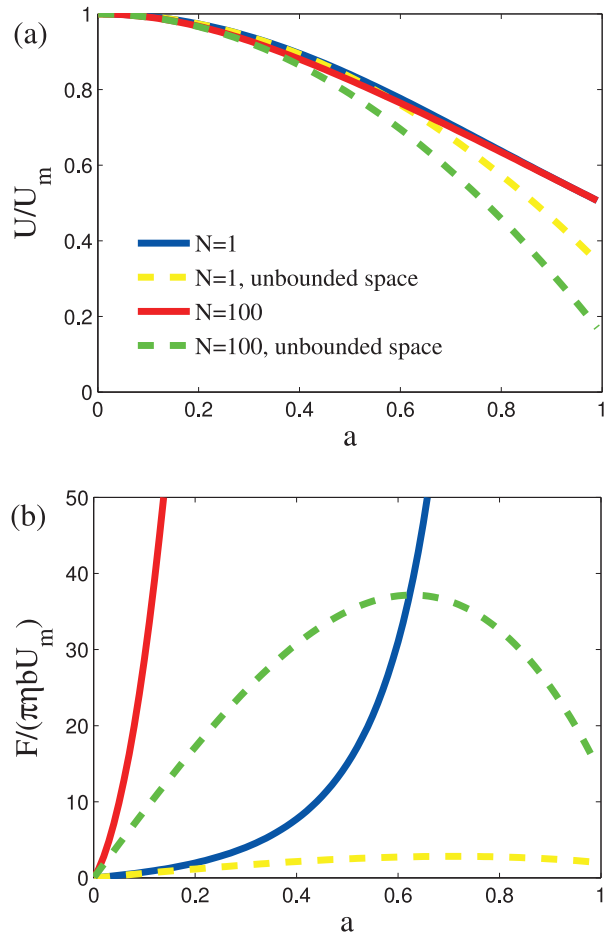
$$\mathbf{v}_\infty(\mathbf{r}) = U_m (1 - \rho^2) \mathbf{e}_z. \quad (188)$$

Rysunek 8 przedstawia prędkość łańcucha U i siłę F działającą na łańcuch w wyniku zewnętrznego przepływu. Widzimy, że U nie zależy w sposób znaczący od długości łańcucha N . Ponadto dla $a \rightarrow 1$ prędkość dąży do $0.5U_m$ niezależnie od N . Jest to zgodne z tym, że zarówno siła (rysunek 8b) jak i współczynnik tarcia (rysunek 4) dążą do nieskończoności dla $a \rightarrow 1$.

Rysunek 9 przedstawia te same wielkości (U i F) dla przepływu nieograniczonego, gdzie widzimy znacznie większą zmienność w funkcji liczby cząstek N . W szczególności prędkość nie dąży do stałej wartości dla $a \rightarrow 1$. Różnice te są wynikiem długozasięgowego charakteru oddziaływań hydrodynamicznych w przestrzeni nieograniczonej w porównaniu do eksponencjalnie zanikających oddziaływań hydrodynamicznych w mikrokanale.



Rysunek 8: Znormalizowana prędkość (a) i znormalizowana siła (b) działająca na łańcuch złożony z N cząstek w wyniku zewnętrznego przepływu parabolicznego w mikrokanale.



Rysunek 9: Porównanie znormalizowanej prędkości (a) i znormalizowanej siły (b) działającej na łańcuchy złożony z N cząstek w mikrokanale (linie ciągłe) i w przestrzeni nieograniczonej (linie przerywane), w wyniku zewnętrznego przepływu parabolicznego.

6 Podsumowanie

Praca dotyczyła metody obliczania oddziaływań hydrodynamicznych między cząstkami koloidalnymi w cylindrycznym mikrokanale. Podejście zaproponowane w rozprawie opiera się na rozwinięciach pola prędkości w sferyczne i cylindryczne rozwiązania równań Stokesa. Oddziaływanie płynu z cząstkami opisuje baza sferyczna, natomiast pole odbite od ścianek cylindra wyrażone jest poprzez bazę cylindryczną. Rdzeniem metody są relacje transformujące obie bazy.

