PAWEŁ SZEPTYŃSKI
RYSZARD B. PĘCHERSKI

Rudy Metale R57 2012 nr 4
UKD 621.17:539.214:539.389.1:
:539.22:669-41:621.771:669-12

PROPOZYCJA NOWEGO KRYTERIUM PLASTYCZNOŚCI DLA BLACH ORTOTROPOWYCH Z UWZGLĘDNIENIEM ASYMETRII ZAKRESU SPRĘŻYSTEGO

W artykule przedstawiono propozycję nowego kryterium plastyczności dla blach ortotropowych wykazujących różnicę wytrzymałości przy rozciąganiu i ściskaniu. Nowe kryterium bazuje na energetycznym warunku stanu granicznego dla materiałów anizotropowych zaproponowanym przez Rychlewskiego [2] i łączy się z wprowadzoną przez Burzyńskiego [3] koncepcją zależnych od charakteru stanu naprężenia funkcji określających udział poszczególnych składników rozkładu głównego gęstości energii sprężystej w całkowitej mierze wytężenia materiału. Podano specyfikację kryterium dla wszystkich płaskich symetrii sprężystych. Zaprezentowano ogólną metodę pozyskiwania danych niezbędnych do wyznaczenia parametrów kryterium na podstawie wyników prostych prób wytrzymałościowych — rozciągania, ściskania i ścinania. Wskazano na szczególne konsekwencje w opisie deformacji plastycznej blach w przypadku przyjęcia prawa płynięcia plastycznego stowarzyszonego z zaprezentowanym warunkiem plastyczności.

Słowa kluczowe: blachy walcowane, anizotropia, asymetria zakresu sprężystego, kryterium plastyczności, hipotezy wytężenia

PROPOSITION OF A NEW YIELD CRITERION FOR ORTHOTROPIC METAL SHEETS ACCOUNTING FOR ASYMMETRY OF ELASTIC RANGE

A new proposition of a yield criterion for orthotropic metal sheets exhibiting the strength-differential effect is presented in the paper. New criterion is based on the energetic limit condition for anisotropic bodies proposed by Rychlewski [2]. It is extended by introduction of a concept of stress state dependent functions defining the contribution of each component of the main elastic energy density decomposition to the total measure of material effort — the concept which was first introduced by Burzyński [3]. Criterion specification for all plane elastic symmetries is given. General method of acquiring the data which are necessary for determination of the criterion parameters basing on simple strength tests – tension, compression, shearing — is presented. Specific properties of the plastic deformation description in case of taking the flow-rule associated with the presented yield criterion are indicated.

Keywords: rolled metal sheets, anisotropy, strength-differential effect, yield criterion, material effort hypothesis

Wprowadzenie

Jednym z kluczowych zagadnień analizy procesów plastycznej deformacji metali zarówno z punktu widzenia mechaniki ciała stałego jak i praktycznych zastosowań w przemyśle, jest określenie warunków, jakie muszą być spełnione aby materiał przeszedł ze stanu liniowo sprężystego w stan nieliniowo sprężysty bądź plastyczny. Warunki te zwykło się formułować w postaci pojedynczego równania kryterium stanu granicznego. Począwszy od połowy XX w. zaproponowano szereg kryteriów granicznych dla blach, których głównym celem jest uwzględnienie anizotropii indukowanej w procesie walcowania — Hill (1948, 1979, 1990, 1993), Bassani (1977), Gotoh (1977), Logan (1983), Budiansky (1984), Barlat (1989, 1991, 1994, 1996, 2003), Montheillet (1991), Ferron (1994), Zhou (1994), Vegter (2006), por np. D. Banabic [1], gdzie można znaleźć szczegółowe referencje wymienionych prac.

Przedmiotem pracy jest własna propozycja nowego kryterium plastyczności dla zagadnień płaskich, które uwzględnia niską symetrię sprężystą materiału oraz różnicę wytrzymałości przy rozciąganiu i ściskaniu. Podstawę teoretyczną nowej propozycji warunku granicznego stanowi rozkład energii sprężystej na części energetycznie niezależne oraz analiza widmowa tensorów sprężystości, zbadane szczegółowo przez Rychlewskiego [2], a także ogólna koncepcja funkcji wpływu stanu naprężenia na energetyczną miarę wytężenia, wprowadzona po raz pierwszy przez Burzyńskiego [3].

Mgr inż. Paweł Szeptyński — AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki, Katedra Wytrzymałości Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji, al. A. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, *prof. dr hab. inż. Ryszard B. Pęcherski* — AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki, Katedra Wytrzymałości Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji, al. A. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Warszawa.

Propozycja kryterium stanu granicznego

Stany własne tensora sztywności i podatności

Rozpatrujemy uogólnione prawo Hooke'a

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}$ oznacza tensor naprężeń Cauchy'ego, $\boldsymbol{\varepsilon}$ jest tensorem małych odkształceń, zaś $\mathbf{S}$ i $\mathbf{C}$ są odpowiednio tensorem sztywności i podatności o następujących symetriach

