

IDENTYFIKACJA OBCIĄŻEŃ DYNAMICZNYCH PRZY OGRANICZONEJ LICZBIE CZUJNIKÓW

BARTŁOMIEJ BŁACHOWSKI

*Smart Technology Centre, Instytut Podstawowych Problemów Techniki, PAN
e-mail: bblach@ippt.gov.pl*

Streszczenie. W pracy zaproponowane zostały dwie metody identyfikacji obciążeń w czasie rzeczywistym. Pierwsza z nich bazuje na estymacji obciążenia przy znajomości jego charakterystyki częstotliwościowej, natomiast druga korzysta jedynie z informacji o aktualnym stanie deformacji konstrukcji. Rozważania teoretyczne zilustrowane zostały obliczeniami numerycznymi na przykładzie belki swobodnie podpartej.

1. WPROWADZENIE

Identyfikacja, w czasie rzeczywistym, wymuszeń działających na układy dynamiczne jest ważnym problemem w wielu zagadnieniach inżynierskich. Do takich problemów zaliczamy monitorowanie stanu konstrukcji (*SHM-Structural Health Monitoring*) oraz konstrukcje z układami sterowania drganiami. W tym drugim przypadku znajomość działających na nie wymuszeń, mających często charakter losowy, pozwala na zaprojektowanie odpowiednich strategii sterowania. Kolejnym przykładem jest adaptacyjna bariera ochronna, dla której szybkie rozpoznanie stanu obciążeń pozwala na odpowiednią akcję łagodzącą skutki uderzenia. W wymienionych wyżej przykładach, bardzo często, nie jest możliwy bezpośredni pomiar obciążeń przez zastosowanie przetworników siły. Wtedy zadanie identyfikacji odbywa się na podstawie znajomości stanu deformacji układu, co sprowadza się do rozwiązania zadania odwrotnego.

W niniejszej pracy opisane powyżej zadanie odwrotne rozwiązane zostało przy użyciu obserwatorów wprowadzonych przez Luenbergera na początku lat 60. ubiegłego wieku. Początkowo obserwatory te wykorzystywane były w układach sterowania ze sprzężeniem zwrotnym do estymacji wektora stanu [1]. Spotkały się one z dużym zainteresowaniem ze strony praktyków ze względu na znaczną redukcję niezbędnego oprzyrządowania pomiarowego [2]. Obecnie wiele uwagi poświęca się równoczesnej estymacji wektora stanu układu i działających na niego wymuszeń przy modelach zarówno liniowych jak i nieliniowych [3], [4].

W celu identyfikacji obciążenia działającego na układ mechaniczny w pracy zastosowano dwa podejścia. Pierwsze bazuje na estymacji obciążenia przy założeniu znajomości jego charakterystyki częstotliwościowej, jednakże przy braku informacji o amplitudach. Podobne podejście zastosowano w pracy [5] do rozwiązania problemu śledzenia trajektorii.

W drugim z proponowanych podejść przyjęto, że dla obserwatora dostępne są jedynie wielkości pomiarowe i nie dysponuje się modelem wymuszenia. W tym wariancie za pomocą rozkładu macierzy względem wartości szczególnych (Singular Value Decomposition - SVD) wyjściowy układ mechaniczny podzielony został uprzednio na dwa podukłady. Metodę tę do estymacji wejścia w problemach sterowania opisano w pracy [6].

Całość omawianych powyżej rozważań teoretycznych zilustrowano dwoma przykładami numerycznymi ilustrującymi użyteczność proponowanych metod do identyfikacji obciążeń w czasie rzeczywistym. Symulację numeryczną przeprowadzono na przykładzie belki wolnopodpartej.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Przy identyfikacji obciążeń dynamicznych działających na konstrukcję przyjęto następujące założenia:

- rozpatrywane są siły wywołujące małe przemieszczenia i odkształcenia w konstrukcji
- znana jest przestrzenna lokalizacja obciążeń
- konstrukcja wykonana jest z materiału, który podlega prawu Hooke'a
- pomiar stanu deformacji dokonywany jest przy użyciu liczby czujników (przemieszczenia, prędkości bądź odkształcenia) mniejszej od liczby stopni swobody konstrukcji
- identyfikacja obciążenia dokonywana jest na bieżąco (w czasie rzeczywistym)

Powszechnie stosowana obecnie metoda elementów skończonych (MES) prowadzi do równań ruchu konstrukcji o n -stopniach swobody w postaci równań II rzędu

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{B}_0\mathbf{u}(t) \quad (1)$$

gdzie \mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{K} to macierze mas, tłumienia i sztywności, odpowiednio.

