

ZASTOSOWANIE METODY KOLEJNYCH ROZWIĄZAŃ SPRĘŻYSTYCH
DO ELASTOOPTYCZNEGO BADANIA OŚRODKA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEGO
Z OTWOREM WALCOWYM¹

JERZY LIETZ, BOGDAN MICHAŁSKI, RYSZARD WOJNAR (WARSZAWA)

1. Analiza zagadnienia i wybór metody

Rozpatrywany jest stan naprężenia i odkształcenia w otoczeniu otworu walcowego o dowolnej tworzącej w nieograniczonym ośrodku sprężysto-plastycznym. W ośrodku tym w oddaleniu od otworu panuje jednorodny stan naprężenia, taki że na konturze otworu przekroczona jest granica plastyczności. Sformułowanie to wywodzi się z zagadnienia mechaniki górotworu, w którym chodzi o wyznaczenie naprężeń i odkształceń wokół wyrobiska górniczego.

To trójwymiarowe zadanie przy znacznej długości otworu w stosunku do jego przekroju daje się sprowadzić do zagadnienia płaskiego stanu odkształcenia. Autorzy podejmują próbę doświadczalnego rozwiązania tego zadania metodą elastooptyczną.

W zakresie liniowej sprężystości problemy płaskiego stanu odkształcenia modeluje się elastooptycznie za pomocą modelu tarczowego, a więc w płaskim stanie naprężenia. Obraz elastooptyczny jest, jak wiadomo, w obu wypadkach taki sam.

W zakresie odkształceń plastycznych nie można natomiast modelem tarczowym wykonanym z materiału sprężysto-plastycznego odwzorować płaskiego stanu odkształcenia, zwłaszcza gdy oba naprężenia główne są tego samego znaku. Nie będą bowiem spełnione warunki w odniesieniu do kryteriów uplastycznienia.

Wobec tego, że stosowane dotychczas polaryzacyjno-optyczne sposoby badania ciał sprężysto-plastycznych nie nadają się do analizy płaskiego stanu odkształcenia postanowiono użyć tzw. metody kolejnych rozwiązań sprężystych, która, jak wykazemy w następnym rozdziale, stwarza takie możliwości. Metodę tę podali Aleksandrow i Achmetzjanow [1], [3], stosując ją do rozwiązania zadania jednowymiarowego (czyste zginanie belki). W niniejszej pracy rozwinięto tę metodę na problemy dwuwymiarowe, podając zarówno teorię jak i technikę prowadzenia badań.

Metoda kolejnych rozwiązań sprężystych, której istotą jest zastąpienie ośrodka sprężysto-plastycznego przez ośrodek liniowo-sprężysty niejednorodny, umożliwia użycie dwuwymiarowego modelu tarczowego do odwzorowania płaskiego stanu odkształcenia w zakresie sprężysto-plastycznym. Ponadto uniezależnia ona badacza od charakterystyki

¹⁾ Praca stanowi rozszerzenie referatu przedstawionego na VIII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego

mechanicznej materiału modelowego, pozwalając przyjmować dowolną (ale monotoniczną) zależność naprężeń od odkształceń w obiekcie.

Ujemną stroną metody jest znaczna pracochłonność oraz to, że realizowany ciąg rozwiązań sprężystych odnosi się do jednej wybranej wartości stosunku obciążenia do granicy plastyczności. Można zatem określić granicę strefy uplastycznienia oraz pole odkształceń sprężysto-plastycznych dla danych warunków obciążenia. Trudniej natomiast jest analizować propagację granic strefy uplastycznienia przy zmieniającym się obciążeniu.

2. Metoda rozwiązań sprężystych

Rozwiązanie zadania plastyczności możemy sprowadzić do rozwiązania ciągu zadań liniowej sprężystości w ośrodku niejednorodnym, w którym niejednorodność jest zmieniana w kolejnych rozwiązaniach.

W wersji zaproponowanej przez Birgera [2], wykorzystuje się spostrzeżenie, iż w ramach deformacyjnej teorii plastyczności związek konstytutywny dla ośrodka odkształconego w zakresie plastycznym daje się formalnie zapisać w postaci analogicznej do prawa Hooke'a

$$(1) \quad e_{ij} = \frac{1}{2G^*} s_{ij}, \quad \varepsilon_{kk} = \frac{1}{\kappa} \sigma_{kk},$$

gdzie e_{ij} oraz s_{ij} są odpowiednio dewiatorami tensora odkształceń ε_{ij} , $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk} \delta_{ij}/3$ oraz tensora naprężeń σ_{ij} , $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij}/3$. κ jest modułem ściśliwości a nieliniowość związku zawiera się we współczynniku

$$(2) \quad G^* = G_0/\psi,$$

gdzie G_0 jest modułem ścinania w zakresie liniowo-sprężystym. Wielkość

$$(3) \quad \psi = G_0 \gamma_i / \tau_i$$

wyraża się przez stałą G_0 oraz niezmienniki dewiatorów e_{ij} , s_{ij} tzw. intensywności odkształceń

$$(4) \quad \gamma_i = \sqrt{2e_{ij}e_{ij}},$$

i naprężeń

$$(5) \quad \tau_i = \sqrt{\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}}.$$