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{klij}$$

Każdy materiał Hooke'a — materiał liniowo sprężysty, dla którego istnieje potencjał sprężysty w postaci jednorodnej funkcji kwadratowej — scharakteryzować można przez układ liczb będących składowymi macierzy reprezentacji tensorów sztywności $\mathbf{S}$ i podatności $\mathbf{C}$. W ogólności liczb tych jest 21 i w rzeczywistości ich wartości zmieniają się w zależności od przyjętego układu współrzędnych, co ma kluczowe znaczenie przy opisie ciał anizotropowych. Rychlewski pokazał w [2], że jedynie 18 z nich ma istotne znaczenie fizyczne, podczas gdy 3 pozostałe służą jedynie orientacji próbki względem przyjętego układu odniesienia. Ponadto spośród tych 18 współczynników, jedynie 6 (tzw. moduły Kelvina) pełni w istocie rolę modułów sztywności, zaś 12 pozostałych (tzw. dystrybutory sztywności) określa postać stanu odkształcenia będącego odpowiedzią na zadany stan naprężenia. Moduły Kelvina są wartościami własnymi tensora sztywności, zaś odpowiadające im stany odkształcenia nazywamy stanami własnymi tensora sztywności. Podprzestrzenie własne tensora sztywności i podatności są identyczne, zaś odpowiadające sobie wartości własne są swoimi odwrotnościami. Z uwagi na wymiar przestrzeni symetrycznych tensorów drugiego rzędu, istotnie różnych wartości własnych i podprzestrzeni własnych może być co najwyżej 6.

Dowolny materiał Hooke'a może zostać jednoznacznie scharakteryzowany przez jego moduły Kelvina λ_K oraz odpowiadające im unormowane stany własne $\boldsymbol{\omega}_K$ (K = I, II, ..., VI) — układ sześciu stanów naprężenia lub odkształcenia. Stany te wykazują szereg interesujących własności [4]

— układ stanów własnych jest bazą w przestrzeni stanów naprężenia i odkształcenia — dowolny stan naprężenia i odkształcenia może zostać zapisany jako kombinacja liniowa stanów własnych

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_I + \boldsymbol{\sigma}_{II} + \ldots + \boldsymbol{\sigma}_{IV} \qquad \boldsymbol{\sigma}_K = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}_K)\boldsymbol{\omega}_K \qquad K = I, \ldots, VI$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_I + \boldsymbol{\varepsilon}_{II} + \ldots + \boldsymbol{\varepsilon}_{IV} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_K = (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\omega}_K)\boldsymbol{\omega}_K,$$

— stany własne są ortogonalne

$$\boldsymbol{\omega}_K \cdot \boldsymbol{\omega}_L = \delta_{KL},$$

— odkształcenie odpowiadające naprężeniu będącemu stanem własnym, jest do niego proporcjonalne, przy czym współczynnikiem proporcjonalności jest odpowiedni moduł Kelvina

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}_K) = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_K = \lambda_K \boldsymbol{\varepsilon}_K = \underbrace{\lambda_K \varepsilon_K}_{\sigma_K} \boldsymbol{\omega}_K = \boldsymbol{\sigma}_K$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}_K) = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}_K = \frac{1}{\lambda_K}\boldsymbol{\sigma}_K = \underbrace{\frac{1}{\lambda_K}\sigma_K}_{\varepsilon_K} \boldsymbol{\omega}_K = \boldsymbol{\varepsilon}_K,$$

— stany własne są energetycznie niezależne — praca wykonywana przez stan naprężenia będący jednym ze stanów własnych na odkształceniach generowanych przez stan własny należący do innej podprzestrzeni jest równa 0

$$K \neq L \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}_K, \boldsymbol{\varepsilon}_L) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_K \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_L = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_K \cdot \boldsymbol{\sigma}_L = 0$$

Energetyczna niezależność stanów własnych pozwala zapisać gęstość energii odkształcenia sprężystego spowodowanego stanem naprężenia σ jako addytywną funkcję swojej zmiennej

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \Phi(\boldsymbol{\sigma}_I + \boldsymbol{\sigma}_{II} + \ldots + \boldsymbol{\sigma}_{IV}) = \Phi(\boldsymbol{\sigma}_I) + \Phi(\boldsymbol{\sigma}_{II}) +$$
$$+ \ldots + \Phi(\boldsymbol{\sigma}_{IV}) = \sum_{K=I}^{VI} \Phi_K \qquad \Phi_K = \frac{|\boldsymbol{\sigma}_K|^2}{2\lambda_K}$$

co dla funkcji kwadratowej jaką wyraża się gęstość energii sprężystej nie jest w ogólności możliwe. Rozkład powyższy nazywamy rozkładem głównym energii sprężystej.

Energetyczne kryterium Rychlewskiego

Rychlewski zaproponował aby liniową kombinację składników podanego powyżej rozkładu uważać za miarę wytężenia materiału [2]. Rychlewski udowodnił między innymi, iż dowolny warunek stanu granicznego typu uogólnionego warunku Misesa

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 1$$

w którym tensor stanu granicznego $\mathbf{H}$ jest symetrycznym tensorem czwartego rzędu, można zapisać jako kombinację liniową maksymalnie sześciu gęstości energii związanych z pewnymi stanami energetycznie niezależnymi

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{h_1}\Phi(\boldsymbol{\sigma}_1) + \frac{1}{h_2}\Phi(\boldsymbol{\sigma}_2) + \ldots + \frac{1}{h_\rho}\Phi(\boldsymbol{\sigma}_\rho) \qquad \rho \leq 6,$$
$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}_K, \boldsymbol{\sigma}_L) = 0, \qquad K, L = 1, \ldots, \rho$$

Jak wykazuje Rychlewski w [2], wspomniane powyżej stany energetycznie niezależne niekoniecznie muszą być ortogonalne lub też być stanami własnymi tensorów sprężystości. Szczegółową dyskusję tego zagadnienia i oryginalnych wyników Rychlewskiego można znaleźć w [4].