Jak wspomniano wcześniej, ze względów praktycznych mierzone są jedynie wybrane przemieszczenia, odkształcenia bądź prędkości. Prowadzi to do równania pomiarowego postaci

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_q\mathbf{q}(t) + \mathbf{C}_v\dot{\mathbf{q}}(t) \quad (2)$$

Możliwe jest również rozszerzenie omawianych metod na przypadek, w którym wielkościami mierzonymi są przyspieszenia.

Równania (1) i (2) można teraz zapisać w postaci równań I rzędu jako

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) & , \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (3)$$

gdzie

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_0 \end{bmatrix}$$

natomiast $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$.

Otrzymane powyżej równania (3) nazywane są równaniami stanu układu i ostatecznie posłużą do utworzenia obserwatora Luenbergera, którego zadaniem będzie rekonstrukcja wymuszenia $\mathbf{u}(t)$ na podstawie znajomości wielkości pomiarowych $\mathbf{y}(t)$.

3. IDENTYFIKACJA OBCIĄŻEŃ W CZASIE RZECZYWISTYM

3.1. Identyfikacja przy znanym modelu obciążenia

Dysponując informacją o rozkładzie częstości w siłach wymuszających, można utworzyć model obciążenia w postaci liniowego filtru. Tak utworzony model obciążenia można powiększyć o równania ruchu, tworząc tym samym nowy układ dynamiczny. Dla tego powiększonego układu, po spełnieniu warunku obserwowalności, utworzyć można estymator stanu, którego wektor stanu złożony jest z przemieszczeń i prędkości układu mechanicznego oraz amplitudy wymuszeń.

Pierwszym krokiem omawianej metody identyfikacji będzie zatem zamodelowanie obciążenia w postaci następującego równania różniczkowego

$$u^{(s)}(t) + l_{s-1}u^{(s-1)}(t) + l_{s-2}u^{(s-2)}(t) + \mathbf{K} + l_2\dot{u}(t) + l_1u(t) + l_0u(t) = 0 \quad (4)$$

gdzie $u^{(i)}(t)$ oznacza i -tą pochodną obciążenia $u(t)$ względem czasu.

Równanie (4) możemy następnie przekształcić do układu równań różniczkowych I rzędu poprzez wprowadzenie nowych zmiennych stanu modelujących siły działające na konstrukcję (1)

$$h_1 = u, \quad h_2 = \dot{u} = \dot{h}_1, \quad h_3 = \ddot{u} = \dot{h}_2, \quad \mathbf{K}, \quad h_s = u^{(s-1)} = \dot{h}_{s-1}, \quad \dot{h}_s = u^{(s)} = -\sum_{i=0}^{s-1} l_i u^{(i)} \quad (5)$$

W postaci macierzowej równania (5) możemy zapisać jako

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}(t) \\ u(t) = \mathbf{G}\boldsymbol{\eta}(t) \end{cases} \quad (6)$$

Podstawiając teraz zależność (6) do równań ruchu, we współrzędnych stanu otrzymamy jeden powiększony układ dynamiczny, który opisuje zarówno zachowanie konstrukcji jak i zmienność w czasie wymuszenia $\mathbf{u}(t)$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\eta}(t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\eta}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

Po spełnieniu warunków obserwowalności układu [7] można utworzyć obserwator Luenbergera, który dla układu (7) przyjmuje następującą postać

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\xi}}}(t) = \mathbf{F}\hat{\boldsymbol{\xi}}(t) + \mathbf{H}\mathbf{y}(t) \quad (8)$$

gdzie $\hat{\boldsymbol{\xi}}(t)$ jest estymatą stanu $\boldsymbol{\xi}(t)$, natomiast macierz $\mathbf{F} = \mathbf{\Theta} - \mathbf{H}\mathbf{G}$.

Widać stąd, że stabilność i szybkość zbieżności obserwatora można zapewnić przez właściwy dobór macierzy \mathbf{H} .

3.2. Identyfikacja obciążeń bez znajomości modelu obciążenia

Zastosowanie rozkładu macierzy względem wartości szczególnych (SVD) pozwala na odprężenie części zmiennych stanu od wymuszeń i zaprojektowanie dla nich estymatora. Podejście powyższe możliwe jest przy założeniu, że liczba czujników jest większa od liczby miejsc, w których identyfikowane są obciążenia.