Dla określonego zadania brzegowego w ośrodku sprężysto-plastycznym ψ jest w ogólności funkcją położenia $X_i(x, y, z)$ posiadającą tę własność, że $\psi = 1$ ($G^* = G_0$) w obszarze odkształceń liniowo sprężystych a $\psi > 1$ ($G^* < G_0$) poza tym obszarem. Funkcja

$$(6) \quad G^*(x, y, z) = G_0/\psi$$

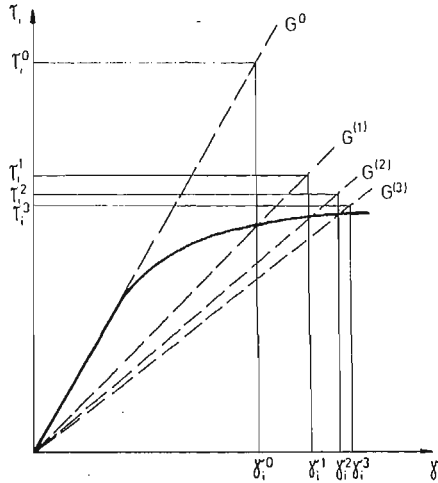
określa zatem rozkład modułu ścinania w niejednorodnym ośrodku liniowo sprężystym, w którym dla określonego zadania brzegowego pola naprężeń i odkształceń są takie same, jak w ośrodku sprężysto-plastycznym.

Związki (1 - 6) umożliwiają rozwiązanie zadania nieliniowego (plastyczności) drogą iteracji rozwiązań liniowych (sprężystości). Otóż zakłada się, że znana jest charakterystyka ośrodka

$$(7) \quad \tau_i = \tau_i(\gamma_i).$$

Wtedy proces kolejnych przybliżeń może być następujący:

Kładąc w zerowym przybliżeniu $\psi = 1$ rozwiązujemy zadanie teorii sprężystości, znajdując pole naprężeń σ_{ij}^0 i odkształceń ε_{ij}^0 . Na podstawie pola ε_{ij}^0 znajdujemy niezmiennik γ_i^0 , skąd na podstawie krzywej $\tau_i(\gamma_i)$ określamy moduł sprężystości $G^{(1)} = G^{(1)}(x, y, z)$, potrzebny do następnego przybliżenia, jako tangens pochylenia stycznej (rys. 1).



Rys. 1

W następnym przybliżeniu rozwiązujemy liniowe zadanie sprężystości dla ośrodka niejednorodnego z modułem sprężystości $G^{(1)}$, określonym w pierwszym przybliżeniu. Znajdujemy pole naprężeń $\sigma_{ij}^{(1)}$ i odkształceń $\varepsilon_{ij}^{(1)}$, następnie analogicznie $\gamma_i^{(1)}$ i nowy moduł $G^{(2)}$ do następnego przybliżenia itd. Procedurę kończymy z chwilą uzyskania zadowalającego przybliżenia tzn., gdy dalsze przyrosty γ_i są już dostatecznie małe.

Istotą metody jest więc analogia między rozkładem naprężenia w ośrodku plastycznym a stanem naprężenia w niejednorodnym ośrodku sprężystym. Rysunek 1 pokazuje schematycznie sposób określenia modułu sprężystości w danym punkcie ośrodka w kolejnych iteracjach.

Problem zbieżności metody rozwiązań sprężystych był rozważany w pracach (4) i (5).

Znajdowanie kolejnych rozwiązań może odbywać się oczywiście w różny sposób, analityczny, numeryczny bądź analogowy. W tym ostatnim wypadku możemy zastosować, jak na to zwrócił uwagę Achmetzjanow, metodę elastooptyczną.

W płaskim stanie odkształcenia, jaki rozpatrujemy w niniejszej pracy, przy $\nu = 1/2$ wyrażenia (4 i 5) upraszczają się do postaci

$$(7) \quad \gamma_i = 2(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_{xy}^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$(8) \quad \tau_i = \frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}]^{\frac{1}{2}}.$$

Wyrażając (8) za pomocą naprężeń głównych σ_1, σ_2 otrzymujemy

$$(9) \quad \tau_i = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \tau_{\max}.$$

Z równania (9) wynika, że ponieważ $\tau_i = \tau_{\max}$, kryteria plastyczności Hubera, Misesa i Treski pokrywają się. Przy $\nu < \frac{1}{2}$ równanie (9) jest przybliżone.

Ponieważ zadanie opisane w rozdziale 1 modelujemy za pomocą tarczy z materiału elastooptycznego, widzimy, że izochromy można traktować jako linie $\tau_i = \text{const}$, gdyż z prawa Wertheima

$$(10) \quad Km = (\sigma_1 - \sigma_2)h,$$

gdzie m jest rzędem izochromy, K — stałą elastooptyczną, h — grubością modelu.