Ogólne sformułowanie kryterium

Własna propozycja autorów polega na rozszerzeniu energetycznego kryterium Rychlewskiego na ciała wykazujące asymetrię zakresu sprężystego. Nowe kryterium stanu granicznego można zapisać w następującej postaci

$$\eta_1 \cdot \Phi(\boldsymbol{\sigma}_1) + \eta_2 \cdot \Phi(\boldsymbol{\sigma}_2) + \ldots + \eta_\rho \cdot \Phi(\boldsymbol{\sigma}_\rho) = 1 \qquad \rho \le 6,$$

gdzie rozkład przestrzeni tensorów naprężenia i odkształcenia $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 + \ldots + \boldsymbol{\sigma}_\rho$ jest dowolnym rozkładem na podprzestrzenie stanów energetycznie niezależnych. Współczynniki η_K są wielkościami zależnymi od stanu naprężenia i będziemy je nazywać funkcjami wpływu.

Proponowane kryterium bazuje na założeniu prawa Hooke'a. Dlatego rozważany stan graniczny utożsamiać należy z granicą proporcjonalności. W przypadku braku wyraźnej granicy proporcjonalności, należy w doświadczeniach dokonać pomiaru umownej granicy odpowiadającej pewnemu niewielkiemu ustalonemu odkształceniu trwałemu. Matematyczny formalizm tego warunku może zatem znaleźć zastosowanie także do określenia kryterium plastyczności.

Funkcje wpływu

O funkcjach wpływu zakładamy:

- K-ta funkcja wpływu zależy jedynie od rzutu stanu naprężenia na K-tą podprzestrzeń rozpatrywanego rozkładu przestrzeni tensorów naprężenia i odkształcenia

$$\eta_K = \eta_K(\boldsymbol{\sigma}_K) \qquad K = 1, \ldots, \rho \qquad \rho \le 6$$

- funkcje wpływu są izotropowe w podprzestrzeni, w której są określone — można je wyrazić zatem za pomocą niezmienników rzutu naprężenia na daną podprzestrzeń. W szczególności niezmiennikami tymi mogą być trzy podstawowe niezmienniki tensora drugiego rzędu, jego norma itp.,
- w przypadku, gdy dana podprzestrzeń jest podprzestrzenią czystych ścinań, wtedy o funkcji wpływu zakładamy, że jest parzysta, tj. symetryczna ze względu na znak stanu naprężenia – jest to konsekwencja założenia, iż w przypadku czystego ścinania zakres sprężysty jest zawsze symetryczny,
- w przypadku jednowymiarowych podprzestrzeni czystych ścinań, funkcja wpływu jest stałym parametrem, proporcjonalnym do granicy sprężystości przy ścinaniu należącym do tej podprzestrzeni.

W przypadku, gdy stan graniczny, w jakim znajduje się ciało, w całości należy do K-tej podprzestrzeni, odpowiadająca jej funkcja wpływu ma wartość równą odwrotności granicznej wartości gęstości energii sprężystej dla tej podprzestrzeni

$$\eta_K(\boldsymbol{\sigma}_K^{gr}) = \frac{1}{\Phi_K^{gr}} \qquad K = 1, \ldots, \rho \qquad \rho \le 6$$

Ogólna specyfikacja kryterium dla wybranych płaskich symetrii sprężystych

Rozważany będzie szczególny przypadek, w którym rozpatrywanym rozkładem na podprzestrzenie energetycznie niezależne jest rozkład na podprzestrzenie własne tensorów sprężystości. Składniki kombinacji gęstości energii w analizowanym kryterium są wtedy składnikami rozkładu głównego energii sprężystej.

W przypadku blach (zagadnienie płaskie), liczba niezależnych składowych tensora naprężenia redukuje się z 6 do 3 (wymiar przestrzeni płaskich tensorów symetrycznych) — maksymalna liczba składników kombinacji gęstości energii w proponowanym kryterium granicznym jest równa $\rho \le 3$.

W każdym z analizowanych przypadków zakładamy, że osie przyjętego prostokątnego układu współrzędnych pokrywają się z kierunkami wyróżnionymi w materiale — w przypadku blach są to: kierunek walcowania i kierunek do niego prostopadły.

W celu dokonania rozkładu spektralnego tensorów sprężystości, który umożliwia wyznaczenie modułów Kelvina i stanów własnych analizowanych tensorów oraz dokonanie rozkładu głównego energii sprężystej, konieczne jest wyznaczenie wszystkich składowych tensora sztywności lub podatności w przyjętym układzie współrzędnych

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1/E_0 & -\nu_0/E_0 & 0 \\ -\nu_0/E_0 & 1/E_{90} & 0 \\ 0 & 0 & 1/2G_0 \end{bmatrix}$$

gdzie

E_0, E_{90} — oznaczają moduły Younga przy rozciąganiu wzdłuż i prostopadle do kierunku walcowania,

ν_0 — współczynnik Poissona przy rozciąganiu wzdłuż kierunku walcowania,

G_0 — moduł Kirchhoffa przy ścinaniu wzdłuż i prostopadle do kierunku walcowania.