W celu estymacji obciążenia bez znajomości jego modelu można wykorzystać rozkład macierzy \mathbf{B} względem jej wartości szczególnych, co zapisuje się jako

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (9)$$

gdzie $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ są macierzami ortonormalnymi, natomiast $\mathbf{\Sigma}$ jest macierzą diagonalną postaci

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & s_2 & \mathbf{K} & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 0 & 0 & \mathbf{K} & s_m \\ 0 & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 0 & 0 & \mathbf{K} & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Wprowadzając rozkład (9) do równań stanu (3) otrzymuje się

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1(t) = \bar{\mathbf{A}}_{11}\bar{\mathbf{x}}_1(t) + \bar{\mathbf{A}}_{12}\bar{\mathbf{x}}_2(t) + \mathbf{\Sigma}_0\bar{\mathbf{u}}(t) \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2(t) = \bar{\mathbf{A}}_{21}\bar{\mathbf{x}}_1(t) + \bar{\mathbf{A}}_{22}\bar{\mathbf{x}}_2(t) \end{cases} \quad (11)$$

gdzie

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1(t) \\ \bar{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{U}^T \mathbf{x}(t) \quad \bar{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{V}^T \mathbf{u}(t) \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U}$$

Wykorzystanie przekształconego wektora stanu $\bar{\mathbf{x}}(t)$ w równaniach pomiarowych prowadzi do równań postaci

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{U}\bar{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{C}}_1\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{C}}_2\bar{\mathbf{x}}_2 \quad (12)$$

Kolejnym etapem proponowanej metody jest rozkład względem wartości szczególnych macierzy $\bar{\mathbf{C}}_1$, co zapisuje się jako $\bar{\mathbf{C}}_1 = \mathbf{U}_c \mathbf{\Sigma}_c \mathbf{V}_c^T$, gdzie $\mathbf{\Sigma}_c^T = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{c0}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix}$.

Powyższy rozkład pozwala podzielić wektor pomiarowy na dwa podwektory

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{y}}_1(t) = \tilde{\mathbf{C}}_{11}\bar{\mathbf{x}}_1(t) + \tilde{\mathbf{C}}_{12}\bar{\mathbf{x}}_2(t) \\ \bar{\mathbf{y}}_2(t) = \tilde{\mathbf{C}}_{22}\bar{\mathbf{x}}_2(t) \end{cases} \quad (13)$$

gdzie $\bar{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{U}_c^T \mathbf{y}(t)$ natomiast $\tilde{\mathbf{C}}_{11} = \mathbf{\Sigma}_{c0} \mathbf{V}_c^T$, $\tilde{\mathbf{C}}_{12} = \mathbf{U}_{c1}^T \bar{\mathbf{C}}_2$ i $\tilde{\mathbf{C}}_{22} = \mathbf{U}_{c2}^T \bar{\mathbf{C}}_2$.

Następnie, korzystając z zależności (13), można wyznaczyć $\bar{\mathbf{x}}_1$ jako

$$\bar{\mathbf{x}}_1 = \tilde{\mathbf{C}}_{11}^{-1} (\bar{\mathbf{y}}_1 - \tilde{\mathbf{C}}_{12}\bar{\mathbf{x}}_2) \quad (14)$$

i podstawiając (14) do drugiego równania w (11), wyznaczyć $\dot{\bar{\mathbf{x}}}_2$ jako

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \bar{\mathbf{A}}_{21} \tilde{\mathbf{C}}_{11}^{-1} (\bar{\mathbf{y}}_1 - \tilde{\mathbf{C}}_{12} \bar{\mathbf{x}}_2) + \bar{\mathbf{A}}_{22} \bar{\mathbf{x}}_2 \quad (15)$$

Można zauważyć, że równania (15) reprezentują podzbiór stanu niezależny od wymuszeń a jedynie od części wielkości pomiarowych. Wykorzystując pozostałe wielkości pomiarowe $\bar{\mathbf{y}}_2 = \tilde{\mathbf{C}}_{22} \bar{\mathbf{x}}_2$, które są rozsprężone od stanu $\bar{\mathbf{x}}_1$, można skonstruować obserwator Luenbergera dla $\bar{\mathbf{x}}_2$ jako