Warto zaznaczyć, że obraz elastooptyczny w modelu nie zależy tu od współczynnika Poissona, ani od tego, że płaski stan odkształcenia zastąpiliśmy płaskim stanem naprężenia.

Ze względu na technologię wykonania modelu, niejednorodny ośrodek sprężysty o ciągłym rozkładzie modułu G , o jakim była mowa powyżej, zastępujemy przez ośrodek niejednorodny skokowo, samą zaś niejednorodność ośrodka modelujemy przez odpowiednią zmianę jego grubości. Im większa jest liczba stopni i im są one mniejsze, tym lepiej ośrodek niejednorodny w sposób ciągły przybliżony jest przez ośrodek niejednorodny skokowo.

Badając tarczowy model elastooptyczny o zmiennej grubości h (symetryczny względem płaszczyzny środkowej $z = 0$) bierzemy pod uwagę, że rząd izochromy wynika z naprężeń scałkowanych po grubości, które oznaczamy przez $\bar{\sigma}$

$$(11) \quad \bar{\sigma} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma dz = \sigma_{sr} \cdot h \left[\frac{\text{N}}{\text{cm}} \right].$$

Równanie (10) można teraz wyrazić w postaci nie zawierającej zmiennej h

$$(12) \quad Km = \bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2.$$

Korzystając z równania (12) analizujemy elastooptycznie pole naprężeń $\bar{\sigma}$ tak, jak gdyby model miał stałą grubość h_0 . Zmiany grubości modelują zmienny moduł G , który wyraża się jako

$$(13) \quad G = G_0 \frac{h}{h_0}.$$

W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy ośrodek sprężysto-idealnie plastyczny. Wynikają z tego pewne uproszczenia w badaniu elastooptycznym, gdyż w końcowym etapie kolejnych przybliżeń:

1. Granicę strefy uplastycznienia wyznacza izochroma określonego rzędu odpowiadająca $\tau_{\max} = k$, gdzie k jest granicą plastyczności na ścinanie.
2. Wewnątrz strefy uplastycznienia rząd izochromy powinien być stały, co daje łatwą kontrolę poprawności wyniku.

3. W obszarze uplastycznienia zmienna grubość modelu h określa pole odkształceń postaciowych γ_i gdyż

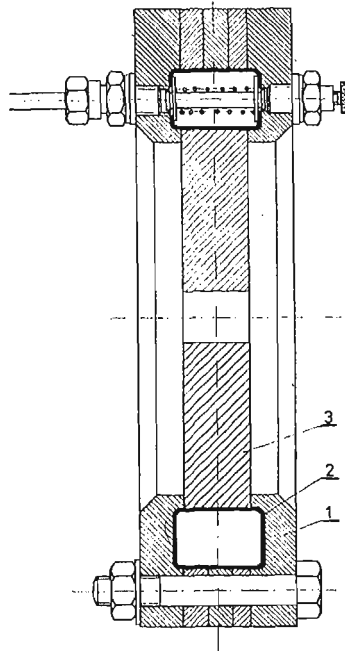
$$(14) \quad \gamma_i = \frac{\tau_i}{G} = \frac{k}{G_0} \frac{h_0}{h} = \gamma_{is} \frac{h_0}{h},$$

gdzie γ_{is} jest wartością γ_i na granicy plastyczności. Składowa plastyczna odkształcenia wyniesie

$$(15) \quad \gamma_{ip} = \gamma_i - \gamma_{is} = \gamma_{is} \left(\frac{h_0}{h} - 1 \right).$$

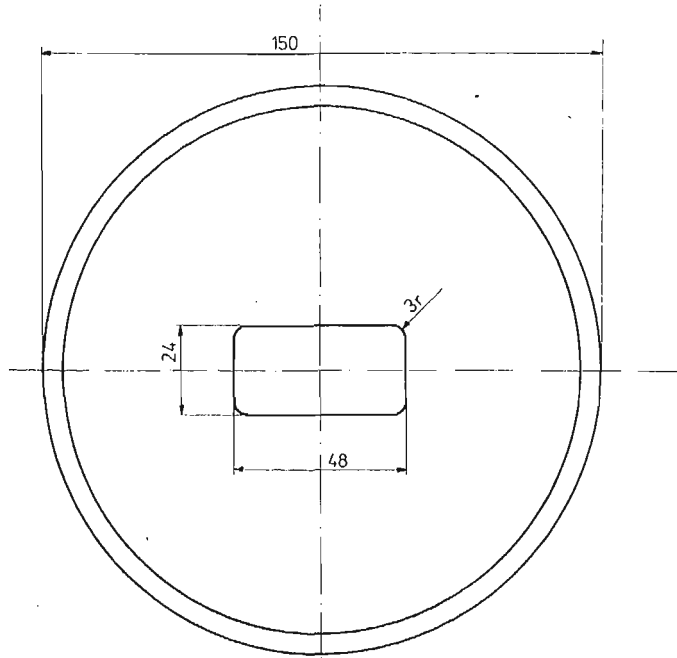
3. Przeprowadzenie badania

Realizując założenia podane w rozdziale 1 tarczę modelu trzeba było obciążyć na obwodzie w taki sposób, aby przed wykonaniem otworu w modelu wystąpił jednorodny stan naprężenia. Przyjęto dla uproszczenia wszechstronne ściskanie a więc $\sigma_1 = \sigma_2$. Można wówczas wykonać model w kształcie tarczy kołowej i obciążyć go na obwodzie