Pomiaru wielkości modułu Younga E_φ mierzonego pod kątem φ do kierunku walcowania, można dokonać w trakcie statycznej próby rozciągania oraz ściskania próbek wyciętych z arkusza blachy pod odpowiednim kątem. W analogiczny sposób można dokonać pomiaru modułu Kirchhoffa G_φ w trakcie ścinania próbki blachy przy zadanej jej orientacji względem kierunku walcowania. Możliwe jest wyznaczenie współczynnika Poissona przy rozciąganiu wzdłuż kierunku walcowania na podstawie pomiarów modułu Kirchhoffa oraz modułów Younga przy różnych orientacjach testowanych próbek, przykładowo

$$\nu_0 = \frac{(E_0 + E_{90})E_{45} - 4E_0E_{90}}{2E_{90}E_{45}} + \frac{E_0}{2G_0}$$

Znając składowe tensora podatności w układzie współrzędnych pokrywającym się z osiami symetrii blachy, można wyznaczyć moduły sztywności przy dowolnej innej orientacji próbki

$$\frac{1}{E_\varphi} = \frac{1}{4}\left[\sin^2 2\varphi\left(2\left(\frac{1}{2G_0} - \frac{\nu_0}{E_0}\right) - \left(\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_{90}}\right)\right) + \right.$$

$$+2\left(\frac{1}{E_0}(1+\cos 2\varphi)+\frac{1}{E_{90}}(1-\cos 2\varphi)\right)\Bigg]$$

$$\frac{1}{G_\varphi}=\frac{1}{G_0}+\sin^2 2\varphi\left[\left(\frac{1}{E_0}+\frac{1}{E_{90}}\right)-2\left(\frac{1}{2G_0}-\frac{\nu_0}{E_0}\right)\right]$$

Szczegółową dyskusję płaskich tensorów Hooke'a oraz kryteriów granicznych dla stanów płaskich można znaleźć w [5, 6].

Płaska ortotropia

Rozkład spektralny ortotropowego tensora sztywności / podatności

Z rozkładu spektralnego tensora sztywności dla blachy ortotropowej otrzymujemy:

— dwie jednowymiarowe podprzestrzenie własne stanów o niezerowej składowej hydrostatycznej
z modułami Kelvina

$$\lambda_1=\frac{2E_0E_{90}}{(E_0+E_{90})+\sqrt{(E_0-E_{90})^2+4\nu_0^2E_{90}^2}}$$

$$\lambda_2=\frac{2E_0E_{90}}{(E_0+E_{90})-\sqrt{(E_0-E_{90})^2+4\nu_0^2E_{90}^2}}$$

i unormowanymi stanami własnymi

$$\boldsymbol{\omega}_\mathbf{1}=\begin{bmatrix}\cos\aleph & 0\\ 0 & \sin\aleph\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{\omega}_\mathbf{2}=\begin{bmatrix}-\sin\aleph & 0\\ 0 & \cos\aleph\end{bmatrix}$$

gdzie parametr $\aleph$ dany wzorem

$$\mathrm{tg}\aleph=-\frac{E_0}{2\nu_0}\left[\frac{1}{E_{90}}-\frac{1}{E_0}+\sqrt{\left(\frac{1}{E_{90}}-\frac{1}{E_0}\right)^2+4\left(\frac{\nu_0}{E_0}\right)^2}\right]$$

jest funkcją dystrybutora sztywności,

— jednowymiarowa podprzestrzeń własna stanów czystego ścinania w kierunkach wyróżnionych w materiale
z modułem Kelvina

$$\lambda_3=2G$$

gdzie
G — moduł Kirchhoffa przy ścinaniu w kierunku walcowania i prostopadle do niego,
oraz unormowanym stanem własnym

$$\boldsymbol{\omega}_\mathbf{3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Specyfikacja kryterium stanu granicznego dla ortotropii

Kryterium stanu granicznego można zapisać w postaci

$$\eta_1\Phi_1+\eta_2\Phi_2+\eta_3\Phi_3=1$$

gdzie
Φ_K —są gęstościami energii sprężystej związanymi z K-tym stanem własnym, zaś η_K są funkcjami wpływu (K = 1,2,3). Zgodnie z założeniami o funkcjach wpływu oraz z uwagi na fakt, że wszystkie podprzestrzenie są jednowymiarowe, a co za tym idzie, wszystkie niezmienniki rzutów na te podprzestrzenie są proporcjonalne do miary tego rzutu lub jego potęg, warunek graniczny można przepisać w postaci

$$\tilde{\eta}_1(\sigma_1)\cdot\sigma_1^2+\tilde{\eta}_2(\sigma_2)\cdot\sigma_2^2+\frac{\sigma_3^2}{2k_S^2}=1$$

$$\sigma_K=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\omega}_\mathbf{K},\quad K=1,2,3$$

gdzie
k_s jest granicznym naprężeniem stycznym przy ścinaniu blachy wzdłuż kierunku walcowania, zaś miary rzutów na podprzestrzenie własne **C** i **S**, tj. składowe stanu naprężenia w bazie stanów własnych $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$, są równe

$$\sigma_1=\sigma_x\cos\aleph+\sigma_y\sin\aleph$$
$$\sigma_2=-\sigma_x\sin\aleph+\sigma_y\cos\aleph$$
$$\sigma_3=\sqrt{2}\tau_{xy}$$

przy czym oś x przyjętego układu współrzędnych pokrywa się z kierunkiem walcowania. Funkcje $\tilde{\eta}_K$ podlegają wyznaczeniu. Funkcja wpływu $\tilde{\eta}_K$ jest proporcjonalna do η_K z pierwotnego sformułowania kryterium i różni się jedynie stałym parametrem skalującym proporcjonalnym do odpowiedniego modułu Kelvina. Oznaczmy tymczasowo całkowity wpływ K-tego stanu własnego (K = 1, 2) pewną funkcją f

$$\mathrm{f}_K=\tilde{\eta}_K(\sigma_K)\cdot\sigma_K^2$$

Warunek graniczny przyjmuje wtedy postać

$$\mathrm{f}_1(\sigma_1)+\mathrm{f}_2(\sigma_2)+\frac{\sigma_3^2}{2k_s^2}=1$$

Łatwo zauważyć, że nie tylko spełniony jest warunek $f_K(0)=0$ (czego wymaga spełnienie warunku stanu granicznego przy czystym ścinaniu wzdłuż kierunku walcowania), ale ponadto