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_2(t) = \mathbf{F} \hat{\mathbf{x}}_2(t) + \mathbf{G} \bar{\mathbf{y}}_1(t) \quad (16)$$

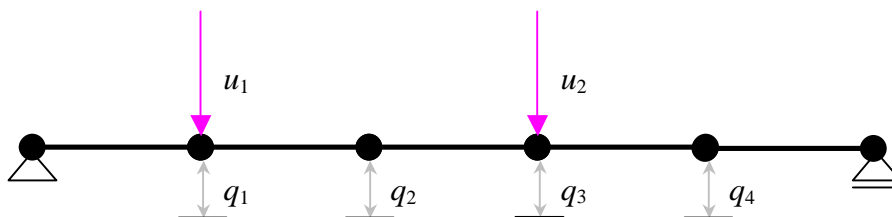
Ostatecznie, po obliczeniu estymaty wektora $\bar{\mathbf{x}}_2$, wyznacza się estymatę nieznanego wymuszenia jako

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{V} \Sigma_0^{-1} \left(\hat{\mathbf{x}}_2(t) - \bar{\mathbf{A}}_{11} \hat{\mathbf{x}}_1(t) - \bar{\mathbf{A}}_{12} \hat{\mathbf{x}}_2(t) \right) \quad (17)$$

Pojawiające się w równaniach (17) różniczkowanie może powodować niedokładności przy pomiarach obarczonych szumem pomiarowym. Stanowi to pewną słabość prezentowanej metody. Próba rozwiązania problemu identyfikacji obciążeń on-line, która pozwala uniknąć różniczkowania wielkości pomiarowych, została zaprezentowana w pracy [8].

4. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

Przedstawione powyżej metody identyfikacji zostaną zilustrowane obliczeniami numerycznymi na przykładzie belki swobodnie podpartej. Celem obliczeń jest wyznaczenie obciążenia działającego na belkę (rys. 1), przy znajomości jedynie podzbioru wektora stanu opisującego dynamiczne zachowanie układu. Belka została podzielona na 5 elementów skończonych. Rotacyjne stopnie swobody zredukowano metodą Guyana [9]. W obu prezentowanych przykładach wymuszenia działające na belkę znajdują się w pierwszym i trzecim węźle. Dane materiałowe przyjęte do obliczeń są następujące: moduł Younga $E=205$ GPa, długość $L=1$ m, pole przekroju $A=0.0001$ m², moment bezwładności $I=A^2/12$ oraz gęstość materiału $\rho=7850$ kg/m³.



Rys. 1. Model MES belki swobodnie podpartej

Obciążenie przyjęte do obliczeń mają następującą postać

$$u_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1/3 \text{ sec.} \\ -0.5 & 1/3 \leq t < 2/3 \text{ sec.} \\ 2 & 2/3 \leq t \leq 1 \text{ sec.} \end{cases} \quad u_2(t) = \begin{cases} \sin(25\pi t) & 0 < t < 1/2 \text{ sec.} \\ 3\sin(25\pi t) & 1/2 \leq t < 1 \text{ sec.} \end{cases}$$

Przykład nr 1

W pierwszym przykładzie wykorzystano obserwator bazujący na modelu obciążenia. Równania różniczkowe, które opisują oddziałujące na belkę wymuszenie, można przedstawić jako

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = 0 \quad \text{oraz} \quad \dot{\mathbf{x}}_2(t) + (25p)^2 u_2(t) = 0$$

Macierz \mathbf{C} , spełniająca warunek obserwowalności powiększonego układu (konstrukcja + model obciążenia), przyjęto jako macierz następującej postaci