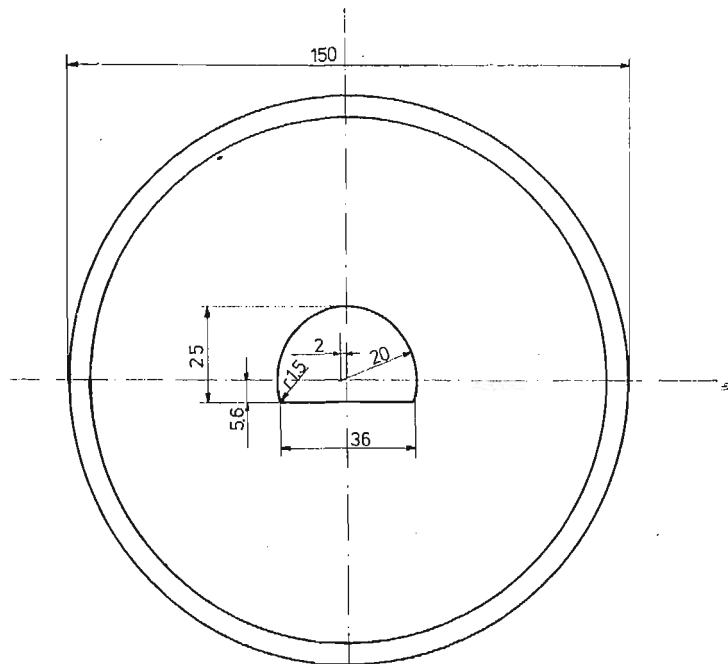


Rys. 2

równomiernym ciśnieniem za pomocą urządzenia hydraulicznego przedstawionego na rys. 2. W stalowej pierścieniowej obudowie 1 znajduje się gumowa dętka 2 przekazująca ciśnienie cieczy na model 3.



Rys. 3

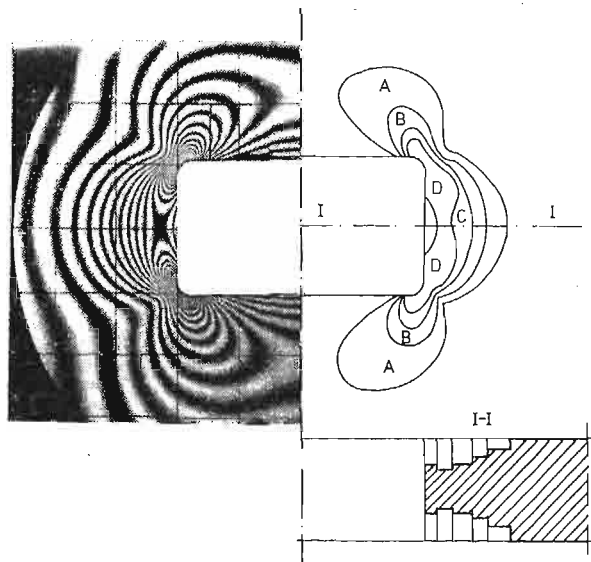


Rys. 4

Kolejność czynności przy badaniu modelu z otworem była następująca. Sporządzono modele w postaci dość grubej (20 mm) tarczy kołowej z otworem o rozpatrywanym kształcie, wyznaczając uprzednio elastoptyczną stałą modelową.

Zbadano dwa modele: z otworem prostokątnym o stosunku boków 2:1 (rys. 3) i z otworem w kształcie typowej obudowy górniczej ŁP-9 (rys. 4).² Założono, że ośrodek jest sprężysto-idealnie plastyczny.

Za pomocą urządzenia hydraulicznego obciążono model ciśnieniem na obwodzie i badano w polaryskopie. Otrzymano wyniki elastoptyczne (izochromy i izokliny) odnoszące się do pola naprężeń przy liniowo-sprężystej charakterystyce ośrodka. Przyjęto je jako „zerowe” przybliżenie rozwiązania.



Rys. 5

Określono rząd izochromy, która stanowi pierwsze przybliżenie granicy strefy uplastycznienia.