$$\left.\frac{\partial\mathrm{f}_K}{\partial\sigma_K}\right|_{\sigma_K=0}=0\qquad(K=1,2)$$

co ma swoje istotne konsekwencje. Jeśli bowiem przyjąć klasyczne prawo płynięcia plastycznego Levy'ego-Misesa z potencjałem plastycznym Ψ stowarzyszonym z warunkiem plastyczności (utożsamianym tutaj z rozpatrywanym warunkiem stanu granicznego), wtedy otrzymujemy

$$d\varepsilon_1^p = \cos\aleph \cdot d\varepsilon_{xx}^p + \sin\aleph \cdot d\varepsilon_{yy}^p =$$
$$= d\lambda\left[\cos\aleph \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_x} + \sin\aleph \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_y}\right]$$

$$d\varepsilon_2^p = -\sin\aleph \cdot d\varepsilon_{xx}^p + \cos\aleph \cdot d\varepsilon_{yy}^p =$$
$$= d\lambda\left[-\sin\aleph \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_x} + \cos\aleph \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_y}\right]$$

$$d\varepsilon_3^p = \sqrt{2}d\varepsilon_{xy}^p = \sqrt{2}d\lambda\frac{\partial\psi}{\partial\tau_{xy}}$$

co wobec

$$\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_x} = \frac{\partial}{\partial\sigma_x}\left[\mathrm{f}_1(\sigma_1) + \mathrm{f}_1(\sigma_2) + \frac{\sigma_3^2}{2k_s^2}\right] =$$
$$= \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial\sigma_1}\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_x} + \frac{\partial \mathrm{f}_2}{\partial\sigma_2}\frac{\partial\sigma_2}{\partial\sigma_x} = \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial\sigma_1}\cos\aleph - \frac{\partial \mathrm{f}_2}{\partial\sigma_2}\sin\aleph$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_y} = \frac{\partial}{\partial\sigma_y}\left[\mathrm{f}_1(\sigma_1) + \mathrm{f}_1(\sigma_2) + \frac{\sigma_3^2}{2k_s^2}\right] =$$
$$= \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial\sigma_1}\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_y} + \frac{\partial \mathrm{f}_2}{\partial\sigma_2}\frac{\partial\sigma_2}{\partial\sigma_y} = \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial\sigma_1}\sin\aleph + \frac{\partial \mathrm{f}_2}{\partial\sigma_2}\cos\aleph$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau_{xy}} = \frac{\partial}{\partial\tau_{xy}}\left[\mathrm{f}_1(\sigma_1) + \mathrm{f}_1(\sigma_2) + \frac{\sigma_3^2}{2k_s^2}\right] =$$
$$= \frac{1}{2k_s^2}\frac{\partial}{\partial\tau_{xy}}\sigma_3^2 = \frac{1}{2k_s^2}\frac{\partial}{\partial\tau_{xy}}(2\tau_{xy}^2) = \frac{2}{k_s^2}\tau_{xy} = \frac{\sqrt{2}}{k_s^2}\sigma_3$$

daje

$$d\varepsilon_1^p = d\lambda\frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial\sigma_1} \qquad d\varepsilon_2^p = d\lambda\frac{\partial \mathrm{f}_2}{\partial\sigma_2} \qquad d\varepsilon_3^p = 2d\lambda\frac{\sigma_3}{k_s^2}$$

W takim przypadku przyrost odkształceń plastycznych na kierunku stanów własnych w sytuacji, gdy składowa naprężenia na tym kierunku jest równa 0, również jest zerowy. A zatem energetyczna niezależność stanów własnych, przy założeniu stowarzyszonego prawa płynięcia Levy'ego-Misesa skutkuje także niezależnością deformacji plastycznej na kierunkach stanów własnych od wpływu pozostałych składowych stanu naprężenia. Nie powinno to być zaskoczeniem — gęstość energii odkształcenia jest jak wiadomo potencjałem sprężystym. Dokonanie rozkładu głównego energii sprężystej i rozpatrywanie stanów odkształcenia i naprężenia w bazie stanów własnych jest równoważne z rozprzężeniem układu równań uogólnionego prawa Hooke'a. Wykorzystując zatem w charakterze potencjału plastycznego lekko tylko zmodyfikowaną gęstość energii sprężystej (z uwzględnieniem nieliniowości związków konstytutywnych dla plastyczności, jednocześnie bez mieszania wpływu stanów własnych) także i związki fizyczne dla przyrostów odkształceń plastycznych wyrażać się muszą niezależnymi od siebie równaniami.

Zasadniczo specyfikacji kryterium dokonać można bazując przede wszystkim na wynikach dwóch najprostszych prób wytrzymałościowych, tj. obciążenia jednoosiowego oraz czystego ścinania, przy czym mogą one być wykonywane dla różnych orientacji próbek. Szczególne znaczenie mają takie orientacje, dla których zanika wpływ co najmniej jednego rzutów na podprzestrzenie analizowanego rozkładu.