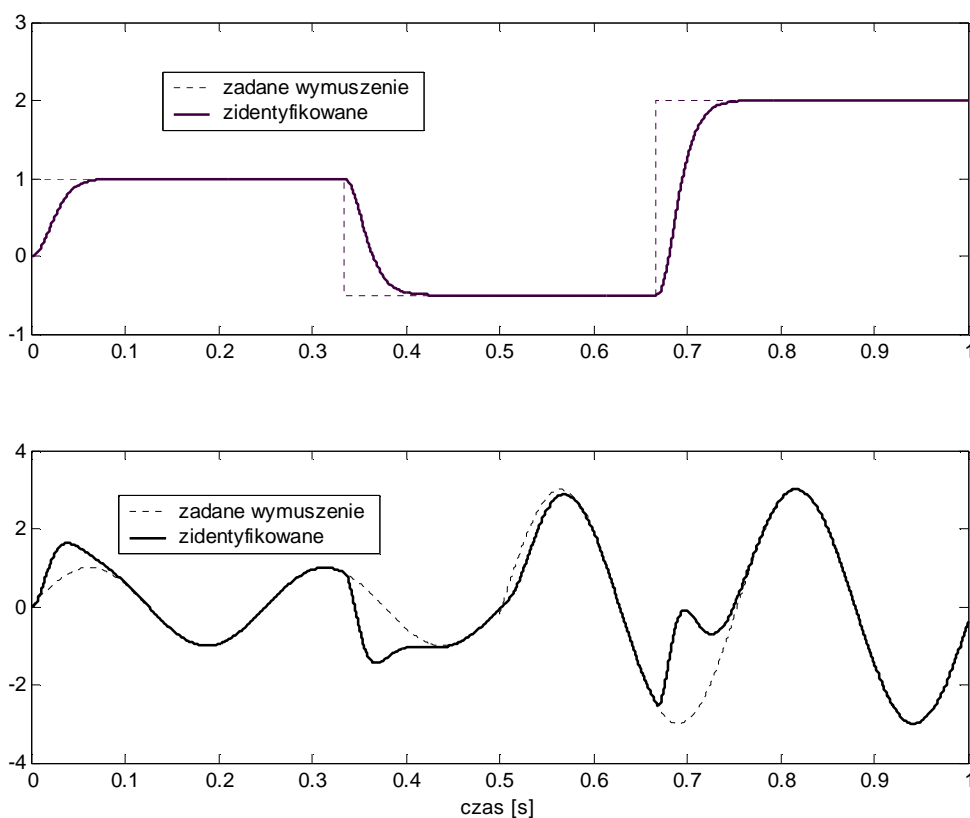
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oznacza to, że w rozpatrywanym przykładzie mierzone są trzy kolejne przemieszczenia węzłów q_1, q_2, q_3 .

Macierz wzmocnienia obserwatora \mathbf{H} wybrano tak, aby wartości własne macierzy \mathbf{F} wynosiły odpowiednio

$$I(\mathbf{F}) = [-235.6, -111.0, -110.1, -108.8, -107.4, -101.0, -106.2, -102.0, -105.0, -103.9, -103.0]$$

Wyniki identyfikacji obciążenia dla tak dobranych parametrów obserwatora przedstawiono na rys.2.