Metoda pozwala z łatwością zmieniać zarówno promień jak i rodzaj cząstek (twarde sfery, porowate sfery, krople itd.). Ponadto zmiana warunków brzegowych na powierzchni cylindra spowoduje zmianę jawnej postaci jedynie operatora odbicia, pozostawiając resztę operatorów niezmienną. Tych cech nie posiada żaden istniejący algorytm. Zaproponowana metoda może pomóc w zrozumieniu fizycznych i fizykochemicznych procesów zachodzących w układach biologicznych i geofizycznych oraz w systemach mikrofluidycznych.

Szczegółowe rezultaty pracy to:

- faktoryzacja macierzy T_b dla przypadku ograniczającego cylindrycznego mikrokanалу
- wyprowadzenie jawnej postaci macierzy dokonujących transformacji między bazą sferyczną i cylindryczną
- dowód twierdzenia o przesuwaniu dla bazy cylindrycznej
- wyznaczenie postaci operatora odbicia dla warunku braku poślizgu na ścianie ograniczającego mikrokanалу
- implementacja numeryczna zaproponowanej metody dla przypadku cząstek położonych na osi cylindra
- walidacja metody poprzez numeryczne obliczenie współczynnika tarcia aksjalnego
- zaobserwowanie negatywnego sprzężenia dla dostatecznie dużych odległości między dwoma cząstkami, wyrażającego się poprzez negatywne współczynniki mobilności wzajemnej
- obliczenie prędkości i siły działającej na łańcuchy polimerowe poddane przepływowi parabolicznemu i porównanie z przypadkiem nieograniczonej przestrzeni.

Wszystkie wymienione wyniki zostały zawarte w publikacji:

M. Kędzierski, E. Wajnryb, Precise multipole method for calculating many-body hydrodynamic interactions in a microchannel, *J Chem Phys.* **133**, 154105 (2010).

A Definicje i zależności dla funkcji specjalnych wykorzystywanych w rozprawie

A.1 Zmodyfikowane funkcje Bessela

$$I_m(x) = i^{-m} J_m(ix), \quad (189)$$

$$K_m(x) = \frac{\pi}{2} i^{m+1} [J_m(ix) + iY_m(ix)]. \quad (190)$$

Wronskian dla $I_m(x)$ i $K_m(x)$ ma postać [79]

$$W(x) = \begin{vmatrix} I_m(x) & K_m(x) \\ I'_m(x) & K'_m(x) \end{vmatrix} = -\frac{1}{x}. \quad (191)$$

A.2 Wielomiany Legendre'a

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{s=0}^{[l/2]} (-1)^s \frac{(2l-2s)!}{(l-s)!s!} \frac{x^{l-2s}}{(l-2s)!}, \quad (192)$$

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad (193)$$

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x), \quad (194)$$

$$P_l^m(\cosh\theta) = i^m \sinh^m \theta A_l^m(\cosh\theta), \quad (195)$$

$$A_l^m(x) = \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{s=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} (-1)^s \frac{(l-2s)!}{(l-2s-m)!} \frac{(2l-2s)!}{(l-s)!s!} \frac{x^{l-2s-m}}{(l-2s)!}. \quad (196)$$

A.3 Znormalizowane harmoniki sferyczne

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = (-1)^m \underbrace{\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}}_{\frac{1}{n_{lm}}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (197)$$

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m [Y_{l,m}(\theta, \phi)]^*. \quad (198)$$

A.4 Zależności asymptotyczne

A.4.1 Sferyczne funkcje Bessela

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s 2^{s+2l+1} (s+l)!}{\sqrt{\pi} (2s+2l+1)! s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+l+\frac{1}{2}}, \quad (199)$$

$$j_l(x \ll 1) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \frac{2^{2l+1} l!}{\sqrt{\pi} (2l+1)! 2^{l+\frac{1}{2}}} x^{l+\frac{1}{2}} = \frac{2^l l! x^l}{(2l+1)!}. \quad (200)$$