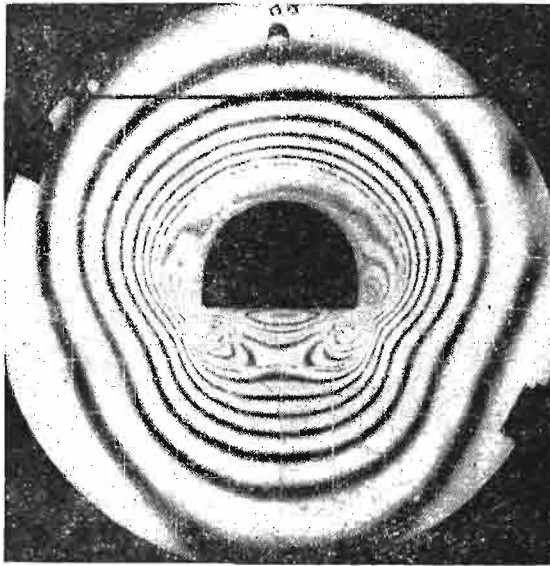
Przyjęto, że ciśnienie obciążające, które wynosi 5 MPa jest równe granicy plastyczności na ścisaniu $2k$. Uwzględniając zmierzoną stałą modelową 0,75 MPa/rz.iz. otrzymano w obu modelach granicę strefy uplastycznienia odpowiadającą izochromie rzędu 6,7. Wewnątrz tej strefy na podstawie rzędu izochromy określającego $\tau_i^{(0)}$ i $\gamma_i^{(0)}$ i danej krzywej $\tau_i(\gamma_i)$ wyznaczono rozkład wielkości G_i/G_0 , który wskazuje w jakim stosunku należy zmniejszyć grubość modelu do następnego badania.

Następnie opracowano program podcinania, uwzględniając warunki technologiczne tak, aby jak najlepiej zrealizować wymagany rozkład grubości. Stosowano obustronne frezowanie frezem palcowym dające warstwicowe (schodkowe) ścienianie modelu (rys. 5).

¹⁾ Autorzy zbadali także model z otworem o przekroju kołowym i porównali wyniki z rozwiązaniem teoretycznym (6).

W pewnych przypadkach można zrealizować skośną obróbkę modelu, co daje ciągłą niejednorodność modułu i na ogół lepsze przybliżenie.

Tak przygotowany model powtórnie badamy w polaryskopie, a otrzymane pole naprężeń τ_i i odkształceń γ_i stanowi pierwsze przybliżenie rozwiązania. Na jego podstawie opracowujemy program dalszego podcinania modelu, którego badanie elastoptyczne daje drugie przybliżenie rozwiązania. Powtarzamy tę procedurę kilkakrotnie aż do uzyskania zadowalającej dokładności. Obraz izochrom w modelu z otworem ŁP-9 w pierwszym przybliżeniu przedstawia rys. 6.



Rys. 6

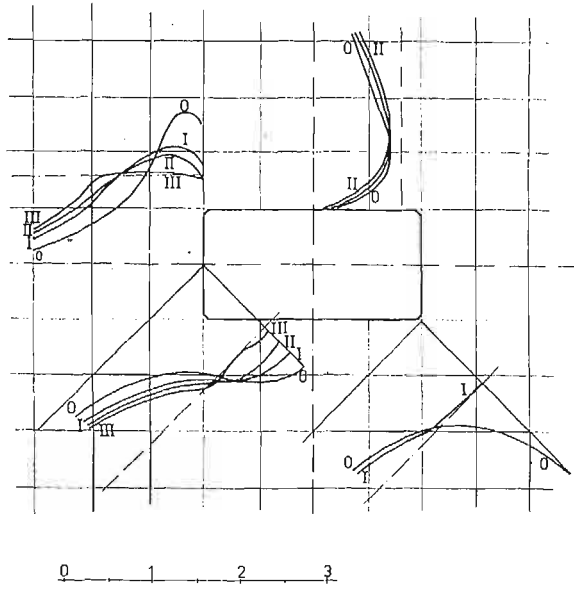
Sporządzono specjalne stanowisko obróbcze z szybkoobrotowym frezem palcowym. Model przytwierdzony do specjalnej płyty był ręcznie przesuwany według wytrasowanych na nim linii. Głębokość frezowania można było dokładnie nastawiać.

Przy badaniach elastoptycznych, w przypadku skośnie obrobionych powierzchni prześwietlonego modelu, w celu wyeliminowania załamania światła, stosowano pogrążenie modelu w odpowiednio dobranej cieczy immersyjnej. Ciecz znajdowała się pomiędzy okładzinami ze szkła organicznego uszczelnionymi względem modelu.