W przypadku obciążeń jednoosiowych o wartości σ jedyną orientacją osi próbki, dla której znika wpływ podprzestrzeni ścinań jest orientacja pokrywająca się z kierunkiem walcowania (φ = 0°) lub z kierunkiem do niego prostopadłym (φ = 90°). Wtedy

$$\begin{array}{ll} \sigma_1(\varphi = 0°) = \sigma\cos\aleph & \sigma_1(\varphi = 90°) = \sigma\sin\aleph \\ \sigma_2(\varphi = 0°) = -\sigma\sin\aleph & \sigma_2(\varphi = 90°) = \sigma\cos\aleph \\ \sigma_3(\varphi = 0°) = 0 & \sigma_3(\varphi = 90°) = 0. \end{array}$$

Istnieje także orientacja, dla której zanika wpływ jednego ze stanów własnych z podprzestrzeni niedewiatorowych, co upraszcza wyznaczenie całkowitego wpływu drugiego z nich. Zajść może tylko jeden z poniższych przypadków (nigdy obydwa dla danego materiału), przy czym można pokazać, że zależy to tylko i wyłącznie od znaku współczynnika Poissona.
Wpływ drugiego stanu własnego zanika dla obciążenia jednoosiowego σ pod kątem $\varphi = \mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{tg}\aleph}$ ($\mathrm{tg}\aleph > 0 \Leftrightarrow \nu_0 < 0$) do kierunku walcowania

$$\sigma_1 = k_1 = \frac{\sigma}{\cos\aleph + \sin\aleph} \qquad \sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \sigma\frac{\sqrt{2\cos\aleph \cdot \sin\aleph}}{\cos\aleph + \sin\aleph} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{f}_1(k_1) = 1 - \frac{k_1^2}{k_s^2}\cos\aleph \cdot \sin\aleph$$

Wpływ pierwszego stanu własnego zanika dla obciążenia jednoosiowego σ pod kątem $\varphi = \mathrm{arcctg}\sqrt{-\mathrm{tg}\aleph}$ ($\mathrm{tg}\aleph < 0 \Leftrightarrow \nu_0 > 0$) do kierunku walcowania

$$\sigma_1 = 0 \quad \sigma_2 = k_2 = \frac{\sigma}{\cos\aleph - \sin\aleph}$$

$$\sigma_3 = \sigma\frac{\sqrt{-2\cos\aleph \cdot \sin\aleph}}{\cos\aleph - \sin\aleph} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{f}_2(k_2) = 1 + \frac{k_2^2}{k_s^2}\cos\aleph \cdot \sin\aleph$$

W przypadku testów ścinania, jedyną orientacją, dla której zanika wpływ naprężeń należących do podprzestrzeni niedewiatorowych, jest orientacja, w której kierunki ścinania pokrywają się z kierunkiem walcowania i kierunkiem do niego prostopadłym. Szczególną jednak orientacją jest również ta wyznaczona przez kierunki równo nachylone do kierunku symetrii materiału (φ = 45°) — zanika wtedy wpływ rzutu naprężenia na podprzestrzeń ścinań

$$\sigma_1 = \tau(\sin\aleph - \cos\aleph) \quad \sigma_2 = \tau(\sin\aleph + \cos\aleph) \quad \sigma_3 = 0$$

Symetria kwadratu

Rozkład spektralny tensora sztywności/podatności o symetrii kwadratu

W szczególnym przypadku, gdy właściwości mechaniczne materiału są identyczne w dwóch prostopadłych kierunkach lecz różne od pozostałych par kierunków, wtedy mamy do czynienia z symetrią kwadratu — odpowiada to ortotropii z wartością parametru $\mathrm{tg}\aleph = -1$. Przyjmijmy, że te wyróżnione kierunki pokrywają się z osiami x i y przyjętego układu współrzędnych. Z rozkładu widmowego tensora sztywności otrzymujemy

— jednowymiarową podprzestrzeń płaskich stanów hydrostatycznych
  z modułem Kelvina $\lambda_1 = \dfrac{E}{1-\nu}$ oraz unormowanym stanem własnym $\boldsymbol{\omega}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$,
— jednowymiarową podprzestrzeń czystych ścinań pod kątem 45° do osi symetrii
  z modułem Kelvina $\lambda_2 = \dfrac{E}{1+\nu}$ oraz unormowanym stanem własnym $\boldsymbol{\omega}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$,
— jednowymiarową podprzestrzeń czystych ścinań równolegle i prostopadle do osi symetrii
  z modułem Kelvina $\lambda_3 = 2G$ oraz unormowanym stanem własnym $\boldsymbol{\omega}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

Specyfikacja kryterium stanu granicznego dla symetrii kwadratu

Pierwsza podprzestrzeń jest jednowymiarowa, zatem (podobnie jak w poprzednim przypadku) odpowiadające jej funkcja wpływu zależeć będzie jedynie od miary rzutu stanu naprężenia na tę podprzestrzeń, tj. od miary naprężenia hydrostatycznego *p*. Pozostałe dwie podprzestrzenie są jednowymiarowymi podprzestrzeniami czystych ścinań, zatem funkcje wpływu redukują się do stałych parametrów. Ostatecznie kryterium stanu granicznego możemy zapisać w postaci

$$f_p(p)\cdot p^2 + \frac{\tau_{45}^2}{k_{s45}^2} + \frac{\tau^2}{k_s^2} = 1$$

gdzie

$p = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$ $\tau_{45} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)$ $\tau = \tau_{xy}$, zaś k_s i k_{s45} oznaczają graniczne naprężenia styczne przy obciążeniu próbki odpowiednio równolegle (bądź prostopadle) oraz pod kątem 45° do kierunków wyróżnionych.