A.4.2 Funkcje hiperboliczne

$$\cosh\theta = \cos(i\theta) = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}, \quad (201)$$

$$\sinh\theta = i \sin(\theta) = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}. \quad (202)$$

Dla $\theta \rightarrow \infty$ dominujące elementy wynoszą

$$\cosh(\theta \rightarrow \infty) \approx \frac{e^\theta}{2}, \quad (203)$$

$$\sinh(\theta \rightarrow \infty) \approx \frac{e^\theta}{2}. \quad (204)$$

A.4.3 Hiperboliczne stowarzyszone wielomiany Legendre'a

Z (196) dostajemy

$$A_l^m(\cosh(\theta \rightarrow \infty)) \approx \frac{l!}{2^l (l-m)!} \frac{(2l)! e^{\theta(l-m)}}{l! l! 2^{2l-m}} = \frac{(2l)!}{(l-m)! l!} \frac{e^{\theta(l-m)}}{2^{2l-m}}. \quad (205)$$

Prowadzi to do zależności

$$P_l^m(\cosh(\theta \rightarrow \infty)) \approx i^m \frac{e^{\theta m}}{2^m} \frac{(2l)!}{(l-m)! l!} \frac{e^{\theta(l-m)}}{2^{2l-m}} = \frac{i^m (2l)!}{2^l 2^l (l-m)! l!} e^{\theta l}. \quad (206)$$

B Wyprowadzenie tożsamości dla stowarzyszonych wielomianów Legendre'a $P_l^m(x)$

Wiemy, że następujące związki rekurencyjne są prawdziwe [79]

$$(n - m + 1) P_{n+1}^m(\cos \theta) - (2n + 1) \cos \theta P_n^m(\cos \theta) + (n + m) P_{n-1}^m(\cos \theta) = 0, \quad (207)$$

$$\sin^2 \theta \frac{d}{d \cos \theta} P_n^m(\cos \theta) = (n + m) P_{n-1}^m(\cos \theta) - n \cos \theta P_n^m(\cos \theta). \quad (208)$$

Podstawiając $(n + m) P_{n-1}^m(\cos \theta)$ z (207) do (208) dostajemy

$$\sin^2 \theta \frac{d}{d \cos \theta} P_n^m(\cos \theta) = (n + 1) \cos \theta P_n^m(\cos \theta) - (n - m + 1) P_{n+1}^m(\cos \theta). \quad (209)$$

Korzystając z tożsamości

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (210)$$

i (209) otrzymujemy

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_{\rho, \phi} \left[\frac{1}{r^{m+s+1}} P_{m+s}^m(\cos \theta) \right] = (-1) \frac{1}{r^{m+s+2}} (s + 1) P_{m+s+1}^m(\cos \theta). \quad (211)$$

Różniczkując po z p razy dostajemy

$$\left(\frac{\partial^p}{\partial z^p}\right)_{\rho,\phi} \left[\frac{1}{r^{m+s+1}} P_{m+s}^m(\cos \theta) \right] \quad (212)$$

$$= (-1)^p (s+1)(s+2)\dots(s+p) \frac{1}{r^{m+p+s+1}} P_{m+s+p}^m(\cos \theta).$$

Dla $s = 0$ daje to:

$$\left(\frac{\partial^p}{\partial z^p}\right)_{\rho,\phi} \left[\frac{1}{r^{m+1}} P_m^m(\cos \theta) \right] = (-1)^p p! \frac{1}{r^{m+p+1}} P_{m+p}^m(\cos \theta). \quad (213)$$

C Rozwinięcie regularnych cylindrycznych rozwiązań równania Laplace'a w regularne sferyczne rozwiązania równania Laplace'a