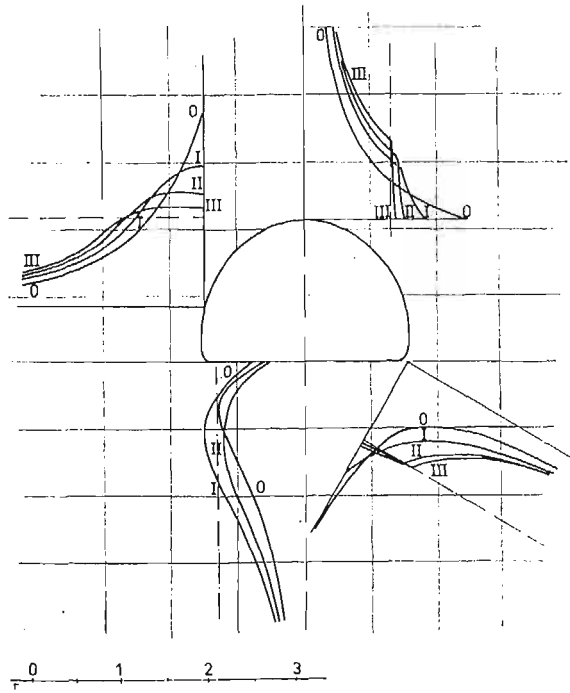
4. Wyniki badań i wnioski

W modelu z otworem prostokątnym zastosowano schodkowe podcinanie o dość znacznej liczbie schodków; 5 w pierwszym przybliżeniu i 6 w następnych przybliżeniach. W modelu z otworem ŁP-9 stosowano schodkowe podcinanie w pobliżu płaskiego spągu i skośne podcinanie w otoczeniu przesklepionego stropu, dające lepsze przybliżenie do rzeczywistego stanu odkształcenia w strefie uplastycznienia.

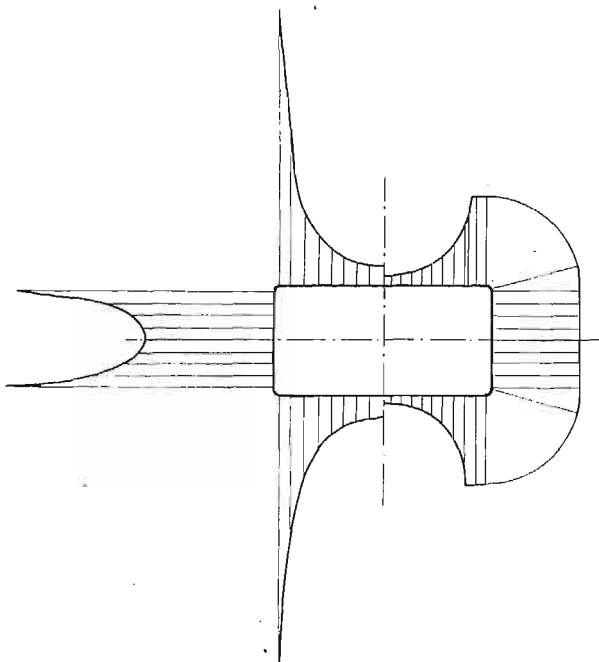
Na rysunku 5 widoczne są granice schodkowych odsadzek w modelu z otworem prostokątnym w pierwszym przybliżeniu.



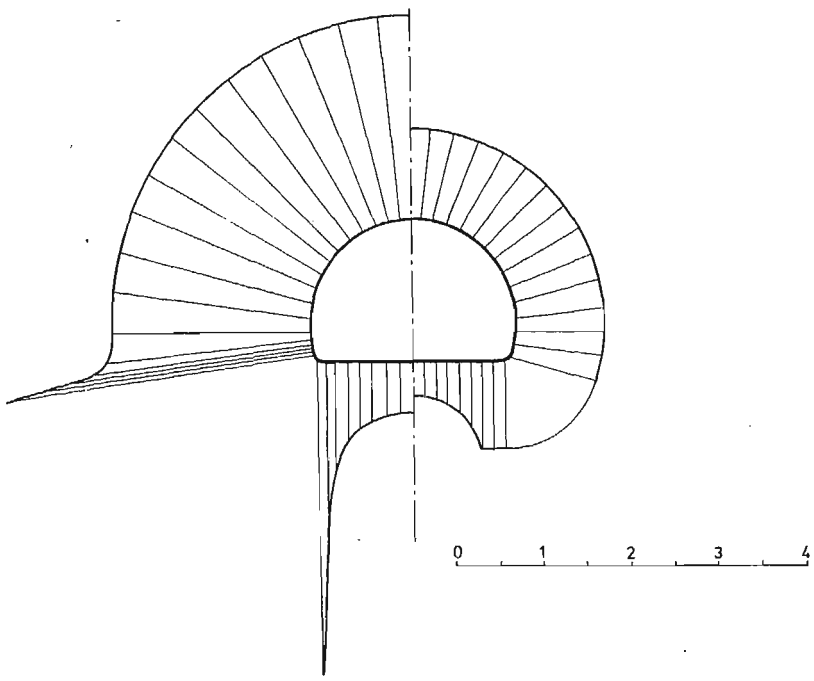
Rys. 7 .