Wartości funkcji wpływu ciśnienia można wyznaczyć przeprowadzając eksperymenty w jednoosiowym stanie naprężenia przy różnych orientacjach próbki względem kierunków wyróżnionych — dla dowolnego kierunku danego kątem φ, mierzonym od dowolnego z dwóch prostopadłych kierunków wyróżnionych

$$f_p\left(\frac{k_\varphi}{2}\right) = \frac{4}{k_\varphi^2} - \frac{\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)^2}{k_{s45}^2} - \frac{4(\cos\varphi\cdot\sin\varphi)^2}{k_s^2}$$

gdzie

k_φ — oznacza graniczne naprężenie osiowe przy rozciąganiu/ściskaniu pod kątem φ do kierunków wyróżnionych.

Jeśli przyjąć funkcję wpływu naprężenia hydrostatycznego za Burzyńskim [3], tj. funkcję wymierną o ogólnej postaci

$$f_p(p) = A + \frac{B}{p}$$

gdzie

A i B są pewnymi stałymi parametrami materiałowymi, wtedy stałe te można wyrazić poprzez wartości granicznych naprężeń przy ściskaniu, rozciąganiu i ścinaniu. Funkcja wpływu naprężenia hydrostatycznego przyjmuje wtedy postać

$$f_p(p) = \left[\frac{4}{k_c k_r} - \frac{1}{k_{s45}^2}\right] + \frac{2}{p}\cdot\frac{(k_c - k_r)}{k_c k_r}$$

gdzie

k_c i k_r — oznaczają odpowiednio graniczne naprężenie ściskające i rozciągające na kierunkach wyróżnionych w materiale.

Płaska izotropia

Rozkład spektralny izotropowego tensora sztywności / podatności

Izotropia w przypadku zagadnienia płaskiego może być utożsamiana albo z ciałem całkowicie izotropowym obciążonym w dowolnej płaszczyźnie albo też z ciałem transwersalnie izotropowym obciążonym w płaszczyźnie prostopadłej do wyróżnionej osi symetrii. Z płaską izotropią mamy do czynienia w szczególnym przypadku symetrii kwadratu, gdy dodatkowo spełniony jest warunek

$$\lambda_2 = \lambda_3 \quad \Leftrightarrow \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Z rozkładu widmowego tensora sztywności otrzymujemy:

- jednowymiarową podprzestrzeń płaskich stanów hydrostatycznych

  z modułem Kelvina $\lambda_1 = \dfrac{E}{1-\nu}$ oraz unormowanym stanem własnym $\boldsymbol{\omega}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

- dwuwymiarową podprzestrzeń ścinań

  z modułem Kelvina $\lambda_2 = 2G = \dfrac{E}{1+\nu}$

  oraz unormowanym stanem własnym

  $\boldsymbol{\omega}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$

Druga podprzestrzeń własna płaskiego izotropowego tensora podatności jest podprzestrzenią wielowymiarową, stąd odpowiada jej nieskończenie wiele kierunków stanów własnych — bazę ortonormalną mogą stanowić dowolne dwa stany odpowiadające parametrom θ_1 i θ_2 spełniającym warunek $\theta_1 - \theta_2$ = 90°. Kąt θ = 90° odpowiada czystemu ścinaniu w kierunkach równoległych do osi przyjętego układu współrzędnych, zaś $\theta = 0°$ odpowiada ścinaniu w kierunkach nachylonych pod kątem 45° do osi przyjętego układu.

Specyfikacja kryterium stanu granicznego dla izotropii

Charakter funkcji wpływu naprężenia hydrostatycznego jest analogiczny jak w przypadku omówionym uprzednio. Funkcja wpływu naprężeń stycznych zależeć powinna od niezmienników rzutu stanu naprężenia na podprzestrzeń czystych ścinań. Przyjmujemy, iż zasadniczą miarą wpływu naprężenia stycznego jest jego norma, którą można wyrazić poprzez naprężenie dewiatorowe. O ile wielkość ta jest miarą ilościową wpływu naprężenia, o tyle parametr θ dokonuje rozróżnienia jakościowego różnych stanów ścinania należących do tej samej podprzestrzeni — słuszne jest zatem, aby przyjąć go za zmienną funkcji wpływu naprężenia dewiatorowego. Ostatecznie możemy więc napisać

$$\eta_p(p)\cdot p^2 + \eta_f(\theta)\cdot \mathrm{q}^2 = 1$$

gdzie

naprężenie hydrostatyczne jest równe $p = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$, zaś naprężenie dewiatorowe jest równe $\mathrm{q} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$.

Ogólniejszy przypadek przestrzenny omawianego kryterium stanu granicznego dla materiałów izotropowych przedstawiony został w [7], zaś jego specyfikacja dla wybranego materiału na podstawie danych doświadczalnych dostępnych w literaturze zaprezentowana została w [8].

W rzeczywistości w przypadku płaskim, nie da się dokonać istotnego rozróżnienia między stanami ścinania odpowiadającymi różnym wartościom parametru θ. Z uwagi na możliwość dowolnego obrotu układu współrzędnych w przypadku izotropowym, wszystkie te stany są sobie równoważne, będąc czystymi ścinaniami, zatem warunek graniczny można zapisać w postaci

$$\eta_p(p)\cdot p^2 + \frac{\mathrm{q}^2}{k_s^2} = 1$$

gdzie

k_s jest granicznym naprężeniem stycznym. Trzeba jednak zwrócić uwagę, iż w przypadku przestrzennym, pięciowymiarowa podprzestrzeń ścinań nie składa się wyłącznie ze stanów czystego ścinania i konieczne jest uwzględnienie różnego ich charakteru poprzez zastosowanie odpowiedniej funkcji wpływu. Parametrem rozróżniającym te stany jest wtedy kąt Lodego czy też w ogólności trzeci niezmiennik dewiatora naprężenia [7, 8].