Z [84] znamy rozwinięcie fal cylindrycznych w fale sferyczne

$$h_{\alpha,m}^+ = \sum_{l=m}^{+\infty} i^{l-m} (2l+1) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \alpha) h_{l,m}^+, \quad (214)$$

gdzie funkcje $h_{\alpha,m}^+$ i $h_{l,m}^+$ są regularnymi rozwiązaniami równania Helmholtza

$$\nabla^2 f + k_0^2 f = 0, \quad (215)$$

odpowiednio w zmiennych cylindrycznych i sferycznych

$$h_{\alpha,m}^+ = J_m(k_0 \rho \sin \alpha) e^{im\phi} e^{ik_0 \cos \alpha z}, \quad (216)$$

$$h_{l,m}^+ = j_l(k_0 r) P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (217)$$

Naszym celem jest znalezienie ekwiwalentnej zależności dla równania Laplace'a, czyli wykonanie następujących granic

$$h_{\alpha,m}^+ \rightarrow \Pi_{k,m}^+, \quad (218)$$

$$h_{l,m}^+ \rightarrow \Phi_{l,m}^+. \quad (219)$$

Porównując jawne postacie powyższych czterech funkcji widzimy, że odpowiednią procedurą graniczną jest

$$k_0 \sin \alpha \xrightarrow[k_0 \rightarrow 0]{} ik, \quad (220)$$

$$k_0 \cos \alpha \xrightarrow[k_0 \rightarrow 0]{} k. \quad (221)$$

Jest to ekwiwalentne wyrażeniom

$$k_0 = 2ke^{-p}, \quad (222)$$

$$\alpha = ip$$

dla $p \rightarrow \infty$. Można to sprawdzić przez bezpośrednie podstawienie

$$k_0 \sin \alpha = 2ke^{-p} \frac{e^{-p} - e^p}{2i} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} ik, \quad (223)$$

$$k_0 \cos \alpha = 2ke^{-p} \frac{e^{-p} + e^p}{2} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} k. \quad (224)$$

Teraz możemy wziąć granicę $p \rightarrow \infty$ obu stron równania (214) i skorzystać z wyrażeń asymptotycznych (199) i (206)

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \lim_{p \rightarrow \infty} h_{\alpha, m}^+ = J_m(ik\rho) e^{im\phi} e^{ikz} = i^m I_m(k\rho) e^{im\phi} e^{ikz} \\ &= i^m [\text{sgn}(k)]^m I_m(|k|\rho) e^{im\phi} e^{ikz} = i^m [\text{sgn}(k)]^m \Pi_{k, m}^+, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{l=m}^{+\infty} i^{l-m} (2l+1) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\text{ch}(p)) j_l\left(\frac{2kr}{e^p}\right) P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \\ &= \sum_{l=m}^{+\infty} i^{l-m} (2l+1) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{i^m (2l)!}{2^l 2^l (l-m)! l!} e^{pl} \frac{2^l l! (2kr)^l}{(2l+1)! e^{pl}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \\ &= \sum_{l=m} \frac{(ik)^l}{(l+m)!} r^l P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}. \end{aligned}$$

Po pomnożeniu obu stron przez $i^{-m} [\text{sgn}(k)]^m$ otrzymujemy ostateczny rezultat

$$\underbrace{I_m(|k|\rho) e^{im\phi} e^{ikz}}_{\Pi_{k, m}^+} = i^{-m} [\text{sgn}(k)]^m \sum_{l=m} \frac{(ik)^l}{(l+m)!} n_{lm} (-1)^m \underbrace{\frac{1}{n_{lm}} (-1)^m r^l P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}}_{\Phi_{l, m}^+}.$$

Literatura

- [1] R. J. Hunter 2001, *Foundations of Colloid Science* (Oxford University Press, 2001).
- [2] R. B. Bird, W. E. Stewart and E. N. Lightfoot, *Transport Phenomena* (John Wiley & Sons, 2006).
- [3] G. A. Truskey, F. Yuan and D. F. Katz, *Transport Phenomena in Biological Systems* (Prentice Hall, 2009).
- [4] J. Karger and D. M. Ruthven, *Diffusion in Zeolites and Other Microporous Solids* (Wiley, 1992).
- [5] Q. H. Wei, C. Bechinger and P. Leiderer, *Science* **287**, 625 (2000).
- [6] S. K. Bhatia and D. Nicholson, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 016105 (2003).
- [7] Dill K. A. and S. Bromberg, *Molecular Driving Forces: Statistical Thermodynamics in Chemistry and Biology* (Garland Science, 2002).
- [8] Landau L. D. and Lifshitz E. M., *Fluid Mechanics* (Butterworth-Heinemann, 1987).
- [9] R. G. Cox and S. G. Mason, Suspended particles in fluid flow through tubes. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **3**, 291 (1971).