Rys. 8

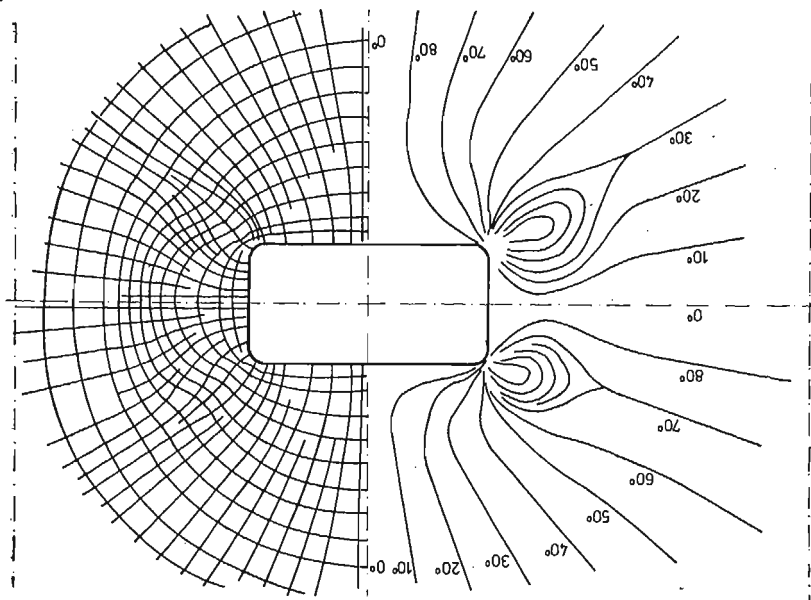


Rys. 9

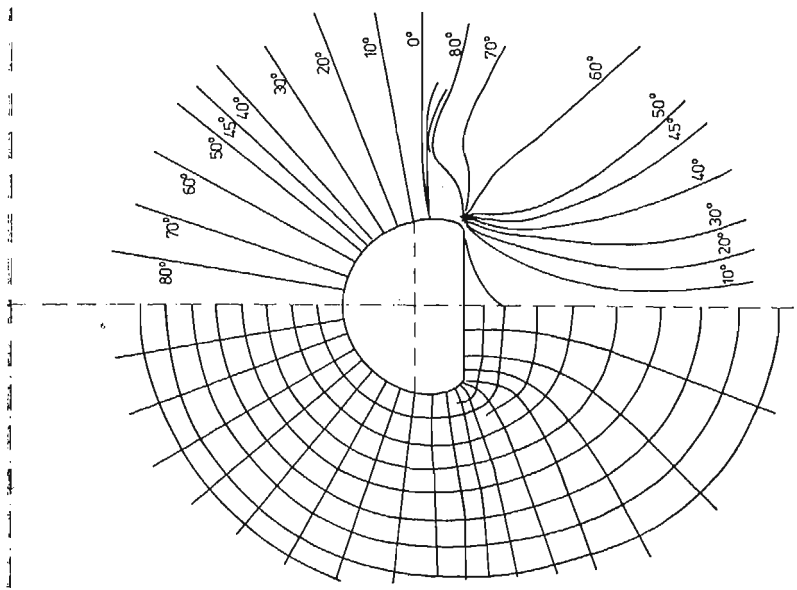


Rys. 10

[400]

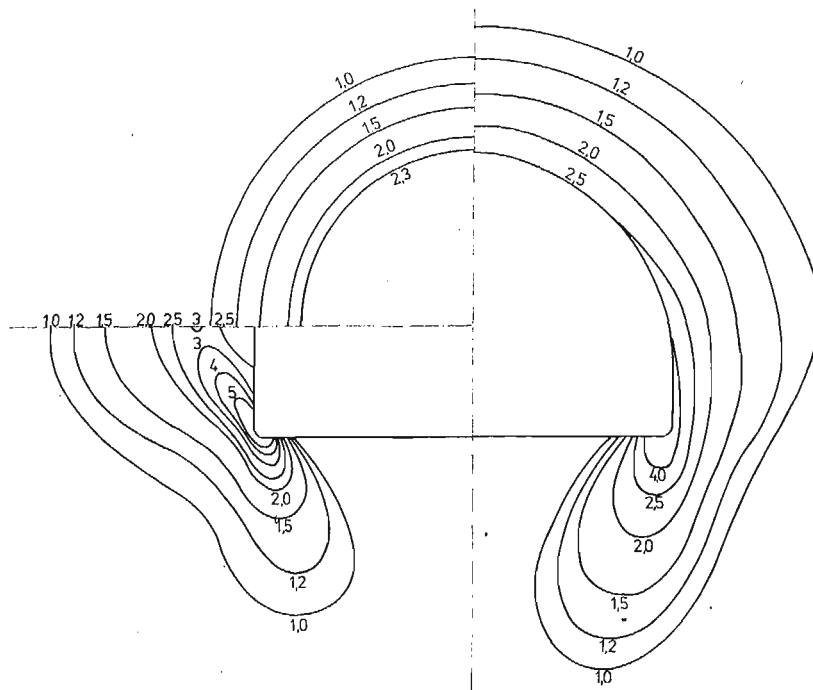


Rys. 11



Rys. 12

Dla kolejnych przybliżeń sporządzono dla obu modeli wykresy różnic naprężeń głównych w przekrojach charakterystycznych (rys. 7 i 8). Pozwalają one na ocenę stopnia zbieżności metody. Jak widać, iterację można zakończyć na trzecim przybliżeniu, w którym rozkład różnic naprężeń głównych jest już zbliżony do rozkładu dla ciała sprężysto-idealnie plastycznego. Rys. 9 i 10 przedstawiają porównanie rozkładu naprężeń brzegowych dla ciała sprężysto-plastycznego i sprężystego. Obraz izoklin i trajektorii naprężeń głównych (rys. 11 i 12) potwierdza, że na całym obwodzie otworu występują naprężenia ściskające.