Rys. 2. Identyfikacja obciążenia przy użyciu obserwatora z modelem obciążenia

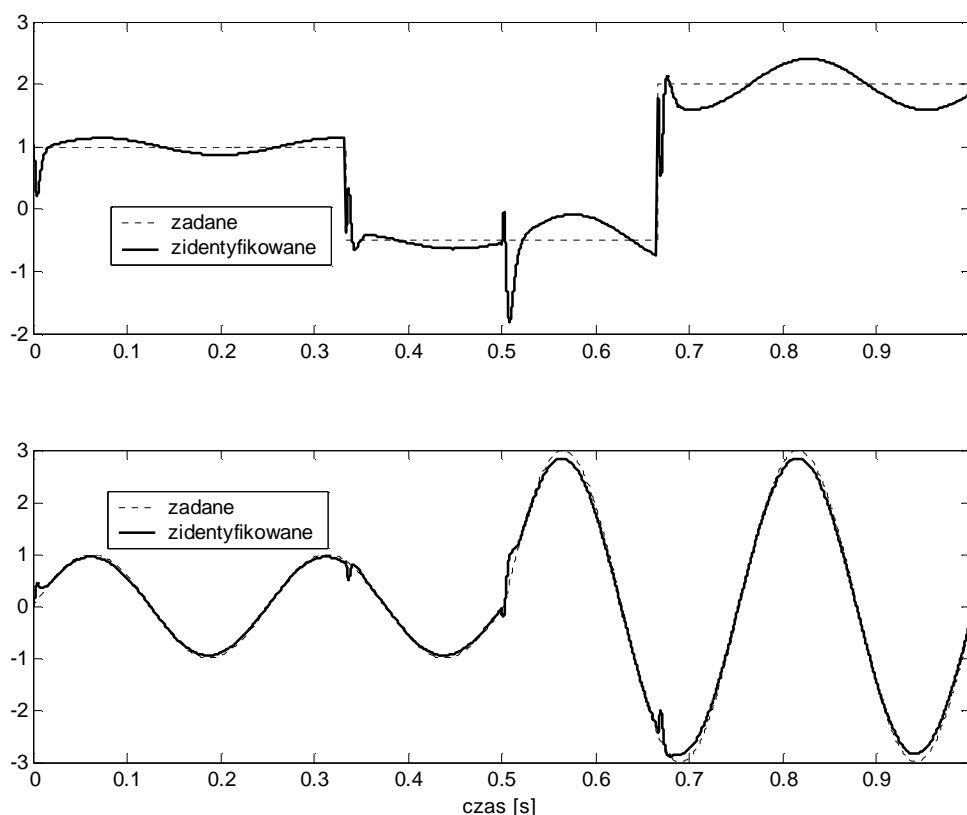
Przykład nr 2

W drugim przykładzie zastosowano obserwator bez znajomości modelu obciążenia. W tym przypadku macierz C wybrano jako

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oznacza to, że w tym przykładzie mierzone są różnice pomiędzy przemieszczeniami węzłów q_2 a q_1 , q_3 a q_2 i pomiędzy q_4 a q_3 oraz prędkości trzech pierwszych węzłów.

Wartości własne obserwatora przyjęto w zakresie od -1500 do -250 z krokiem 250 . Na rys. 3. przedstawiono wynik estymacji obciążenia. Krok próbkowania równy $3 \cdot 10^{-5}$ sec. powoduje niepożądane oscylacje w końcowym etapie identyfikacji. Zjawisko to można zredukować, dobierając mniejszy krok próbkowania.



Rys. 3. Identyfikacja obciążenia przy użyciu obserwatora bez znajomości modelu obciążenia

5. WNIOSKI KOŃCOWE

W pracy przedstawiono dwie metody identyfikacji obciążeń w czasie rzeczywistym dla znanych lokalizacji wymuszeń. Pierwsza z prezentowanych metod, bazująca na znajomości modelu obciążenia, pozwala na redukcję liczby czujników w stosunku do liczby identyfikowanych obciążeń. Druga metoda nie wymaga znajomości modelu obciążenia w

zamian za zastosowanie większej liczby czujników (co najmniej o jeden więcej niż liczba identyfikowanych obciążeń). Oba zaprezentowane przykłady numeryczne ukazują, że jeżeli spełniony jest warunek obserwowalności, bieguny obserwatora mogą zostać dobrane dowolnie, powodując pożądaną szybkość estymacji obciążenia. Jedynym mankamentem drugiej z proponowanych metod jest potrzeba różniczkowania sygnałów pomiarowych.

LITERATURA

1. Bryson A.E, Ho Y.: Applied optimal control. Optimization, Estimation and Control, Hemisphere Publishing Corporation, 1975.
2. Preumont A.: Vibration control of active structures: an introduction 2nd edition, Kluwer Academic Publishers, 2002.
3. Ha Q.P., Trinh H.: State and input simultaneous estimation for class of nonlinear systems, "Automatica" 40 (2004), s. 1779-1785.
4. Tuan P., Ji C., Fong L., Huang W.: An input estimation approach to on-line two-dimensional inverse heat conduction problems. "Numerical Heat Transfer" Part B 29 (1996), s. 345-363.
5. Dorf R.C., Bishop R.H.: Modern control systems. Ninth edition. Prentice-Hall, 2001.
6. Hou M., Muller P.C.: Design observers for linear systems with unknown inputs. IEEE Trans. on Automatic Control 37 (6), 1992, s. 871-875.
7. Kaczorek T.: Teoria sterowania i systemów. Warszawa : Wyd. Nauk PWN, 1993.
8. Xiong Y., Saif M.: Unknown disturbance inputs estimation based on a state functional observer design. "Automatica" 39 (2003), s. 1389-1398.
9. Meirovitch L.: Computational methods in structural dynamics. Sijthoff & Noordhoff, 1980.

DYNAMIC LOAD IDENTIFICATION UNDER CONSTRAINTS ON NUMBER OF SENSORS

Summary. In the paper two methods of real-time load identification are proposed. The first one is based on information about frequency characteristics of loading, while the second one uses only information about deformation of structure. Theoretical considerations are illustrated by numerical calculations on a example of simply supported beam.