- [10] H. Brenner and J. Happel, Slow viscous flow past a sphere in a cylindrical tube. *J. Fluid Mech.* **4**, 195 (1958).
- [11] R. G. Cox and H. Brenner, Effect of finite boundaries on Stokes resistance of an arbitrary particle. 3. Translation and rotation. *J. Fluid Mech.* **28**, 391 (1967).
- [12] T. Greenstein and J. Happel, Theoretical study of the slow motion of a sphere and a fluid in a cylindrical tube. *J. Fluid Mech.* **34**, 705 (1968).
- [13] T. Greenstein and J. Happel, Viscosity of dilute uniform suspensions of sphere spheres. *Phys. Fluids* **13**, 18 (1970).
- [14] H. Brenner, Pressure drop due to the motion of neutrally buoyant particles in duct flows. *J. Fluid Mech.* **43**, 641 (1970).
- [15] H. Tozeren, Torque on eccentric spheres flowing in tubes. *J. Appl. Mech. Trans. ASME* **49**, 279 (1982).
- [16] H. Tozeren, Drag on eccentrically positioned spheres translating and rotating in tubes. *J. Fluid Mech.* **129**, 77 (1983).
- [17] A. J. Goldman, R. G. Cox and H. Brenner, Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall – I. Motion through a quiescent fluid. *Chem. Eng Sci.* **22**, 637 (1967).

- [18] M. E. O'Neill and K. Stewartson, On the slow motion of a sphere parallel to a nearby plane wall. *J. Fluid Mech.* **27**, 705 (1967).
- [19] A. Falade and H. Brenner, Stokes wall effects for particles moving near cylindrical boundaries. *J. Fluid Mech.* **154**, 145 (1985).
- [20] P. M. Bungay and H. Brenner, Pressure drop due to the motion of a sphere near the wall bounding a Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.* **60**, 81 (1973).
- [21] P. M. Bungay and H. Brenner, The motion of a closely-fitting sphere in a fluid-filled tube. *Intl J. Multiph. Flow* **1**, 25 (1973).
- [22] X. Xu and S. A. Rice, Influence of hydrodynamic coupling on the density dependence of quasi-one-dimensional diffusion *J. Chem. Phys.* **122**, 024907 (2005).
- [23] X. Xu, S. A. Rice, B. Lin and H. Diamant, Influence of hydrodynamic coupling on pair diffusion in a quasi-one-dimensional colloid system. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 158301 (2005).
- [24] D. T. Valley , S. A. Rice , B. Cui and H. M. Ho, Pair diffusion in quasi-one- and quasi-two-dimensional binary colloid suspensions. *J. Chem. Phys.* **126**, 134908 (2007)

- [25] X. Xu , B. Lin , B. Cui , A. R. Dinner and S. A. Rice, Spreading of colloid clusters in a quasi-one-dimensional channel *J. Chem. Phys.* **132**, 084902 (2010).
- [26] J. D. Sherwood, Streaming potential generated by two-phase flow in a capillary. *Phys. Fluids* **19**, 053101 (2007).
- [27] J. D. Sherwood, Streaming potential generated by a small charged drop in Poiseuille flow. *Phys. Fluids* **21**, 013101 (2009).
- [28] C. Pozrikidis *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow* (Cambridge University Press, 1992).
- [29] C. Pozrikidis , Numerical simulation of cell motion in tube flow. *Ann. Biomed. Eng* **33**, 165 (2005).
- [30] C. Queguiner and D. Barthes-Biesel, Axisymmetric motion of capsules through cylindrical channels. *J. Fluid Mech.* **348**, 349 (1997).
- [31] J. J. L. Higdon and G. P. Muldowney, Resistance functions for spherical particles, droplets and bubbles in cylindrical tubes. *J. Fluid Mech.* **298**, 193 (1995).