Rys. 13

Wykorzystując wyniki ostatecznego przybliżenia dla modelu z otworem prostokątnym i w kształcie ŁP-9 oraz teoretyczne wyniki obliczeniowe dla otworu kołowego sporządzono zbiorczy wykres, przedstawiający w poszczególnych ćwiartkach porównanie pól odkształceń sprężysto-plastycznych w tych trzech przypadkach (rys. 13). Wymiary otworów przyjęto na rysunku takie, aby pola ich przekrojów poprzecznych była sobie równe. Rozkład odkształceń w obszarze uplastycznienia przedstawiono za pomocą linii $\gamma_i/\gamma_{is} = \text{const}$. Granicą strefy uplastycznienia jest linia oznaczona parametrem 1.

Przeprowadzone badania wykazały przydatność metody rozwiązań sprężystych do analizy stanu naprężenia i odkształcenia w ciałach sprężysto-plastycznych w zagadnieniach płaskiego stanu odkształcenia. Lepsze rezultaty uzyskuje się w przypadku elementów o płynnie zmieniającej się krzywiźnie konturów pozbawionych wklęsłych załamań. Metodę warto stosować do porównawczych badań elementów o zbliżonych kształtach. Wykorzystując znajomość rozkładu naprężeń dla podobnych kształtów można bowiem zmniejszyć liczbę iteracji, przyjmując za punkt wyjścia nie sprężysty stan naprężenia, lecz stan sprę-

żysto-plastyczny zbliżony do stanu poszukiwanego. Korzystną stroną metody jest to, że na podstawie ostatecznego grubościowego ukształtowania modelu można bezpośrednio wyznaczyć pole odkształceń sprężysto-plastycznych.

Literatura cytowana w tekście

1. A. J. ALEKSANDROW, M. CH. ACHMETZJANOV, *Polarozacjonno-optičeskie metody mechaniki deformirujemogo tela*, Izd. „Nauka”, Moskwa (1973).
2. I. A. BIRGER, *Nekotorye obščije metody rešenija zadač teorii plastičnosti*, P.M.M., **15**, (1951), 765 - 770.
3. M. CH. ACHMETZJANOV, w wydawnictwie „Polariz.-opt. metody issled. napriazhenij”, *Trudy V Vsesojuznoj konferencji*, Izd. WGU, Leningrad 1966.
4. D. L. BYKOV, V. A. SACNEV, *Prikl. Mech. i Mat.*, **33**, nr. 2, (1969), 290 - 298.
5. B. E. POBEDRIA, *O schodimosti metoda uprugich resenij v nelinejnoj viazkoprugosti*, D.A.N. SSSR. **195**, (1970), 307 - 310.
6. J. LIETZ, R. WOJNAR, B. MICHALSKI, *Elastoptyczne badanie ośrodka plastycznego z otworem walcowym, metodą kolejnych rozwiązań sprężystych*, VIII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, Warszawa (1978).

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ УПРУГИХ РЕШЕНИЙ К ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ОПТИЧЕСКИМ ИССЛЕДОВАНИЯМ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

В статье представлено применение метода последовательных упругих решений до фотоупругих исследований пластических сред. Изложены теоретические основы и лабораторная техника излагаемого метода. В случае плоского напряженного состояния полосы отвечают линиям интенсивности касательных напряжений.

В работе представлен метод определения напряженного состояния вокруг цилиндрической пустоты нерегулярного контура предложенным способом с использованием фотоупругих моделей. Определено напряженное состояние в характеристических сечениях вокруг пустоты в виде прямоугольника и в виде типичной горной разработки.

Результаты исследований доказывают, что метод упругих решений может быть успешно использован для определения напряженного состояния в упруго-пластических средах в условиях плоского деформированного состояния.

Summary

APPLICATION OF THE METHOD OF SUCCESSIVE ELASTIC SOLUTIONS TO PHOTOELASTIC INVESTIGATIONS OF AN ELASTO-PLASTIC MEDIUM WITH A CYLINDRICAL CAVITY

Paper presents an application of a method of elastic successive solutions to photoelastic investigation of a plastic medium. Theoretical foundations and experimental procedure of the proposed method are presented. In the case of the plane state of strain fringes correspond to the stress intensity lines. An attempt

to determine the state of stress around a generally irregular cylindrical cavity by means of the method of successive elastic solutions with the use of photoelastic models has been made. Stress distributions in characteristic sections around a rectangular cavity and a typical arched mining excavation have been determined. Test results prove that the method may be successfully used for the determination of the state of stress in two dimensional elastic-plastic media under plane strain conditions.

IPPT PAN
ZMOC

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 kwietnia 1979 r.