Podsumowanie

Zaproponowano nowe kryterium stanu granicznego dla anizotropowych materiałów sprężystych wykazujących asymetrię zakresu sprężystego w przypadku płaskiego stanu naprężenia. W artykule przedstawiono propozycję metody pozyskiwania danych doświadczalnych do specyfikacji kryterium z prób jednoosiowego rozciągania lub ściskania oraz z prób ścinania próbek wyciętych z arkusza blachy, przy różnej orientacji geometrii próbek względem kierunków wyróżnionych w materiale — kierunku walcowania oraz kierunku do niego prostopadłego.

Literatura

1. *Banabic D.:* Sheet metal forming processes, constitutive modelling and numerical simulation. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg 2010.

2. *Rychlewski J.:* Razlozheniya uprugoi energii i kriterii predelnosti. Uspehi mehaniki, 1984, nr 7, s. 51÷80; także tłum. angielskie: Elastic energy decomposition and limit criteria, Engn. Trans., 2011, t. 59, nr 1, s. 31÷63.

3. *Burzyński W.:* Studium nad hipotezami wytężenia. Akademia Nauk Technicznych, Lwów, 1928, także: Selected passages from Włodzimierz Burzyński's doctoral dissertation "Study on material effort hypotheses". Engng Trans, 2009, t. 57, nr 3-4, s. 185÷215.

4. *Ostrowska-Maciejewska J.:* Podstawy i Zastosowania Rachunku Tensorowego. Prace IPPT 1/2007, IPPT PAN, Warszawa 2007.

5. *Blinowski A., Ostrowska-Maciejewska J., Rychlewski J.:* Two-dimensional Hooke's tensors — isotropic decomposition, effective symmetry criteria. Arch. Mech., 1996, t. 48, nr 2, s. 325÷345.

6. *Ostrowska-Maciejewska J., Pęcherski R. B.:* Anizotropia sprężysta i wytężenie cienkich warstw i powłok. IMIM PAN w Krakowie i IPPT PAN w Warszawie, Orekop s.c., Kraków, 2006.

7. *Nowak M., Ostrowska-Maciejewska J., Pęcherski R. B., Szeptyński P.:* Yield criterion accounting for the third invariant of stress tensor deviator. Part I. Derivation of the yield condition basing on the concepts of energy-based hypotheses of Rychlewski and Burzyński, Engng. Trans., 2011, t. 59, nr 4.

8. *Pęcherski R. B., Szeptyński P., Nowak M.:* An extension of Burzyński hypothesis of material effort accounting for the Lode angle effect, Arch Metall Mat, 2011, t. 56, nr 2, s. 503÷508.

Praca została przygotowana w ramach dwóch projektów badawczych: NN 501 1215 36 oraz NN 507 2311 40 Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

TADEUSZ KNYCH
BEATA SMYRAK
MONIKA WALKOWICZ

Rudy Metale R57 2012 nr 4
UKD 621.311.3:621.315.2:
:669-147:669.377.669.34

CHARAKTERYSTYKA CECH MATERIAŁOWYCH I TECHNOLOGICZNYCH MIEDZI BEZTLENOWEJ DEDYKOWANEJ DO APLIKACJI KABLOWYCH

Dokonująca się w ostatnich latach na świecie ekspansja przemysłu metalurgicznego ściśle związanego z hutnictwem, a także rozwój metod doświadczalnych fizyki ciała stałego determinują wejście na rynek elektroniczny i elektrotechnicznych nowych gatunków miedzi o coraz to wyższym poziomie własności użytkowych. Jednym z takich materiałów jest miedź beztlenowa OFE (Oxygen Free Electronic Copper), która z uwagi na brak obecności tlenków (CuO, Cu_2O) stwarza nowe możliwości kształtowania własności fizycznych, technologicznych i eksploatacyjnych — niezbędnych do zastosowań w różnych gałęziach przemysłu elektrotechnicznego. Ponadto z uwagi na proces produkcji wykonywany techniką ciągłego odlewania materiał charakteryzuje się specjalnie ukształtowaną strukturą ziaren umożliwiającą podniesienie przewodności elektrycznej. W przypadku aplikacji miedzi beztlenowej w konstrukcjach kablowych (m.in.: przewody teleinformatyczne przesyłu danych, dźwięku i obrazu) odgrywa to kluczowe znaczenie, ponieważ pozwala na istotne oszczędności materiałowe i ekonomiczne w porównaniu do tradycyjnie stosowanej na cele elektryczne miedzi tlenowej ETP (Electrolytic Tough Pitch Copper). Przykładem przemysłowej technologii wytwarzania miedzi beztlenowej jest metoda UPCAST®, która uruchomiona została w Zakładzie Przetwórczym Huty Miedzi Cedynia w Orsku. Zastosowane parametry procesu technologicznego (m.in.: prędkość odlewania, ilość wody chłodzącej krystalizator) decydują o jakości wyrobów tj. drutów uzyskiwanych metodami przeróbki plastycznej zarówno na zimno, jak i na gorąco. Oprócz tego istotną rolę odgrywa jakość materiałów wsadowych do procesu ciągłego topienia, którymi są katody gatunku Cu-CATH-1 (LME Grade-A) charakteryzujące się wysoką czystością

Prof. dr hab. inż. Tadeusz Knych, dr inż. Beata Smyrak, mgr inż. Monika Walkowicz — AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Metali Nieżelaznych, Katedra Przeróbki Plastycznej i Metaloznawstwa Metali Nieżelaznych, 30-059 Kraków, al. Mickiewicza 30.