- [32] W. J. Lunsman, L. Genieser, R. C. Armstrong and R. A. Brown, Finite-element analysis of steady viscoelastic flow around a sphere in a tube-calculations with constant viscosity models. *J. Non-Newton. Fluid Mech.* **48**, 63 (1993).
- [33] M. Sugihara-Seki, The motion of an ellipsoid in tube flow at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **324**, 287 (1996).
- [34] M. Sugihara-Seki and R. Skalak, Asymmetric flows of spherical particles in a cylindrical tube. *Biorheology* **34**, 155 (1997).
- [35] J. J. Chiu, D. L. Wang, S. Chien, R. Skalak and S. Usami, Effects of disturbed flow on endothelial cells. *J. Biomech. Engng – Trans. ASME* **120**, 2 (1998).
- [36] N. Sushko and M. Cieplak, Motion of grains, droplets, and bubbles in fluid-filled nanopores. *Phys. Rev. E* **64**, 021601 (2001).
- [37] G. Drazer, B. Khusid, J. Koplik and A. Acrivos, Wetting and particle adsorption in nanoflows. *Phys. Fluids* **17**, 017102 (2005).
- [38] B. Cichocki, R. B. Jones, R. Kutteh and E. Wajnryb, *J. Chem. Phys.* **112**, 25481 (2000).
- [39] S. Bhattacharya, J. Bławdziewicz, *J. Math. Phys.* **43**, 5720 (2002)

- [40] S. Bhattacharya, J. Bławzdziejewicz and E. Wajnryb, *Physica A* **356**, 294 (2005).
- [41] S. Bhattacharya, J. Bławzdziejewicz and E. Wajnryb, *J. Fluid Mech.* **541**, 263 (2005).
- [42] S. Bhattacharya, J. Bławzdziejewicz and E. Wajnryb, *Phys. Fluids* **18**, 053301 (2006).
- [43] S. Bhattacharya, J. Bławzdziejewicz and E. Wajnryb, *J. Comp. Phys.* **212**, 718 (2006).
- [44] M. L. Ekiel-Jezewska and E. Wajnryb, in *Theoretical Methods for Micro Scale Viscous Flows*, edited by F. Feuillebois and A. Sellier (Transworld Research Network, 2009), pp. 127-172.
- [45] P. Mazur and D. Bedeaux, Generalization of Faxen's theorem to non-steady motion of a sphere through an incompressible fluid in arbitrary flow. *Physica* **76**, 235 (1974).
- [46] P. Mazur and W. van Saarloos, Many-sphere hydrodynamic interactions and mobilities in a suspension. *Physica* **115A**, 21 (1982).

- [47] B. U. Felderhof , Force density induced on a sphere in linear hydrodynamics I. Fixed sphere, stick boundary conditions. *Physica* **84A**, 557 (1976).
- [48] B. U. Felderhof , Force density induced on a sphere in linear hydrodynamics II. moving sphere, mixed boundary conditions. *Physica* **84A**, 569 (1976).
- [49] B. U. Felderhof , Hydrodynamic interactions between two spheres. *Physica* **89A**, 373 (1977).
- [50] R. Schmitz and B. U. Felderhof , Creeping flow about a sphere. *Physica* **92A**, 423 (1978).
- [51] R. Schmitz, Force multipole moments for a spherically symmetric particle in solution. *Physica* **102A**, 161 (1980).
- [52] R. Schmitz, Mobility matrix for two spherical particles with hydrodynamic interaction. *Physica* **116A**, 163 (1982).
- [53] R. Schmitz, Creeping flow about a spherical particle. *Physica* **113A**, 90 (1982).
- [54] R. Schmitz, Friction matrix for two spherical particles with hydrodynamic interactions. *Physica* **113A**, 103 (1982).

- [55] B. Cichocki, B. U. Felderhof and R. Schmitz, Hydrodynamic interactions between two spherical particles. *PhysicoChem. Hydrodyn.* **10**, 383 (1988).
- [56] B. U. Felderhof , Many-body hydrodynamic interactions in suspensions. *Physica* **151A**, 1 (1988).
- [57] B. U. Felderhof , Hydrodynamic interactions in suspensions with periodic boundary conditions. *Physica* **159A**, 1 (1989).
- [58] B. Cichocki, B. U. Felderhof, K. Hinsen, E. Wajnryb, and J. Bławdziewicz, Friction and mobility of many spheres in Stokes flow. *J. Chem. Phys.* **100**, 3780 (1994).
- [59] K. Sadlej, E. Wajnryb, J. Bławdziewicz, M. L. Ekiel-Jeżewska and Z. Adamczyk, *J. Chem. Phys.* **130**, 144706 (2009).
- [60] Z. Adamczyk, K. Sadlej, E. Wajnryb, M. Nattich, M. L. Ekiel-Jeżewska and J. Bławdziewicz, *Adv. Colloid Interface Sci.* **153**, 1 (2010).
- [61] G. Karniadakis, A. Beskok and N. Aluru, *Microflows and Nanoflows: Fundamentals and Simulation* (Springer, 2005).
- [62] A. Revil and A. Cerepi, *Geophys. Res. Lett.* **31**, L11605 (2004).

- [63] J. H. Saunders, M. D. Jackson and C. C. Pain, *Geophys. Res. Lett.* **33**, L15316 (2006).
- [64] J. K. G. Dhont, *An Introduction to Dynamics of Colloids* (Elsevier Science, 1996).
- [65] S. Kim and S. J. Karrila, *Microhydrodynamics* (Dover, 2005).
- [66] Z. Zapryanov and S. Tabakova, *Dynamics of Bubbles, Drops and Rigid Particles* (Kluwer, 2010)
- [67] J. Bławdziewicz, M. L. Ekiel-Jeżewska and E. Wajnryb, Motion of a spherical particle near a planar fluid-fluid interface: The effect of surface incompressibility, *J. Chem. Phys.* **133**, 114702 (2010)
- [68] J. Bławdziewicz, M. L. Ekiel-Jeżewska and E. Wajnryb, Hydrodynamic coupling of spherical particles to a planar fluid-fluid interface: Theoretical analysis, *J. Chem. Phys.* **133**, 114703 (2010).
- [69] R. B. Jones and R. Schmitz, *Physica A* **149**, 373 (1988).
- [70] J. Bławdziewicz, E. Wajnryb and M. Loewenberg, *J. Fluid Mech.* **395**, 29 (1999).
- [71] A. R. Edmonds *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton University Press, 1996).

- [72] L. I. Schiff *Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, 1988).
- [73] G. Perkins, R. B. Jones, *Physica A* **171**, 575 (1991)
- [74] J. D. Jackson *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, 1975).
- [75] B. U. Felderhof and R. B. Jones, *J. Math. Phys.* **30**, 339 (1988).
- [76] J. Happel and H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics* (Springer, 1983).
- [77] G. N. Watson *A Treatise On The Theory of Bessel Functions* (Merchant Books, 2008).
- [78] G. B. Arfken, H. J. Weber *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, 2005).
- [79] N. N. Lebedev and R. R. Silverman, *Special Functions & Their Applications* (Dover Publications, 1972).
- [80] Z. Adamczyk, K. Sadlej, E. Wajnryb, M. L. Ekiel-Jeżewska and P. Warszyński, *Journal of Colloid & Interface Science* **347**, 192 (2010).
- [81] M. L. Ekiel-Jeżewska, E. Wajnryb, J. Bławdziewicz and F. Feuillebois, *J. Chem. Phys.* **129**, 181102 (2008)
- [82] T. Oura and M. Mori, *J. Comput. Appl. Math.* **38**, 35 (1991).

[83] B. Cui, H. Diamant and B. Lin, Phys. Rev. Lett. **89**, 188302 (2002).

[84] J. A. Stratton *Electromagnetic Theory* (McGraw-Hill, 1941).

